内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的辅导书，分上、下两册，编写顺序与一般的数学分析教材同步，本册内容包括实数与数列极限，函数、极限与连续性，导数与微分，微分中值定理与利用导数研究函数，不定积分，定积分及其应用等，在归纳内容、释疑解难的基础上，用大量、全面的例题为读者诠释概念，演绎技巧，举证方法，通过学习它，读者可以循序渐进地融会知识，理解概念，熟悉技巧和掌握方法. 因此，读者有必要认真学习本书，通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友，欢迎你选用本系列丛书.

前　言

数学分析是高等学校数学专业的主要基础课程.对初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开.为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法.因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者.有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法.本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮

助,在此向他们表示衷心的感谢.在本书写作中,曾参阅了一些作者关于数学分析问题的著作,本人借此向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处望同行和读者热心指正.

孙清华　孙　昊

2003年1月

目　录

第一章　实数与数列极限

第一节　实数的表示与实数系的连续性

主要内容

一、实数的表示

1. 全体有理数与全体无理数所构成的集合称为实数集合，记作

$$\mathbf{R} = \{x \mid x\text{ 是有理数或无理数}\}.$$

2. 任何一个实数都可用无尽小数表示. 其中任何有理数都可以表示为无尽循环小数(有尽小数视作后面有无尽个零的循环小数)，任何无理数都可以表示为无尽小数.

3. 实数分为非负实数与负实数. 任何非负实数大于任何负实数.

对任意两个实数 a 和 b，必有且只有以下三种情形之一(称为三歧性)：

$$a > b,\quad a = b,\quad a < b.$$

4. 有尽小数在实数系中处处稠密.

设 a 和 b 是实数，$a < b$，则存在有尽小数 c，满足 $a < c < b$.

5. 实数 x 的绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 是非负实数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 是负实数.} \end{cases}$$

$-x$ 称为 x 的相反数，零的相反数是零本身.

二、实数系的连续性

1. 对于实数集合中的任何的分割(Dedekind)$A|A'$，存在产生这个分割的实数 β，这个数 β：1) 或是下类 A 中的最大数；2) 或是上类 A' 中的最小数.

此性质称为实数系的连续性，或完备性、密接性.

2. 实数集 $\mathbf{R}$ 的各种子集，简称为数集.

设 E 为一非空数集，若 $\exists\ M\in\mathbf{R}$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\leqslant M$，则称 M 为 E 的一个上界；若 $\exists\ m\in\mathbf{R}$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\geqslant m$，则称 m 为 E 的一个下界. 既有上界又有下界的数集 E，称为有界集. 即

E 为有界集 $\Longleftrightarrow \exists\ X>0$，使 $\forall\ x\in E$，有 $|x|\leqslant X$.

E 的上界中的最小数，称为数集 E 的上确界，记作 $\sup E$；E 的下界中的最大数，称为数集 E 的下确界，记作 $\inf E$.

3. 确界存在定理 —— 实数系连续性定理　非空有上界的数集必有上确界，非空有下界的数集必有下确界.

4. 非空有界数集的上(下)确界是惟一的.

疑难解析

1. 数集的最大数与最小数同数集的上确界与下确界有什么关系？

答　设 E 为一数集，如果 $\exists\ \beta\in E$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\leqslant\beta$，则称 β 是 E 的最大数；如果 $\exists\ \alpha\in E$，使 $\forall\ x\in E$，有 $x\geqslant\alpha$，则称 α 是 E 的最小数.

与 E 的上、下界定义比较，知其区别在于：α 与 β 是属于 E 的，而 E 的上、下界是属于 $\mathbf{R}$ 的，可能不属于 E. 所以，上、下确界可能不属于 E.

E 的上界的全体不可能有最大数，一定有最小数，即上确界；E 的下界的全体不可能有最小数，一定有最大数，即下确界.

2. 为什么要引入确界概念？

答　因为，对有限数集 E，必有最大数 $\max E$ 和最小数 $\min E$，它们分别为数集 E 的上边边界和下边边界. 但当数集为无限集时，最大数与最小数就有可能不存在. 因此，需要找出一个数作为它的上边（下边）边界.

若无限数集上方（下方）无界，则没有上边（下边）边界. 若无限数集有上（下）界，且存在最大（小）数，则此最大（小）数即为此数集的上边（下边）边界；若不存在最大（小）数，则可以用其上（下）确界来作为上边（下边）边界. 如无限数集 $\{n/(n+1) \mid n \in \mathbf{N}\}$ 没有最大数，但有上界，则其上确界 $\sup\{n/(n+1) \mid n \in \mathbf{N}\} = 1$ 可作为数集的上边边界.

另外，求开区间 (a,b) 长度的问题也要利用上、下确界来解决. 因为，开区间 (a,b) 是有界的无限集，没有最大数，也没有最小数，也有上确界 b 和下确界 a. 以 a 和 b 作为数集的下边边界与上边边界，就可求得开区间 (a,b) 的长度 d 为

$$
\begin{aligned}
d &= \sup\{x \mid a < x < b\} - \inf\{x \mid a < x < b\} \\
&= \sup\{y - x \mid \forall\, x, y \in (a,b), y > x\} = b - a.
\end{aligned}
$$

由上可见，引入确界概念可以更好地描述实数的连续性，并且给证明问题带来许多方便.

3. 试叙述上（下）确界的等价命题.

答　数集 E 的上确界 $\sup E = \beta$ 有三种等价命题，它们是：

(1) $\begin{cases} \forall\, x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E \Rightarrow \beta - \varepsilon < x_0. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \forall\, x \in E \Rightarrow x \leqslant \beta; \\ \forall\, x < \beta, \exists\, x_0 \in E \Rightarrow x < x_0. \end{cases}$

(3) $\beta = \min\{y \mid \forall\, x \in E, x \leqslant y\}$，即数集 E 的上确界 β 是数集 E 的上界所构成数集中的最小数.

类似地，可写出下确界 $\inf E = \alpha$ 的等价命题.

方法、技巧与典型例题分析

本节的例题绝大多数是证明题，因此必须对概念十分熟悉和理解.证明可以从正面进行，也可以从反面进行.一般，当问题从正面不易入手时，可考虑利用反证法证明.

一、最大数与最小数

例 1 设 c 为正整数，而不为整数的平方，且分割 $A|B$ 确定实数 c. 其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，A 类包含所有其余的有理数.求证：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 在 A 类中任取有理数 $a>0$，则 $a^2<c$. 设 $r=c-a^2$，选取有理数 x，使 $0<x<1$，且 $(a+x)^2<c$. 这在 $0<x<\frac{r}{2a+1}$ 时即可实现，因为

$$c-(a+x)^2=r-2ax-x^2>r-(2a+1)x>0.$$

取 $\delta=\min\left\{1,\frac{c-a^2}{2a+1}\right\}$，则在 $(0,\delta)$ 中任取一有理数 x，都有 $(a+x)^2<c$，所以 $a+x$ 属于 A 类，且 $a+x>a$，即 A 类中无最大数.

在 B 类中任取一有理数 b，设 $s=b^2-c$. 选取有理数 y，使 $0<y<b$，且 $(b-y)^2>c$. 这在 $0<y<\frac{s}{2b}$ 时即可实现，因为

$$(b-y)^2-c=s-2by+y^2>s-2by>0,$$

取 $\varepsilon=\min\left\{b,\frac{b^2-c}{2b}\right\}$，则在 $(0,\varepsilon)$ 中任取一有理数 y，有 $(b-y)^2>c$，所以 $b-y$ 属于 B 类，且 $b-y<b$，即 B 类中无最小数.

例 2 设 $A=\{x|x\leqslant 0 \text{ 或 } x>0, \text{且 } x^2<2, x\in \mathbf{Q}\}$,

$$B=\{x|x>0, \text{且 } x^2>2, x\in \mathbf{Q}\},$$

其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数.证明：A 类中无最大数，B 类中无最小数.

证 利用例 1，令 $c=2$，即可证出.请读者一试.

例 3 设 $a\leqslant c\leqslant b$，证明：$|c|\leqslant \max\{|a|,|b|\}$.

证 因为

$$\max\{|a|,|b|\}\geqslant|b|\geqslant b\geqslant c,$$

$$-\max\{|a|,|b|\}\leqslant-|a|\leqslant a\leqslant c,$$

所以

$$|c|\leqslant\max\{|a|,|b|\}.$$

例 4 设 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$,求证:

$$|a|<1/2,\ |b|<1/2.$$

证 用反证法. 设 $|a|>1/2,|b|>1/2$.

(1) 设 $0<a<b$,则

$$1/2<|a|<|a+b|,\ 1/2<|b|<|a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>\dfrac{1}{2}$,引出矛盾.

(2) 设 $a<b<0$,则

$$1/2<|a|<|a+b|,\quad 1/2<|b|<|a+b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>1/2$,引出矛盾.

(3) 设 $a<0<b$,则

$$1/2<|a|<|a-b|,\quad 1/2<|b|<|a-b|,$$

从而 $\max\{|a+b|,|a-b|\}>1/2$,引出矛盾.

综上所述可知,必有 $\max\{|a+b|,|a-b|\}<1/2$.

例 5 证明:$\forall\ a,b\in\mathbf{R}$,有

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant1/2.$$

证 用反证法. 设 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}<1/2$. 由例 4 知,此时有 $|a|<1/2,|b|<1/2$,因而

$$|1-b|\geqslant1-|b|>1/2,$$

与所设矛盾. 故命题必成立.

二、上、下确界的命题

例 6 证明:若数集 E 的上(下)确界存在,则它必惟一存在.

证 用反证法. 设 p 和 q 是 E 的上确界,且 $p\neq\varepsilon_0=(q-p)/2$,则 $\forall\ x\in E,x\leqslant p<q-(q-p)/2=q-\varepsilon_0$,这与 q 为 E 的上确界矛盾. 故必有 $p=q$,即数集 E 的上确界是惟一的.

类似可证,数集 E 的下确界也是惟一的.

例 7 设 $E=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots\right\}$,求 $\sup E,\inf E$,问:$\min E$ 与 $\max E$ 是否存在?

解 因为 $\forall\, n, 1-\frac{1}{n}<1$,且 $\forall$ 任 $\varepsilon>0,\exists\, n_0$,使 $1-\frac{1}{n_0}\in\left\{1-\frac{1}{n}\right\},1-\frac{1}{n}>1-\varepsilon$,仅当 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}$,所以,$\sup E=1$.

类似可证,$\inf E=\frac{1}{2}$.

由 $E=\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$是单调增加的知,$\min E=\frac{1}{2}$,$\max E$不存在.

例 8 设 $E=\{x\,|\,x\in\mathbf{Q}$,且 $x^2<2,x>0\}$,证明:E 有上界,但在 $\mathbf{Q}$ 内没有上确界.

证 E 有上界是显然的.例如,2 就是 E 的一个上界.

用反证法证明 E 在 $\mathbf{Q}$ 内无上确界.

设 E 在 $\mathbf{Q}$ 内有上确界,$\sup E=\frac{n}{m}(m,n\in\mathbf{N}^+$,且 m,n 互质),则有 $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$.因为有理数的平方不可能等于2,就出现下列两种可能.

(1) $1<\left(\frac{n}{m}\right)^2<2$.若记 $2-\left(\frac{n}{m}\right)^2=t$,则 $0<t<1$.令 $r=\frac{n}{6m}t$,有$\frac{n}{m}+r>0$,且$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$.

由于 $r^2=\frac{n^2}{36m^2}t^2<\frac{t}{18}$,且$\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<\frac{2}{3}t$,得

$$\left(\frac{n}{m}+r\right)^2-2=r^2+\frac{2n}{m}r-t<0.$$

由此可知,$\frac{n}{m}+r\in\mathbf{Q}$,与$\frac{n}{m}$ 是 $\mathbf{Q}$ 的上确界矛盾.

(2) $2<\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$.若记$\left(\frac{n}{m}\right)^2-2=t$,则 $0<t<1$.令 $r=$

$\frac{n}{6m}t$，有$\frac{n}{m}-r>0,\frac{n}{m}-r\in\mathbf{Q}$.

由于$\frac{2n}{m}r=\frac{n^2}{3m^2}t<t$，得

$$\left(\frac{n}{m}-r\right)^2-2=r^2-\frac{2n}{m}+t>0.$$

由此可知，$\frac{n}{m}-r$也是Q的上界，与$\frac{n}{m}$是Q的上确界矛盾.

综上所述知，E在Q内无上确界.

例 9　设$E=\{x|x^2<2,x\in\mathbf{Q}\}$，验证：

$$\sup=\sqrt{2},\quad \inf=-\sqrt{2}.$$

证　因为$\forall\ \in E$，由$x^2<2$可得$x<\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}$是$E$的一个上界. 又取任$a<2$知，依有理数集的稠密性，在$(a,\sqrt{2})$中一定存在有理数$x'$，使$(x')^2<2$，从而知$x'\in E$，且$a<x'\Rightarrow a$不是$E$的上界. 于是，依定义知$\sup E=\sqrt{2}$.

类似可验证，$\inf E=-\sqrt{2}$.

注意　例9与例8并不矛盾. 例8是指E在Q内无上、下确界，即确界定理在Q内不成立.

例 10　设$\{-x\}$是一数集，所含数是与$x\in\{x\}$符号相反的数，证明：

(1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$；　　(2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

证　(1) 设$\sup\{x\}=b$，b为有限实数. 因而，$\forall$ 数集中的所有x，有$x\leqslant b$；又对任给的$\varepsilon>0$，数集中必有x，使$x>b-\varepsilon$.

由于$b\geqslant x$，故$-b\leqslant -x$；又$\exists\ x$，使$x>b-\varepsilon$则必$\exists\ -x$，使$-x<-b+\varepsilon$. 因为数集$\{-x\}$具有上述性质，所以

$$\inf\{-x\}=-b=-\sup\{x\}.$$

同理可证$b=+\infty$的情形.

(2) 类似可证，$\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

例 11 设有数集 A,B，若 $E = A \cup B$，证明：

(1) $\sup E = \max\{\sup A, \sup B\}$；

(2) $\inf E = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证 (1) 若 A,B 中至少有一个无上界，则 E 也无上界，等式变为 $+\infty = +\infty$.

若 A,B 都有上界，并设 E 的上界为 $\sup E$，则由 $E = A \cup B$，$x \in A$（或 $x \in B$）$\Rightarrow x \in E$. 于是，$x \leqslant \sup E$，即数 $\sup E$ 是数集 A（或 B）的一个上界，而数 $\sup A$（或 $\sup B$）是 A（或 B）的最小上界. 故有 $\sup A$（或 $\sup B$）$\leqslant \sup E$. 从而证得

$$\sup E \geqslant \max\{\sup A, \sup B\}.$$

又由 $\forall\, x \in E$，有 $x \in A$（或 $x \in B$）$\Rightarrow x \leqslant \sup A$（或 $x \leqslant \sup B$），即 $x \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}$. 从而证得

$$\sup E \leqslant \max\{\sup A, \sup B\}.$$

综合上面两个不等式，知 $\sup E = \max\{\sup A, \sup B\}$ 成立.

(2) 类似可证.

例 12 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合，其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$，证明：

(1) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$；

(2) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (1) 考虑下确界为有限的情形.

设 $\inf\{x\} = a$，$\inf\{y\} = b$. 由定义知，$a \leqslant x$，有 $\forall$ 任 $\varepsilon > 0$，$\exists\, x$ 使 $x < a + \frac{\varepsilon}{2}$；$b \leqslant y$，且 $\forall$ 任 $\varepsilon > 0$，$\exists\, y$，使 $y < b + \frac{\varepsilon}{2}$. 从而知，对于集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 中的 x 和 y，恒有 $a + b \leqslant x + y$，又 $x + y < a + b + \varepsilon$，故 $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$ 成立.

(2) 类似可证. 只考虑上确界为有限的情形.

例 13 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合，其中 $x \in \{x\}$，$y \in \{y\}$，且 $x \geqslant 0$，$y \geqslant 0$. 证明等式：

(1) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

(2) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

证 (1) 设下确界为有限值, $\inf\{x\} = a$, $\inf\{y\} = b$. 由定义知 $x \geqslant a \geqslant 0$, $y \geqslant b \geqslant 0$, 且 $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, 使得 $x < a + \dfrac{\varepsilon}{a+b+1}$, $y < b + \dfrac{\varepsilon}{a+b+1}$, 所以, $xy \geqslant ab$. 又数集 $\{x, y\}\exists$ 数 x, y, 使

$$xy < \left(a + \frac{\varepsilon}{a+b+1}\right)\left(b + \frac{\varepsilon}{a+b+1}\right)$$
$$= ab + \frac{(a+b)\varepsilon}{a+b+1} + \frac{\varepsilon^2}{(a+b+1)^2},$$

所以, 当 $\varepsilon < 1$ 时, $xy < ab + \varepsilon$. 即证得

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(2) 类似可证. 但要考虑上确界为无穷大和有限值两种情形. 特别是, 若 $\{x\}$ 仅含元素 0, 而 $\sup\{y\} = +\infty$, 则 $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$ 不成立.

例 14 设 $A, B \subseteq \mathbf{R}$, 是非空有界集, 证明:

(1) $A \subseteq B \Rightarrow \inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup B$;

(2) 如果 $\forall\ a \in A, \forall\ b \in B, |a - b| < \varepsilon$, 则

$$|\sup A - \sup B| \leqslant \varepsilon, \quad |\inf A - \inf B| \leqslant \varepsilon.$$

证 (1) 依定义, $\forall\ x \in A$, $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, 又因为 $A \subseteq B$, 所以, $\forall\ x \in A$, $x \geqslant \inf B$, 即 $\inf A \geqslant \inf B$.

又 $\forall\ x \in A$, $x \leqslant \sup A \leqslant \sup B$, 故命题成立.

(2) 依定义, $\forall\ x \in A$, $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$; $\forall\ x \in B$, $\inf B \leqslant x \leqslant \sup B$. 不妨设 $x_0 = \inf A$, $x_1 = \sup A$, $x_2 = \inf B$, $x_3 = \sup B$, 则由 $\forall\ a \in A, b \in B, |a - b| < \varepsilon$, 可得出

$$|x_2 - x_0| \leqslant \varepsilon, \quad |x_3 - x_1| \leqslant \varepsilon.$$

即
$$|\sup A - \sup B| \leqslant \varepsilon, \quad |\inf A - \inf B| \leqslant \varepsilon.$$

第二节　实数的四则运算与实数系的基本性质

主要内容

1. 设a和b为实数，则存在惟一实数u，使得对于满足条件：$\alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$，$\beta \leqslant b \leqslant \beta'$ 的任何有尽小数 α,α' 和 β,β'，都有 $\alpha + \beta \leqslant u \leqslant \alpha' + \beta'$，于是实数 u 称为实数 a 与实数 b 的和，记作 $a + b$.

实数 a 与实数 b 的差定义为 a 与 $-b$ 之和，即 $a - b = a + (-b)$.

2. 设 a,b 为非负实数，则存在唯一实数 v，使得对于满足条件：$0 \leqslant \alpha \leqslant a \leqslant \alpha'$，$0 \leqslant \beta \leqslant b \leqslant \beta'$ 的任何有尽小数 α,α' 和 β,β'，都有 $\alpha\beta \leqslant v \leqslant \alpha'\beta'$，于是实数 v 称为非负实数 a 与实数 b 的乘积，记作 ab.

任意实数 a 与实数 b 的乘积

$$ab = \begin{cases} |a||b|, & \text{如果 } a,b \text{ 同号}, \\ -|a||b|, & \text{如果 } a,b \text{ 异号}. \end{cases}$$

3. 实数集 $\mathbf{R}$ 是域. 在实数集上定义了加法与乘法，且满足：

(1) 加法交换律　$\forall\, x,y \in \mathbf{R}, x + y = y + x$.

(2) 加法结合律　$\forall\, x,y,z \in \mathbf{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$.

(3) 存在零元素 0，使 $x + 0 = x$.

(4) 存在负元素 $-x$，使 $x + (-x) = 0$.

(5) 乘法交换律　$x \cdot y = y \cdot x$.

(6) 乘法结合律　$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

(7) 存在单位元素 1，使 $x \cdot 1 = x$.

(8) 存在逆元素 x^{-1}，使 $x \cdot x^{-1} = 1$.

(9) 乘法分配律　$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

4. 实数域是全序域,满足:

(1) 三歧性　$\forall x, y \in \mathbf{R}$,下列三式中有且仅有一式成立:

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y.$$

(2) 传递性　$a < b, \quad b < c \Rightarrow a < c.$

(3) 顺序性　$a < b \Rightarrow a + c < b + c.$

$$a < b, \quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c.$$

第三节　不　等　式

主要内容

1. 三角形不等式　设 a, b 为任意实数,则

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|a| - |b| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. 伯努利(Bernoulli)不等式　设 $x > -1, n \in \mathbf{N}^+, n \geqslant 2$,则

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx.$$

3. 柯西(Cauchy)不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

4. 平均值不等式　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数,则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

当且仅当所有 x_i 都相等时,等号成立.

5. 赫尔德(Hölder)不等式　设实数 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,且 a_i, b_i 为非负实数,则

当 $p>1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，

当 $p<1$ 时，$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

6. 闵可夫斯基(Minkowski)不等式　对任意的实数 $r \neq 0, 1$；$a_i, b_i \geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$，有

当 $r>1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$，

当 $r<1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

方法、技巧与典型例题分析

在数学分析课程中，不等式是证明许多定理与公式的工具；而数学分析中的一些定理和公式又可导出许多不等式. 不等式表达了许多数学分析问题的结果，而不等式的证明又蕴涵着许多数学分析的技巧，所以掌握不等式与不等式的应用对学习数学分析是十分重要的.

例 1　证明三角形不等式

$$|a|-|b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a|+|b|.$$

证　因为 $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$，$-|b| \leqslant b \leqslant |b|$，

所以　$$-(|a|+|b|) \leqslant (a+b) \leqslant |a|+|b|,$$

即　$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

将式中 b 改为 $-b$，上式仍然成立，所以

$$|a-b| \leqslant |a|+|b|.$$

由于　$$|a| = |(a-b)+b|,$$

因此　$$|a| \leqslant |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leqslant |a-b|.$$

将式中 b 改为 $-b$，上式仍然成立，所以

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|.$$

综上所述，即得三角形不等式

$$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(1) 由于 $|a-b|=|b-a|\geqslant|b|-|a|\geqslant-(|a|-|b|)$，

$$|a+b|=|b+a|\geqslant|b|-|a|\geqslant-(|a|-|b|),$$

所以得到绝对值不等式：

$$\big||a|-|b|\big|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

(2) 利用数学归纳法，可以将 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$ 推广到 n 个实数的情形，即

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

例 2 证明不等式

$$|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$$

证 因为，由三角形不等式，有

$$|x+(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\geqslant|x|-|x_1+x_2+\cdots+x_n|,$$

又 $\quad|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,$

所以 $\quad|x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|).$

例 3 证明伯努利不等式

$$(1+x)^n\geqslant1+nx,\quad x>-1.$$

证 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，上式成立．设对 $n-1$，有 $(1+x)^{n-1}\geqslant1+(n-1)x$ 成立，则

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant[1+(n-1)x](1+x)\\&=1+(n-1)x+x+(n-1)x^2\geqslant1+nx,\end{aligned}$$

即对一切自然数 n，当 $x\geqslant-1$ 时，有

$$(1+x)^n\geqslant1+nx.$$

例 4 设 $n\in\mathbf{N}$，证明：

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\quad n\geqslant2.$$

证　利用伯努利不等式$(1+x)^n \geqslant 1+nx$，有

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \geqslant 1+\frac{n}{n-1},\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant 1+\frac{n+1}{n},$$

因为$\frac{n}{n-1}-\frac{n+1}{n}=\frac{n^2-n^2+1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}>0, n \geqslant 2$. 所以

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

例 5　设实数 a,b 满足 $|a|<1, |b|<1$. 证明：

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

证　若要不等式成立，应有

$$-1<\frac{a+b}{1+ab}<1,$$

即式 $1-\frac{a+b}{1+ab}>0$ 和 $1+\frac{a+b}{1+ab}>0$ 应同时成立.

因为 $|a|<1, |b|<1$，所以 $ab<1 \Rightarrow 1+ab>0$，将上述两式化为

$$1+ab-a-b=(1-a)(1-b)>0,$$

$$1+ab+a+b=(1+a)(1+b)>0,$$

显然，当 $|a|<1, |b|<1$ 时，上两式成立，从而所证不等式成立.

例 6　证明柯西不等式：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n; y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为两组实数，则

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

证法 1　用配方法. 由

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2-\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_i x_j y_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0,$$

当 $x_i y_j = x_j y_i$ 时,等号成立.

证法 2 用二次三项式的判别式法. 由于

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i t + y_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)t + \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

所以,判别式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 - \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right) \leqslant 0.$$

从而所证命题成立.

例 7 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是实数,$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$. 又

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant y_1 + y_2 + \cdots + y_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

证明: $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2.$

证 令 $x_{n+1} = 0$,以 $x_k - x_{k+1}$ 乘不等式两边可得

$$(x_k - x_{k+1})(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$
$$\leqslant (x_k - x_{k+1})(y_1 + y_2 + \cdots + y_k).$$

对 k 作 1 到 n 的和,得

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

两边平方,利用柯西不等式结论,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right),$$

即
$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

例 8 证明平均值不等式:设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数,则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 当 $n = 1, 2$ 时,不等式显然成立.

设对任意 $n-1$ 个正实数，命题成立.

对 n 个正实数情形，我们重新排列它们，使 x_n 为其中最大的一个，则有

$$x_n \geqslant A = \frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \geqslant \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}.$$

于是
$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n &= \left[\frac{(n-1)A + x_n}{n}\right]^n \\ &= \left(A + \frac{x_n - A}{n}\right)^n = A^n + nA^{n-1}\left(\frac{x_n - A}{n}\right) + \cdots \\ &\geqslant A^n + nA^{n-1}\left(\frac{x_n - A}{n}\right) = A^{n-1}x_n \\ &\geqslant x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n,\end{aligned}$$

即
$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

当且仅当所有的 x_i 都相等时，等号成立.

例 9 利用平均值不等式证明

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证 令平均值不等式

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1})$$

中 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}, x_{n+1} = 1$，则上式成为

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{1}{n+1}\left[n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1\right] = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

两边 $n+1$ 次方，即得

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

例 10 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正数，且 $n \geqslant 1$，证明：

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

证 在平均值不等式中，令 $x_i=\dfrac{1}{t_i}$，得

$$\sqrt[n]{\frac{1}{t_1}\cdot\frac{1}{t_2}\cdots\frac{1}{t_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right),$$

即
$$\frac{1}{\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}}\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right),$$

化为
$$\sqrt[n]{t_1t_2\cdots t_n}\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}+\cdots+\dfrac{1}{t_n}}$$

即为所证(只需将 t_i 改写为 x_i).

例 11 证明赫尔德不等式:设实数 p,q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，且 a_i,b_i 为非负实数，则

当 $p>1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，

当 $p<1$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\geqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

证 利用下列不等式:对 $t>0$，有

$$t^{\alpha}-\alpha t+\alpha-1\geqslant0\quad(\alpha>1\text{ 或 }\alpha<0),\tag{①}$$

$$t^{\alpha}-\alpha t+\alpha-1\leqslant0\quad(0<\alpha<1).\tag{②}$$

当 $t=1$ 时等号成立(利用函数单调性与极值证).

在式①，式②中，令 $\alpha=\dfrac{1}{p}$，$1-\alpha=\dfrac{1}{q}$，并以 $\dfrac{x}{y}$ 代替 t，得

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{p}}\geqslant\frac{1}{p}\frac{x}{y}+\frac{1}{q}\Rightarrow x^{\frac{1}{p}}y^{1-\frac{1}{p}}\geqslant\frac{x}{p}+\frac{y}{q},$$

即
$$\begin{cases}x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\leqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q},\quad p>1, & ③\\[2ex] x^{\frac{1}{p}}y^{\frac{1}{q}}\geqslant\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q},\quad p<1. & ④\end{cases}$$

在式 ③ 中，令

$$x_i = a_i^p/A, \quad y_i = b_i^q/B,$$

其中 $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^p, B = \sum_{i=1}^{n} b_i^p$，则当 $p > 1$ 时，有

$$\frac{a_i b_i}{A^{1/p} B^{1/q}} \leqslant \frac{a_i^p}{pA} + \frac{b_i^q}{qB},\ i = 1,2,\cdots,n.$$

于是 $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant A^{1/p} B^{1/q} \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}{pA} + \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}{qB} \right]$$

$$= A^{1/p} B^{1/q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}.$$

类似可证 $p < 1$ 时的不等式.

例 12 证明闵可夫斯基不等式：对任意的 $r \neq 0,1$ 及 $a_i, b_i \geqslant 0\ (i = 1,2,\cdots,n)$，有

当 $r > 1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r}$，

当 $r < 1$ 时，$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r \right)^{1/r} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r}$.

当且仅当 a_i 与 b_i 成比例时，等号成立.

证 当 $r > 1$ 时，令 $t_i = a_i + b_i$，有

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^r = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^r = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{r-1} (a_i + b_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i t_i^{r-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i t_i^{r-1}.$$

又令 $p = r, q = \dfrac{r}{r-1}$，则 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$，应用赫尔德不等式，得

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^r \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^r \right)^{\frac{r-1}{r}}$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r \right)^{1/r} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r \right)^{1/r} \right] \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \right)^{1-1/r}.$$

不等式两边同乘$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{1/r-1}(>0)$,得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^r\right)^{1/r}=\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^r\right)^{1/r}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{1/r}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{1/r}.$$

类似可证 $r<1$ 时的不等式.

例 13(加权平均值不等式) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 的正数,则有

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i.$$

当且仅当 x_i 都相等时,等号成立.

证 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,对 $x_1>0,x_2>0$ 及 $0<\alpha<1$,以 $t=\frac{x_1}{x_2}$ 代入例 11 之式 ②,得

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}-\alpha\frac{x_1}{x_2}+\alpha-1<0,$$

即
$$x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}\leqslant\alpha x_1+(1-\alpha)x_2.$$

故,当 $n=2$ 时,不等式成立.

设对 $n-1$,不等式成立.

设对 n 个正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,正数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 满足 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. 又令

$$t_i=x_i,\quad \beta_i=\alpha_i,\quad i=1,2,\cdots,n-2;$$

$$t_{n-1}=x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}}x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}},\quad \beta_{n-1}=\alpha_{n-1}+\alpha_n.$$

则
$$y_i>0,\beta_i>0\quad 且\quad \sum_{i=1}^{n-1}\beta_i=1.$$

故
$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}=\prod_{i=1}^{n-1}t_i^{\beta_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\beta_it_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_ix_i+(\alpha_{n-1}+\alpha_n)x_{n-1}^{\alpha_{n-1}/\beta_{n-1}}\cdot x_n^{\alpha_n/\beta_{n-1}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i.$$

即对 n,不等式也成立.所以,加权平均值不等式成立.

例 14 证明:若 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

当且仅当 x_i 均等于 1 时,等号成立.

证 用数学归纳法.对 $n=1$,命题自然成立.设对 $n-1$,命题成立.

对 n 的情形.设 $x_1x_2\cdots x_n=1$,且 x_i 不全相同.重新排列诸 x_i,使 $x_1>1,x_n<1$.记 $x_1x_n=y_1$,则由 $y_1x_2\cdots x_{n-1}=1$ 和归纳法假设知 $y_1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\geqslant n-1$.因此

$$\begin{aligned}&x_1+x_2+\cdots+x_n\\&=(y_1+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})+x_1+x_n-x_1x_n\\&\geqslant n+x_1+x_n-x_1x_n-1\\&=n+(x_n-1)(1-x_1)>n.\end{aligned}$$

可见,对 n 的情形,命题也成立.

例 15(契比雪夫不等式) 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\leqslant n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i.$$

当且仅当 a_i 都相等或 b_i 都相等时,等号成立.

证 因为

$$\begin{aligned}&n\sum_1^n a_ib_i-\sum_1^n a_i\sum_1^n b_j=\sum_1^n\sum_1^n(a_ib_i-a_ib_j)\\&=\sum_1^n\sum_1^n(a_jb_j-a_jb_i)=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_ib_i+a_jb_j-a_ib_j-a_jb_i)\\&=\frac{1}{2}\sum_1^n\sum_1^n(a_i-a_j)(b_i-b_j)\geqslant 0.\end{aligned}$$

第四节　数列极限与收敛数列的性质

主要内容

1. 从自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射 $x:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$，称为实数数列，可以记作

$$\{x_n\}: x_1, x_2, \cdots, x_n,$$

或称为整标函数 $f(n)$.

2. 对数列 $\{x_n\}$，若存在 $M\in\mathbf{R}$，使得 $\forall\ n\in\mathbf{N}, x_n\leqslant M$，则称数列 $\{x_n\}$ 有上界，M 是它的一个上界；若存在 $m\in\mathbf{R}$，使得 $\forall\ n\in\mathbf{N}$，$x_n\geqslant m$，则称数列 $\{x_n\}$ 有下界，m 是它的一个下界.

若数列 $\{x_n\}$ 有上界也有下界，则称数列 $\{x_n\}$ 有界.

3. 设 $\{x_n\}$ 是一个数列，a 是一个确定的数. 若 $\forall\ \varepsilon<0$，$\exists$ 自然数 N，使当 $n>N$ 时，都有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a. 称 a 为数列的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

4. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，且以零为极限，则称 $\{x_n\}$ 为无穷小数列.

数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是：$\{x_n-a\}$ 是无穷小数列.

5. 收敛数列有如下重要性质：

(1) 惟一性　若数列 $\{x_n\}$ 有极限，则极限值是惟一的.

(2) 有界性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 为有界数列.

(3) 保号性　若数列 $\{x_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$（或 $a<0$），则对任一满足不等式 $a>a'>0$（或 $0>a'>a$）的 a'，$\exists$ 自然数 N，使当 $n>N$ 时，$x_n>a'>0$（或 $x_n<a'<0$）.

(4) 不等式性　若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都收敛，且∃某自然数N_0，当$n > N_0$时，有$x_n \leqslant y_n$，则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(5) 迫敛性　设数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$收敛于同一极限a，若∃某自然数N_0，当$n > N_0$时，有$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$，则对数列$\{c_n\}$，有

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

6. 数列极限的四则运算法则　若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是收敛数列，且$\lim_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) 数列$\{x_n \pm y_n\}$也收敛，且$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

(2) 数列$\{x_n \cdot y_n\}$也收敛，且$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = ab$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

(3) 若$y_n \neq 0$，且$\lim y_n \neq 0$，则数列$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. 即

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

疑 难 解 析

1. 如何理解数列极限的ε-N定义？

答　数列极限的ε-N定义反映了数列$\{x_n\}$的数值x_n与数x_n的下标n之间的变化关系. 读者应理解以下几点：

(1) ε的任意性　ε是用来衡量x_n与常数a的接近程度的，若$\{x_n\}$以a为极限，则应该有$|x_n - a| \to 0$. 因此，ε是可以任意选定的无论多小的正数. 选定ε反映了我们对x_n与a接近程度的要求，当然，ε越小越好. 另一方面，要求一旦提出，是不可更改的，所以ε

又是取定的，可以根据 ε 求出相应的 N.

（2）N 的对应性　N 的大小由 ε 确定，故通常记作 $N(\varepsilon)$. N 反映了要使 $|x_n - a| < \varepsilon$ 时 n 的取值大小. 所以 N 有最小值，没有最大值，从而 N 可以有很多值. 在实际问题中，只要能证明 N 存在就行，不一定要求出 N，更不一定要求出最小的 N. 通常，由 $|x_n - a| < \varepsilon \Rightarrow n > N(\varepsilon)$，从而知 N 是对应于 ε 的，但不要认为是 ε 的函数.

（3）几何意义　定义中"当 $n > N$ 时，都有 $|x_n - a| < \varepsilon$"反映这样一个几何事实：在数轴上，凡下标 $n > N$ 的点 x_n，都落在点 a 的 ε 邻域内，而在此邻域外，至多有数列 $\{x_n\}$ 的 N（有限）个点（项）.

2. 证明数列极限时怎样确定 N？

答　此时只要证明 N 存在，而不要求求得的是最小 N，所以，只需将 $|x_n - a|$ 变形，通常用加强不等式"放大"，从 $|x_n - a|$ 中分离出 n，然后由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 确定 N.

例如，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$，其中 $a > 1$.

令 $a^{1/n} - 1 = \alpha$，则 $\alpha > 0$，依伯努利不等式，有

$$a = (1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha = 1 + n(a^{1/n} - 1),$$

即

$$a^{1/n} - 1 \leqslant \frac{a-1}{n}.$$

要 $|\sqrt[n]{a} - 1| = |a^{1/n} - 1| \leqslant \varepsilon$，只要 $\left|\frac{a-1}{n}\right| < \varepsilon$. 所以，有 $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{a-1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n > N$ 时，就有 $\left|\frac{a-1}{n}\right| < \varepsilon$，即

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon.$$

方法、技巧与典型例题分析

一、关于数列极限的概念

利用这部分例题加深对极限概念的理解，运用数列极限的

ε-N 定义来讨论问题、分析问题，并作出结论.

例 1　求数列 $\{x_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 的最大项.

解　利用 $\{x_n\}$ 的通项公式，对前后项的比进行分析. 因为

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}}{(n-1)^2} = \frac{n^2}{2(n-1)^2},$$

若 x_n 单调增加，则 $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1$，故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} > 1 \Rightarrow n^2 > 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 < 2,$$

即
$$(n-2)^2 < 2 \Rightarrow n \leqslant 3.$$

若 x_n 单调减少，则 $\frac{x_n}{x_{n-1}} < 1$，故有

$$\frac{n^2}{2(n-1)^2} < 1 \Rightarrow n^2 < 2(n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 4n + 4 > 2,$$

即
$$(n-2)^2 > 2 \Rightarrow n \geqslant 4.$$

综上可知，数列 $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 当 $n \leqslant 3$ 时单调增加，$n \geqslant 4$ 时单调减少，在 $n = 3$ 时取得最大值.

故最大项为 x_3，$x_3 = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$.

例 2　设 $x_n = \frac{\cos(n\pi/2)}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 又求出 N，使当 $n > N$ 时 x_n 与其极限之差的绝对值小于 $\varepsilon > 0$；当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时，求出相应的 N.

解　由于 $\cos(n\pi/2)$ 是有限数，而 $n \to \infty$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证明如下：

因为 $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right| \leqslant \frac{1}{n}$，所以 $\forall\ \varepsilon > 0$，要使 $\frac{1}{n} < \varepsilon$，只需 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 故 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时，$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] = 10^3$. 即 $\forall\ \varepsilon = 10^{-3}$，当 $n > 10^3$ 时，

就有 $|x_n - 0| < 10^{-3}$.

例 3 证明:若数列$\{x_n\}$收敛,则它的任何子数列$\{x_{n_k}\}$ $(k = 1,2,\cdots)$也收敛,且有同一极限.

证 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则依极限定义,$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ N$,当$n > N$时,就有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 因为$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的子数列,所以 $n_k > k$. 故当 $k > N$ 时,必有 $n_k > k > N$,也有 $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

例 4 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n} = 0$.

证 由二项式展开定理,有

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n}{2!}(n-1) + \frac{n}{3!}(n-1)(n-2) + \frac{n}{4!}(n-1)(n-2)(n-3) + \cdots + 1.$$

根据极限式分子中 n 的次数,适当放大 $|x_n - 0|$,证得与 ε 相应的 N 存在. 即证明了极限.

因为要 $\left|\dfrac{n}{2^n} - 0\right| = \dfrac{n}{2^n} < \dfrac{n}{n(n-1)/2!} = \dfrac{2}{n-1} < \varepsilon$,只要 $N > 1 + \left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$.

类似地,使

$$\frac{n^2}{2^n} < \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)/3!} = \frac{6n}{(n-1)(n-2)} < \varepsilon,$$

$$\frac{n^3}{2^n} < \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)/4!} = \frac{24n^2}{(n-1)(n-2)(n-3)} < \varepsilon$$

的 N 均存在,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2^n} = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{2^n} = 0$.

这里,利用了不等式

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2!},\quad 2^n > \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

$$2^n > \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}.$$

利用不等式放大 $|x_n - a|$ 来证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，是证数列极限与函数极限的常用方法，读者应努力掌握，学会使用. 如

证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$，可利用 $n! = 1\cdot 2\cdots n \geqslant n\cdot 2^{n-2}$.

证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n} = 0\ (a > 1)$，可令 $a = 1 + h\ (h > 0)$，利用

$$a^n = (1+h)^n = 1 + c_n^1 h + \cdots + c_n^{k+1}h^{k+1} + \cdots + h^n > c_n^{k+1}h^{k+1}.$$

例 5 设对于数列$\{x_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = a$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1} = a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$.

证 由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = a$，知$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，使当$n > N_1$时，$|x_{2n} - a| < \varepsilon$；同样，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1} = a$，知$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，使当$n > N_2$时，$|x_{2n-1} - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，上述两不等式均成立，即 $|x_n - a| < \varepsilon$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a.$$

例 6 已知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$$

证 依极限定义 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，使当$n > N_1$时，有$|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是，当 $n > N_1$ 时，有

$$\left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - a\right| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n - na}{n}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_N - a|}{n}$$

$$+ \frac{|x_{N_1+1} - a| + |x_{N_1+2} - a| + \cdots + |x_n - a|}{n}$$

$$\leqslant \frac{|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots + |x_n - a|}{n} + \frac{n - N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}.$$

由于 $|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|=c$ 为一常数，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以，取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|$$

$$<\frac{c}{n}+\frac{n-N_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即证得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

类似可证：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=+\infty$；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在，且 $x_n>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

例 7(斯笃兹(O. Stolz) 定理)　证明：若存在：(1) $y_{n+1}>y_n$，(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=+\infty$，(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

证　(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$(有限数)，则 $\forall\ \varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $a-\varepsilon<\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\varepsilon$. 于是，得到一组不等式：

$$(y_{N+1}-y_N)(a-\varepsilon)<x_{N+1}-x_N<(y_{N+1}-y_N)(a+\varepsilon),$$
$$(y_{N+2}-y_{N+1})(a-\varepsilon)<x_{N+2}-x_{N+1}<(y_{N+2}-y_{N+1})(a+\varepsilon),$$
$$\cdots\cdots$$
$$(y_n-y_{n-1})(a-\varepsilon)<x_n-x_{n-1}<(y_n-y_{n-1})(a+\varepsilon).$$

将不等式组中各不等式对应部分相加，得

$$(y_n - y_N)(a-\varepsilon) < x_n - x_N < (y_n - y_N)(a+\varepsilon),$$

即 $$\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a-\varepsilon) < \frac{x_n}{y_n} - \frac{y_N}{y_n} < \left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a+\varepsilon).$$

对取定的 ε 及相应的 n，当 $n\to\infty$ 时，$y_n \to +\infty$，故

$$a-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} \leqslant a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$. 则 $\forall M \in \mathbf{R}$，当 $n > N$ 时，$\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} > M$. 故依题(1)，得一不等式组，经相同步骤后可得

$$\frac{x_n - x_N}{y_n - y_N} > M \Rightarrow x_n - x_N > M(y_n - y_N).$$

移项并除以 y_n，得

$$\frac{x_n}{y_n} > M\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right) + \frac{x_N}{y_n},$$

取 $n\to\infty$，则 $y_n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} \geqslant M$.

由 M 的任意性，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = +\infty = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

类似可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = -\infty$ 的情形.

例 8 讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0},$$

其中 $a_m \neq 0, b_k \neq 0$.

解 若 $m = k$，将分子、分母同除以 x^m，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m + a_{m-1}n^{-1} + \cdots + a_1 n^{1-m} + a_0 n^{-m}}{b_k + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-n} + b_0 n^{-m}},$$

分子、分母除第一项外,其它项的极限均为零.故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + \cdots + b_1 n + b_0} = \frac{a_m}{b_k}\left(\frac{a_m}{b_m}\right).$$

若 $m > k$,将分子、分母同除以 x^k,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1}n^{m-1-k} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1}n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}},$$

分子从第 $m-k+1$ 项后均为零,而前 $m-k$ 项极限是 ∞;分母极限为 b_k,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \infty;$$

若 $m < k$,将分子、分母同除以 x^k,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1}n^{n-1-k} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_1 n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}}.$$

所以,分子极限为零,分母极限为常数,故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = 0.$$

综上所述,可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases}\dfrac{a_m}{b_k}, & m = k,\\ \infty, & m > k,\\ 0, & m < k.\end{cases}$$

例 6、例 7 和例 8 是后面我们计算数列极限的常用方法和依据,请读者把它弄懂记熟.

二、数列极限的求解

到目前为止,我们已经掌握了一些计算数列极限的方法与结论.下面我们来实践和熟悉这些方法与结论.

1. 利用极限定义求极限

利用极限定义计算极限的关键是:将通项化为一常数与一含

n 的无穷小之和,从而得到 $|x_n - a| < \varepsilon$,并依此求得对应的 N.

例 9 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的极限.

解 令 $x_n = \sqrt[n]{n}$,因为当 $n > 1$ 时,$\sqrt[n]{n} > 1$,所以 $x_n = 1 + \alpha_n \quad (\alpha_n > 0)$,于是

$$n = (1+\alpha_n)^n \geqslant 1 + n\alpha_n + \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2 \geqslant \frac{n}{2}(n-1)\alpha_n^2,$$

即
$$0 \leqslant \alpha_n^2 \leqslant \frac{2}{n-1} \quad \Rightarrow 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

故
$$1 \leqslant x_n = 1 + \alpha_n \leqslant 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

显然$\{\alpha_n\}$收敛于零. 因为 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N = 1 + \frac{2}{\varepsilon^2}$,就有 $\left|\sqrt{\frac{2}{n-1}} - 0\right| < \varepsilon$. 所以,由迫敛性得 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

例 10 设 $a \in \mathbf{R}, |a| > 1$,求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n}$.

解 $n \geqslant 2$ 时,有

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{a^n}\right| &= \frac{n}{|a|^n} = \frac{n}{[1 + (|a|-1)]^n} \\ &< \frac{n}{n(n-1)(|a|-1)^2/2} \quad \text{(由二项展开式得)} \\ &= \frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}. \end{aligned}$$

要使
$$\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2} < \varepsilon,$$

只需
$$n > \frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2} + 1.$$

即若取 $N = \frac{2}{\varepsilon(|a|-1)^2} + 2$,则当 $n > N$ 时,就有

$$\left|\frac{n}{a^n}\right| < \frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2} < \varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$. 数列$\left\{\frac{n}{a^n}\right\}$,$|a| > 1, a \in \mathbf{R}$ 是无穷小序列.

2. 利用各种运算法则和技巧求极限

当数列的形式较复杂时，我们可以将其分解后利用四则运算法则计算数列极限. 同时，问题往往不是孤立的，一个数列极限的计算可能要使用几种方法. 所以读者在学习时要培养综合运用能力，不要将知识割裂得太碎.

例 11 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都发散，它们的和数列$\{x_n + y_n\}$是否一定发散？

解 不一定. 如数列$\left\{(-1)^n + \frac{c}{n}\right\}$与$\left\{(-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right\}$($c$ 为常数) 都是发散的，但其和数列

$$\left\{(-1)^n + \frac{c}{n} + \left((-1)^{n+1} + \frac{c}{n}\right)\right\} = \left\{\frac{2c}{n}\right\}$$

却是收敛数列.

例 12 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，是否一定有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$？

解 不一定. 如 $x_n = 1 + (-1)^n$，$y_n = 1 - (-1)^n$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n y_n &= \lim_{n\to\infty}\{[1 + (-1)^n][1 - (-1)^n]\} \\ &= \lim_{n\to\infty}[1 - (-1)^{2n}] = 0,\end{aligned}$$

但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 均不存在.

类似的命题很多，希望读者能认真辨析，并记住一些必要的例子（或学会构造一些例子）来说明问题.

例 13 求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3}$.

解 因为$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$，所以，利用例 8 的结果，得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

例 14 求$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a + \cdots + a^n)$ $(0 < a < 1)$.

解 利用等比数列和的公式，得

$$\lim_{n\to\infty}(1+a+\cdots+a^n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-a}-\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}}{1-a}=\frac{1}{1-a}.$$

例 15 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ $(|a|<1)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

解 (1) 因为

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$
$$=\frac{1-a^2}{1-a}\frac{1-a^4}{1-a^2}\cdots\frac{1+a^{2^{n+1}}}{1-a^{2^n}}=\frac{1+a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1}{1-a}.$$

(2) 因为

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(3) 因为

$$\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$
$$=\frac{1}{1+1/2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right),$$

令 $a=\frac{1}{2}$，利用题(1)的结果，得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/2} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{4}{3}.$$

例 16 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 (1) 因为

$$1+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1),$$

所以，如同例 13，有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) 设 $S_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$,

有 $4S_n=2^2+4^2+\cdots+(2n)^2$,

$S_{2n}=1^2+2^2+\cdots+(2n)^2$,

则 $S_{2n}-4S_n=1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$,

故
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}-4S_n}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[2n(2n+1)(4n+1)-4n(n+1)(2n+1)]\cdot\frac{1}{6}$$
$$=\frac{4}{3}.$$

(3) 设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

有 $2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,

则
$$S_n=2S_n-S_n$$
$$=1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3.$$

例 17 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

解 (1)
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{1-1/2^n}=2.$$

(2) 利用几何平均值小于算术平均值性质(第三节平均值不等式),得

$$2=\frac{1+3}{2}>\sqrt{1\cdot 3},\ 4>\frac{3+5}{2}>\sqrt{3\cdot 5}\cdots$$

$$2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}>\sqrt{(2n-1)(2n+1)},$$

$$0<x_n=\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$
$$<\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{\sqrt{1\cdot 3}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdots\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$,所以,依迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}=0.$$

例 18 求:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$.

解 (1) 分子、分母同除式中最大项 6^{n+1},得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n+6^n}{5^{n+1}+6^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-4/6)^n\cdot 1/6+1/6}{(5/6)^{n+1}+1}=\frac{1}{6}.$$

（2）因为分子、分母中n的最高幂次均为$\frac{1}{2}$，由例8的结论，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}=1.$$

（3）用有理化方法，得

$$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}.$$

因为$\left|\cos\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right|<1$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\xlongequal{\text{有理化}}\lim\frac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}=\sin 0=0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})=0.$$

三、数列极限的证明

用迫敛性求数列$\{x_n\}$的极限，关键是找出两个有相同极限的数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，使$\{a_n\}\leqslant\{x_n\}\leqslant\{b_n\}$. 一般$\{a_n\}$可利用$\{x_n\}$的下界确定，取为常数$a$，而$\{b_n\}$通过加强$x_n$得到$b_n$，再证明$\{b_n\}\to a$.

例 19 设$a>0,b>0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$$

证 因为

$$\sqrt[n]{[\max(a,b)]^n}\leqslant\sqrt[n]{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{2[\max(a,b)]^n},$$

得 $$\max(a,b)\leqslant\sqrt{a^n+b^n}\leqslant\sqrt[n]{2}\max(a,b).$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，则依迫敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b).$$

例 20 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 因为

$$n! = 1\cdot 2\cdots\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\cdots n$$

$$=\begin{cases}\frac{n}{2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{n}{2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\geqslant\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

所以有$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\sqrt{\frac{2}{n}}$,由$\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0$,依迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$$

例 21 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$.

证 用放大法,得

$$\frac{n\cdot 1}{n}\leqslant\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\leqslant\frac{n\sqrt[n]{n}}{n},$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$(见例 9). 依迫敛性,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1.$$

此题也可由例 6 结论直接写出. 类似可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)=0.$$

例 22 设$\{x_n\}$是正实数数列,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a>0$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$$

证 由平均值不等式,有

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n),$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right),$$

所以

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n).$$

因为$\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = 1\Big/\left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\right] \to a,$

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \to a \quad (\text{均依例 6 结论}),$$

依迫敛性，得 $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = a.$$

例 23 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a \ (a > 0)$.

证 （1）设 $a > 1$，令 $x_n = a^{1/n} - 1$，则 $x_n > 0$，且 $\dfrac{\ln a}{n} = \ln(1 + x_n)$. 于是，有

$$n(a^{1/n} - 1) = \frac{\ln a}{\ln(1 + x_n)} \cdot x_n.$$

因为 $x_n \to 0$，依极限定义，当 $n > N$ 时，$0 < x_n < 1$. 所以对每一确定的 n，$\exists$ 相应的 k_n，使

$$\frac{1}{k_n + 1} < x_n < \frac{1}{k_n} \quad (k_n \to \infty).$$

利用不等式 $$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$\left(\text{由 } 1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} \text{ 和 } \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ 两端取对数可证}\right)$，故

$$\frac{1}{k_n + 2} < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \leqslant \ln(1 + x_n) < \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}.$$

逐项相除得

$$1-\frac{1}{k_n+1}=\frac{k_n}{k_n+1}<\frac{x_n}{\ln(1+x_n)}<\frac{k_n+2}{k_n}=1+\frac{2}{k_n}.$$

由 $k_n\to\infty$,依迫敛性,得

$$\lim_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)=\ln a.$$

(2) 设 $0<a<1$,则$\frac{1}{a}>1$,依题(1) 得

$$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}-1\right]=\ln\frac{1}{a}.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}n\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}\cdot n\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^{-1/n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}-\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n}n(a^{1/n}-1)$$

$$=-\lim_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)\ \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\right).$$

又 $$\ln\frac{1}{a}=-\ln a.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)=\ln a$ 也成立.

(3) $a=1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}n(a^{1/n}-1)$ 显然成立.

四、应用斯笃兹定理求数列极限

斯笃兹定理的证明见例 7. 斯笃兹定理实质上是已知数列 $\{x_n\}$ 与正无穷大数列 $\{y_n\}$ 的各自相邻两项增长率之比的极限,来求 $\frac{x_n}{y_n}$ 的极限. 因此利用斯笃兹定理求极限的关键是,将所给数列化为符合定理条件的$\frac{x_n}{y_n}$ 形式,再求出$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

例 24 证明:若 p 为自然数,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)p}{n^{p+1}}=\dfrac{2p}{p+1}$.

证 (1) 令 $x_n=1^p+2^p+\cdots+n^p$,$y_n=n^{p+1}\to\infty$,故

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}}=\frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p+\cdots}$$
$$=\frac{(1+1/n)^p}{p+1+o(1/n)}\to\frac{1}{p+1}.$$

依斯笃兹定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}.$$

题(2)、题(3) 可用类似方法证明，请读者一试.

例 25 设 $a_1>0,a_{n+1}=a_n+1/a_n,n=1,2,\cdots$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$$

证 设 $x_n=a_n^2$，$y_n=2n\to+\infty$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$. 对 x_n,y_n 应用斯笃兹定理，得

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2(n+1)-2n}=\frac{1}{2}(a_{n+1}^2-a_n^2)$$
$$=\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{a_n^2}+2-a_n^2\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{a_n^2}\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$（事实上，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 为有限数，则依 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ 有 $a=a+\frac{1}{a}$，而这是不可能的），所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=1,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1.$$

例 26 设 α 为任意实数，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}.$$

解 将原式分解，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n(1^\alpha+2^\alpha+\cdots+n^\alpha)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1^{\alpha+1}+2^{\alpha+1}+\cdots+n^{\alpha+1}}{n^{\alpha+2}}\Big/\frac{1^{\alpha}+2^{\alpha}+\cdots+n^{\alpha}}{n^{\alpha+1}}\right],$$

利用例 24(1) 的结论(由斯笃兹定理证得)即得

$$原式 = \frac{1}{\alpha+2}\Big/\frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}.$$

例 27 设 $S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(c_n^k)/n^2$，求 $\lim_{n\to\infty} S_n$.

解 因为 $n^2 \to +\infty$，应用斯笃兹公式，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n+1}\ln(c_{n+1}^k) - \sum_{k=0}^{n}\ln(c_n^k)}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln(c_{n+1}^k/c_n^k) + \ln(c_{n+1}^{n+1})}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{n+1}{n-k+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n+1}\ln k}{2n+1}.$$

再次应用斯笃兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n - \ln(n+1)}{(2n+1)-(2n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)^n}{2} = \frac{1}{2}.$$

例 28 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{1/2^{n-1}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{1/2^{n-2}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{1/2}$.

解 设 $x_n = \left(\frac{2}{2^2-1}\right)^{1/2^{n-1}}\left(\frac{2^2}{2^3-1}\right)^{1/2^{n-2}}\cdots\left(\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{1/2}$，则

$$\ln x_n = \frac{1}{2^{n-1}}\ln\frac{2}{2^2-1} + \frac{1}{2^{n-2}}\ln\frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{2^2-1} + 2\ln\frac{2^2}{2^3-1} + \cdots + 2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right),$$

因为 $2^{n-1}\to+\infty$，应用斯笃兹定理，得

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-1/2^{n-1}} = \ln\frac{1}{2},$$

所以 $$原式 = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}.$$

五、用其它方法求数列极限

求证数列极限的方法还很多，下面再举出几个例子，请读者体会这些方法.

例 29 若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

解 本题可用变量代换方法求解. 因为

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 是无穷小数列（见本节主要内容 4），故

$$\begin{aligned}
原式 &= \frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n} \\
&= ab + b\frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{n} + a\frac{\beta_1 + \cdots + \beta_n}{n} \\
&\quad + \frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}.
\end{aligned}$$

因为$\{\beta_n\} \to 0$，$\{\alpha_n\} \to 0$，所以$\{\beta_n\}$是有界数列，即 $|\beta_n| \leqslant M$，所以

$$\left|\frac{\alpha_1\beta_n + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|}{n}.$$

依例 6 的结论，原式中二、三、四项均趋近于零，故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{xy_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n} = ab.$$

例 30 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，求$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2}$.

解 令 $x_n = a + \beta_n$，则$\{\beta_n\} \to 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n^2} \\
&= \frac{(a + \beta_1) + 2(a + \beta_2) + \cdots + n(a + \beta_n)}{n^2} \\
&= \frac{n+1}{2n}a + \left(\frac{1}{n}\beta_1 + \frac{2}{n}\beta_2 + \cdots + \frac{n}{n}\beta_n\right)\Big/ n.
\end{aligned}$$

而

$$\left|\left(\frac{1}{n}\beta_1+\frac{2}{n}\beta_2+\cdots+\frac{n}{n}\beta_n\right)\Big/n\right|\leqslant\frac{|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots+|\beta_n|}{n}.$$

依例 6 的结论，$\left(\frac{1}{n}\beta_1+\frac{2}{n}\beta_2+\cdots+\frac{n}{n}\beta_n\right)\Big/n\to 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}a=\frac{a}{2}.$$

例 31 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解 利用自然数求和公式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}\\
&=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+n}\\
&=1+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}\\
&=1+2\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]\\
&=2-\frac{2}{n+1},
\end{aligned}$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2.$$

例 32 证明：数列$\{\sin n\}$不存在极限.

证 用反证法. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=\lim_{n\to\infty}2\sin 1\cos(n+1)=0,$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=\lim_{n\to\infty}2\sin n\cos n=0,$$

即
$$a=\lim_{n\to\infty}\sin n=\lim_{n\to\infty}\sin 2n=0,$$

从而
$$1=\lim_{n\to\infty}(\sin^2 n+\cos^2 n)=0.$$

而这是不可能的. 所以数列$\{\sin n\}$不存在极限.

其它方法还有很多，不再一一列举.

第五节　数列极限存在的条件

主要内容

1. 若数列各项满足关系式

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (\text{或 } a_n \geqslant a_{n+1}), \quad n = 1,2,\cdots,$$

则称数列$\{a_n\}$为递增(或递减)数列,统称单调数列.

2. 单调递增数列收敛的充分必要条件是它有上界,单递递减数列收敛的充分必要条件是它有下界.即,单调有界数列必有极限.

3. 柯西收敛定理　数列$\{a_n\}$收敛的充分必要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在$N \in \mathbf{N}$,使当$n,m > N$时,都有$|a_m - a_n| < \varepsilon$.

4. 维尔斯特拉斯(Weierstrass)聚点定理　直线上的有界无限点集S至少有一个聚点.

波尔察诺-维尔斯特拉斯致密性定理　有界数列$\{a_n\}$,必有收敛子列.

5. 如果一列闭区间$\{[a_n,b_n]\}$满足条件:

(1) $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n], \quad n = 1,2,\cdots,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$

则称这列闭区间形成一个闭区间套.

如果$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套,则存在惟一的实数ξ属于所有闭区间$[a_n,b_n]$,且$\xi = \lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n$.称此结论为闭区间套定理.

又若$\{a_n\}$收敛于a,则其任何子数列$\{a_{n_k}\}$都收敛于同一极限a.

常用结果　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$

6. 有限覆盖定理　设S为直线上的一个点集,若S中任何一

点都含在开区间集 H 中至少一个开区间中，则称 H 为 S 的一个开覆盖.

海涅-波莱尔(Heine-Borel)有限覆盖定理　设$[a,b]$是一个闭区间，H 为$[a,b]$的一个开覆盖，则在 H 必存在有限个开区间，它构成$[a,b]$上的一个开覆盖.

疑难解析

1. 为什么单调有界是数列收敛的充分条件？

答　单调有界是数列收敛的充分条件. 因为一个数列$\{a_n\}$若满足以下两个条件：(1) 有界，(2) 单调，则$\{a_n\}$必收敛；但若只满足其中一个条件，则$\{a_n\}$不一定收敛. 如

$a_n = (-1)^n$，有界但不单调，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

$a_n = 2n$，单调但无界，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

但，若$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$必有界，却不一定单调. 如 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛于零，有界但不单调.

从几何角度看，在数轴上对应单调数列的点 a_n 只能向一个方向移动. 如果加上有界这个条件，则数列的全部点都落在数轴上某区间$[-M,M]$内，且无限趋向于某一定点 A，也就是数列$\{a_n\}$趋于一个极限，且这极限的绝对值不会超过 A.

2. 怎样理解柯西收敛定理？

答　柯西收敛定理的条件反映了这样一个事实：收敛数列的各项愈到后面，愈是互相接近，因此它们之间差的绝对值可以小于任何预先给定的正数. 从几何角度看，数列的项越到后面越是挤在一起，因此它们之间的距离趋向于零. 因而可以确定数列收敛于某一极限值 A.

3. 怎样应用有限覆盖定理证明命题？

答　有限覆盖定理与其它描述实数系连续性定理的不同在

于：有限覆盖定理着眼于区间的整体，而闭区间套定理、确界定理等着眼于一点的局部．有限覆盖定理的作用是从覆盖某闭区间 $[a,b]$ 的无限个开区间中选出有限个也能覆盖闭区间 $[a,b]$ 的开区间，化"无限"为"有限"．通过这种方法，将闭区间 $[a,b]$ 上每点所具有的局部性质转化为整个闭区间上的整体性质．因此当要证明闭区间上的整体性质时，可考虑使用有限覆盖定理；要证明闭区间上某一点的局部性质时，可考虑使用闭区间套定理、致密性定理、确界定理等．它们之间又可以相互证明．

应用有限覆盖定理证明命题的基本步骤是：由所要证明的整体性质A，在闭区间 $[a,b]$ 上每一点找性质 A^*．然后构造一个开区间集 $\bigcup a_i$，使 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}a_i$，且在每个开区间 a_i 上性质 A^* 都成立．于是由有限覆盖定理知，存在有限个开区间 $\bigcup_{i=1}^{n}a_i$，使 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{n}a_i$，再证明在区间 $[a,b]$ 上性质 A 成立（见例 17、例 18）．

方法、技巧与典型例题分析

用单调有界来确定极限存在并不要求求出极限，一般只是证明极限的存在．这里的技巧在于确定单调性的技巧，可以由 $x_{n+1}-x_n$ 或者 $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 来确定，读者要通过多看例题来掌握．判别有界则比较简单，一般可以通过加强不等式得到．

例 1 设 $a>0,x_0>0,x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),n=1,2,\cdots$．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$．

证 由 $\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2\geqslant 0\Rightarrow t+\frac{1}{t}\geqslant 2\ (t>0)$，知

$$x_n=\frac{\sqrt{a}}{2}\left[\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right]\geqslant\sqrt{a},\quad n\in\mathbf{N}.$$

得 $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant 1 \quad \Rightarrow x_{n+1}\leqslant x_n.$$

故数列$\{x_n\}$单调递减且有下界，极限存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则

$$A\geqslant\sqrt{a}>0.$$

且 $$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)\Rightarrow A^2=a\Rightarrow A=\sqrt{a}.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

例 2 设$\alpha>0$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$.

解 设$x_n=\frac{\alpha^n}{n!}$，则$x_n>0,n\in\mathbf{N}$. 当n充分大时，有

$$\frac{\alpha}{n+1}<1.$$

于是 $$x_n=\frac{\alpha^n}{n!}>\frac{\alpha^n}{n!}\cdot\frac{\alpha}{n+1}=x_{n+1},\quad n\in\mathbf{N}.$$

所以$\{x_n\}$有极限. 记$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由

$$x_{n+1}=\frac{\alpha}{n+1}\cdot\frac{\alpha^n}{n!}=\frac{\alpha}{n+1}x_n\Rightarrow A=0\cdot A=0,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0.$$

例 3 利用单调有界性求极限.

(1) 设$a>0,x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[2]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}\right)$.

解 (1) x_n单调增加是显然的，现证明x_n有界. 用归纳法证明$x_n<a$.

对$x_1=\sqrt{a},x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}<\sqrt{a}+1$是显然的.

设$x_n<\sqrt{a}+1$，则

$$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}\leqslant\sqrt{a+\sqrt{a}+1}<\sqrt{a}+1,$$

故数列$\{x_n\}$单调有界必有极限. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,由

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} \Rightarrow A = \sqrt{a + A}.$$

解 $A^2 - A - a = 0$ 得

$$A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

(2) 令 $x_n = \sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$, $n = 1,2,\cdots$,则

$$1 < x_n < x_{n+1}, x_n < 2.$$

所以$\{x_n\}$是单调有界数列,必有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,由 $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$,得

$$A = \sqrt{2A} \Rightarrow A = 2 \quad (\text{显然 } A \neq 0),$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} = 2.$$

例 4 利用单调有界性证明:

(1) 若 $0 < x_1 < 1$,且 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, $n = 1,2,\cdots$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n = 1$.

(2) 设 $x_1 = a \geqslant 0$, $y_1 = b \geqslant 0$,且 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$, $n = 1,2,\cdots$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

证 (1) 因为

$$x_{n+1} - x_n = x_n(1 - x_n) - x_n = -x_n^2 < 0,$$

所以$\{x_n\}$单调减少. 又由$0 < x_1 < 1$,由归纳法可证$0 < x_n < 1$,从而$\{x_n\}$有下界.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A$,在 $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ 两边取极限,得

$$A = A(1 - A) \Rightarrow A = 0.$$

即 $$\lim_{n\to\infty}x_n = A.$$

(2) $x_n \geqslant 0, y_n \geqslant 0$ 是显然的. 由

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1},$$

得

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geqslant \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leqslant \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

知 $\{x_n\}$ 单调增加, $\{y_n\}$ 单调减少,又

$$x_n \leqslant y_n \leqslant y_1, \quad y_n \geqslant x_n \geqslant x_1,$$

所以 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 存在.

对 $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ 两边取极限,得

$$B = \frac{1}{2}(A + B) \Rightarrow A = B.$$

由以上例题得知:

证明数列有界常用下列方法:(1) 观察法. 从已知条件与通项公式得出;(2) 数学归纳法;(3) 利用已知命题与公式判断,如 $|\sin n| \leqslant 1, a^2 + b^2 \geqslant 2|a||b|$ 等等.

证明数列单调常用下列方法:(1) 观察法,考察通项公式或项的结构;(2) 数学归纳法;(3) 判断 $x_{n+1} - x_n$ 的符号;(4) 考察 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 与 1 的关系.

例 5 证明: 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 单调增加, 数列 $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减少,两者收敛于同一极限.

证 记 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n, y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,由平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

知

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1 \leqslant \left[\frac{n(1 + 1/n) + 1}{n + 1}\right]^{n+1} = x_{n+1},$$

$$\frac{1}{y_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\leqslant\left[\frac{(n+1)\cdot n/(n+1)+1}{n+2}\right]^{n+2}=\frac{1}{y_{n+1}},$$

即 $\{x_n\}$ 单调增加，$\{y_n\}$ 单调减少，且

$$1=x_1<x_n<y_n<y_1=4.$$

所以 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 单调有界，必定收敛. 由 $y_n=x_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$，知它们有相同的极限. 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

例 6 证明：若 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 由上例知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$，两边取对数得，

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

即有不等式 $$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

则 $$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

$$>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n$$

$$=\ln(n+1)-\ln n>0.$$

即 $\{b_n\}$ 单调减少有下界，所以 $\{b_n\}$ 收敛.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=r\approx 0.57721566490\cdots$$

称为欧拉(Euler)数.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

解 将通项表示成欧拉数形式，有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

两边取极限，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\lim_{n\to\infty}(b_{2n}+\ln 2n-b_n-\ln n)=\ln 2.$$

例 8 利用欧拉数证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$.

证 (1) 记 $d_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$. 又

$$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}-\ln n,$$

$$b_{2n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-\ln 2n,$$

将 b_n 的第 $2k$ 项减去 b_n 的第 k 项，得

$$\begin{aligned}b_{2n}-b_n&=1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right)-\ln 2n+\ln n\\&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-\ln 2\\&=d_n-\ln 2.\end{aligned}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}(\ln 2+b_{2n}-b_n)=\ln 2,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2.$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}(b_n+\ln n)=1\ (\lim_{n\to\infty}b_n=r).$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

解 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 的形式性求解. 因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 是底为 1 加无穷小 $\frac{1}{n}$、指数为同一无穷小的倒数，所以将所求极限写成这一形式，即可直接写出极限.

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n\cdot\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{1/2}.$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\mathrm{e}^{0}=1.$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{n}=+\infty.$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}=\mathrm{e}.$$

例 10 设 $a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证 因为 $\forall\, n,p\in\mathbf{N}$，

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

所以，$\forall\,\varepsilon>0$，当 $n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 及 $p\in\mathbf{N}$，恒有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$. 依柯西收敛原理，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 11 设 $x_n=a_0+a_1q+\cdots+a_nq^n$，$|a_k|<M$，$k=0,1,2,\cdots$，且 $|q|<1$，问 $\{x_n\}$ 是否收敛.

解 设 p 为正整数.

$$|x_{n+p}-x_n| = |a_{n+1}q^{n+1}+\cdots+a_{n+p}q^{n+p}$$
$$< M(|q|^{n+1}+\cdots+|q|^{n+p})$$
$$< M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} = M_1|q|^{n+1},$$

故当 $n > N$ 时有 $|q|^{n+1} < \frac{q}{M_1}$. 故当 $n > N$ 时,对任意正整数 p,有 $|x_{n+p}-x_n| < \varepsilon$. 依柯西收敛原理,$\{x_n\}$ 收敛.

例 12 设 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,证明$\{x_n\}$ 发散.

证 设 $\varepsilon = \frac{1}{2}$,取 $p = n$,则

$$|x_{n+p}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

所以,$\{x_n\}$ 不满足柯西收敛定理条件,故数列$\{x_n\}$ 发散.

例 13 设 $x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$ $(n \geqslant 3)$. 利用区间套定理证明$\{x_n\}$ 收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证 因为

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2}),\ n = 3,4,\cdots,$$

求积得

$$\prod_{i=3}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \prod_{i=3}^{n}\left[-\frac{1}{2}(x_{i-1}-x_{i-2})\right] = \prod_{i=2}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)(x_i - x_{i-1}),$$

化简得

$$x_n - x_{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(x_2 - x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}(b-a),$$

求和得 $$x_n - x_1 = (b-a)\frac{1-(-1/2)^{n-1}}{1-(-1/2)},$$

即 $$x_n = \frac{2}{3}(b-a)[1-(-1/2)^{n-1}]+a.$$

故 $$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}(a+2b).$$

例 14　证明:(1) $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$发散;

(2) 给定 x_0, 设 $x_1=\cos x_0$, $x_2=\cos(\cos x_0)$, …, $x_n=\underbrace{\cos\cos\cdots(\cos}_{n个} x_0)$, 则$\{x_n\}$收敛.

证　(1) 若取 $n_k=4k, n_k'=8k+2$, 则$\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$的子列$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n_k\right)\right\}$收敛于零,子列$\left\{\sin\left(\frac{\pi}{4}n_k'\right)\right\}$收敛于 1. 由于$\{x_n\}$的两个子列分别收敛于不同的极限,故$\{x_n\}$发散.

(2) 不妨设 $0<x_1<1$,则 $0\leqslant x_n\leqslant 1$. 由于 $\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内递减,所以 x_n 不是单调数列,故分别讨论单调奇子列$\{x_{2n-1}\}$与单调偶子列$\{x_{2n}\}$.

若 $x_1\leqslant x_3$,则

$$x_4-x_2=\cos x_3-\cos x_1$$
$$=-2\sin\frac{x_3-x_1}{2}\sin\frac{x_3+x_1}{2}\leqslant 0.$$

从而 $x_4\leqslant x_2$. 又

$$x_5-x_3=\cos x_4-\cos x_2$$
$$=-2\sin\frac{x_4-x_2}{2}\sin\frac{x_4+x_2}{2}\geqslant 0,$$

故 $x_5\geqslant x_2$. 依次递推,知$\{x_{2n-1}\}$单调递增,$\{x_{2n}\}$单调递减.

若 $x_1\geqslant x_3$,可证得相同结论.

故$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$都是单调有界数列,因而都有极限. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=\beta$,则

$$\begin{cases}\cos\alpha=\beta,\\ \cos\beta=\alpha,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\cos(\cos\alpha),\\ \beta=\cos(\cos\beta).\end{cases}$$

由 $x-\cos(\cos x)$ 零点的惟一性 $\Rightarrow\alpha=\beta$.

所以,$\{x_{2n}\}$与$\{x_{2n-1}\}$收敛于同一极限. 即$\{x_n\}$收敛.

例 15　求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n}$；　　　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3}$.

解　同例 9，利用$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ 的形式性.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot 3n/(n+2)} = \mathrm{e}^{-3}$.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3-2}\right)^{4n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3-2}\right)^{(n^3-2)\cdot 4n^3/(n^3-2)} = \mathrm{e}^4$.

例 16　设有一对小兔经两个月后成年，从第三个月开始每月产一对小兔，新出生的小兔也在出生两个月后成年，每月产一对小兔. 假设出生的小兔均无死亡，求：

(1) 一年后有几对兔子？　　(2) n 个月后有多少对兔子？

(3) 若 n 个月后有 F_n 对兔子，计算$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}$.

解　若按题示规律递推可得

月 份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
对 数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	…

将上表表示为数列$\{F_n\}$ (n 为月数)，则

$$\{F_n\}:1,1,2,3,5,8,13,\cdots.$$

数列$\{F_n\}$ 称为斐波那契(Fibonacci) 数列.

由数列观察到：$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geqslant 2$.

现要求通项 F_n 的表达式. 构造特征方程

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

解得一对特征根

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad x_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),$$

则
$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

将 $n = 1,2$ 代入，可确定

$$\begin{cases} F_1 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ F_2 = c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

所以 $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

再用数学归纳法证明 F_n 的正确性.

$n=1$ 时，$F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] = 1$ 显然正确.

设 $n=k$ 时，F_k 成立，则 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned} F_{k+1} = F_k + F_{k-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right] \end{aligned}$$

所以 $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

成立. 由此可知

(1) $n = 13, F_n = 233$(对)；

(2) n 个月后，有

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \text{(对)；}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_n}{F_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

例 17 用有限覆盖定理证明闭区间套定理.

证 用反证法. 设闭区间套定理不成立, 即闭区间$[a_1,b_1]$上任一点x都不属于闭区间$[a_k,b_k]$, 则必存在点x的邻域$U(x,\delta_x)$, 使$U(x,\delta_x)\cap[a_k,b_k]=\varnothing$. 但$[a_1,b_1]\subset\bigcup\limits_{x\in(a,b)}U(x,\delta_x)$. 依有限覆盖定理, 有

$$[a_1,b_1]\subset\bigcup_{k=1}^{n}U(x,\delta_x),$$

其中$U(x,\delta_{x_k})\cap[a_{i_k},b_{i_k}]=\varnothing, k=1,2,\cdots,n; i_k\in\mathbf{N}$, 且$i_k\geqslant 2$.

设$\max\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}=j$, 则由闭区间套的条件(1), 有

$$\bigcap_{k=1}^{n}[a_{i_k},b_{i_k}]=[a_j,b_j].$$

于是 $\qquad\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$,

有 $\qquad U(x_k,\delta_{x_k})\cap(a_j,b_j)=\varnothing$,

即 $\qquad\bigcup\limits_{i=1}^{n}U(x_k,\delta_{x_k})\cap[a_j,b_j]=\varnothing$.

这样, 一方面有$[a_1,b_1]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}U[x_k,\delta_{x_k}]$, 另一方面, $\bigcup\limits_{k=1}^{n}U(x_k,\delta_{x_k})$又不包含$[a_j,b_j]\subset[a_1,b_1]$, 从而引出矛盾. 故假设不成立.

惟一性证明只用到闭区间套的条件(2), 而其它证法相同, 不再写出.

例 18 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上连续函数列, 在$[a,b]$上收敛于连续函数$f(x)$. 若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上单调减少, 证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证 $\forall\varepsilon>0$, 对任$x_0\in[a,b]$, $\exists N_0$, 使

$$|f_{N_0}(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

又由$f_{N_0}(x)$及$f(x)$的连续性, 有

$$\lim_{x\to x_0}|f_{N_0}(x)-f(x)|=|f_{N_0}(x_0)-f(x_0)|.$$

从而对所给ε, $\exists\delta_{x_0}>0$, 使当

$$x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a,b]$$

时，有
$$|f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

由于$\{f_n(x)\}$单调递减，故当$n > N_0$时，有
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_{N_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

在$(x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap [a,b]$上成立.

因为
$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}),$$

故由有限覆盖定理，有
$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (x_k - \delta_{x_k}, x_k + \delta_{x_k}).$$

设
$$\max\{N_1, N_2, \cdots, N_m\} = e,$$

于是，当$n > l$时，对任意的$x \in [a,b]$，有
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

成立. 所以，函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于连续函数$f(x)$.

第六节　数列的上、下极限

主要内容

1. 上、下极限的聚点定义　有界数列$\{a_n\}$的上、下极限定义为$\{a_n\}$的最大(小)聚点，记作
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= A), \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n (= a).$$

2. 上、下极限的ε-N定义　$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0$，当$n > N$时，总有$a_n < A + \varepsilon$；又$\exists$ 子列$\{a_{n_k}\}$，使$a_{n_k} > A - \varepsilon\ (k \in \mathbf{N})$，则有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n (= A)$.

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0$，当$n > N$时，总有$a_n > a - \varepsilon$；又$\exists$ 子列$\{a_{n_k}\}$，使$a_{n_k} < a + \varepsilon\ (k \in \mathbf{N})$，则有$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n (= a)$.

3. 上、下极限的确界定义

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geqslant n} a_k = \inf_{n} \sup_{k\geqslant n} a_k \quad (= A),$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geqslant n} a_k = \sup_{n} \inf_{k\geqslant n} a_k \quad (= a).$$

4. 上、下极限的基本性质

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 的充分必要条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \quad (a \text{ 为有限数或 } \pm\infty).$$

(3) 对 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$，有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

(4) 上、下极限有保不等式性　$\forall\, n \geqslant n_0$，若 $a_n \leqslant b_n$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

(5)
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n),$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

方法、技巧与典型例题分析

上、下极限的概念比普通的极限概念要更复杂，关于上、下极限命题的证明也比普通极限的命题复杂和困难，所以我们只讨论数列有界的情况. 读者要注意逻辑的正确性与思维的严密性，若遇到不等式的情形更应如此.

例 1　证明：

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$;

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n + b_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n$.

证　先证 $\underline{\lim_{n\to\infty}} (-a_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

设 $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$，则依上极限定义，$\forall\, \varepsilon > 0$，数列 $\{a_n\}$ 中至多只有

N 项大于 $a+\varepsilon$,而有无穷项小于 $a-\varepsilon$;即对$\{-a_n\}$,至多有 N 项小于 $-a-\varepsilon$,而有无穷项大于 $-a+\varepsilon$,所以依下极限定义,有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(-a_n)=-a,\quad \text{即}\quad \underline{\lim}_{n\to\infty}(-a_n)=-\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n).$$

(1) 设$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=a$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}y_n=b$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)=c$.

用反证法. 设 $c<a+b$. 依下极限定义,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,当 $n>N$ 时,有 $a_n+b_n<c+\varepsilon$. 不妨设 $\varepsilon=\frac{1}{2}(a+b-c)$,则

当 $n<N$ 时,$a_n+b_n<c+\varepsilon<a+b-\varepsilon$.

又有$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n=a$,$\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n=b$,依下极限定义,则

当 $n<N_1$ 时,$a_n<a-\frac{\varepsilon}{2}$;当 $n<N_2$ 时,$b_n<b-\frac{\varepsilon}{2}$.

由此推出矛盾. 故 $a+b\leqslant c$,即

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n+\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n).$$

又令 $d_n=a_n+b_n$,则 $a_n=d_n+(-a_n)$. 于是

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}d_n+\underline{\lim}_{n\to\infty}(-b_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n,$$

由于 $$\underline{\lim}_{n\to\infty}(-b_n)=-\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n,$$

所以 $$\underline{\lim}_{n\to\infty}d_n=\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n.$$

(2) 以 $-b_n$ 及 $-a_n$ 分别代替题(1) 中的 a_n 与 b_n,有

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(-b_n)+\underline{\lim}_{n\to\infty}(-a_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}-(a_n+b_n)\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}-b_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n.$$

由$\underline{\lim}_{n\to\infty}(-a_n)=-\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$,得

$$-\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n-\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n\leqslant-\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant-\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n-\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n,$$

即 $$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n+\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n.$$

当$\{a_n\}$:0,1,2,0,1,2,…;$\{b_n\}$:2,3,1,2,3,1,… 时,题(1)、题(2) 中仅不等号成立. 读者可自己举出类似例子.

例 2 设 $a_n\geqslant 0$,$b_n\geqslant 0$,$n=1,2,\cdots$,证明:

(1) $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\cdot\underline{\lim}_{n\to\infty}b_n\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_nb_n\leqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\cdot\overline{\lim}_{n\to\infty}b_n$

(2) $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$

证 (1) 先证右边不等式. 依定义, $\{a_n\}$ 存在子列 $\{a_{n_j}\}$, 使 $a_{n_k} \to a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$; 而对 $\{b_{n_k}\}$ 也存在子列 $\{b_{n_{ki}}\}$, 使 $b_{n_{ki}} \to b = \overline{\lim} b_{n_{ki}} \geqslant 0$.

由 $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_{n_k} \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n, a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} \to ab$, 知 ab 是数列 $\{a_n b_n\}$ 的一个聚点, 故 $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) \leqslant ab$.

由于 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$, 所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) \leqslant ab \leqslant a\,\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

再证左边不等式. 当 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 0$ 时, 不等式显然成立. 设 $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = b_0$, 依定义, $\exists\, N > 0$, 当 $n > N$ 时, $a_n > 0$. 又, 依定义, $\{a_n b_n\}\exists$ 子数列 $\{a_{n_k} b_{n_k}\}$, 使 $a_{n_k} b_{n_k} \to a' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n b_n$; $\{a_n\}\exists$ 子数列 $\{a_{n_{ki}}\}$, 使 $a_{n_{ki}} \to b' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_{n_k}$.

因为 $b' = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_{n_k} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = b_0, a_n \geqslant 0$, 所以

$$b_{n_{ki}} = a_{n_{ki}} b_{n_{ki}} / a_{n_{ki}} \to \frac{a'}{b'}.$$

即 $\frac{a'}{b'}$ 是 $\{b_n\}$ 的一个聚点, 即 $\frac{a'}{b'} \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$. 从而知

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n b_n) = a' \geqslant b'\,\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n \geqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n.$$

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 3 证明: 若 $a_n > 0$, 对 $\{a_n\}$, 有

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) \geqslant 1.$$

证 用反证法. 设 $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) < 1$, 则 $\exists\, N > 0$, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$n\left(\frac{1+a_n}{a_n} - 1\right) < 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1},\ n \geqslant N.$$

将一连串不等式中前 k 个相加, 得

$$\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\cdots+\frac{1}{N+k}<\frac{a_N}{N}-\frac{a_{N+k}}{N+k}<\frac{a_N}{N},\ k>1.$$

但事实上，当 $k\to\infty$ 时，上式左边 $\to+\infty$，矛盾. 故

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1+a_n}{a_n}-1\right)\geqslant 1.$$

例 4 证明：若 $a_n>0, n=1,2,\cdots$，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=1,$$

则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a$，则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}, a>0$.

依定义，$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a}+\frac{\varepsilon}{a}$. 故

$$a_n>\frac{a}{1+\varepsilon}=a\left(1-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)>a(1-\varepsilon),$$

即 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\geqslant a$. 因为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，所以 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$，数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 5 证明：若 $a_n>0, n=1,2,\cdots$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证 设 $a=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}$，当 $a=+\infty$，不等式必成立.

当 $0\leqslant a<+\infty$ 时，依极限定义，$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0$，当 $k>N$ 时，有 $\frac{a_{k+1}}{a_k}<a+\varepsilon$.

任取 $n>N$，令 $k=N,N+1,\cdots,n-1$，将所得 $n-N$ 个不等式相乘，得

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}\cdot\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}<(a+\varepsilon)^{n-N},$$

即 $$\frac{a_n}{a_N}<(a+\varepsilon)^{n-N}\Rightarrow a_n<M(a+\varepsilon)^n.$$

其中 $M = a_N(a+\varepsilon)^{-N}$. 于是 $\sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{M}(a+\varepsilon)$,得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{M}(a+\varepsilon) = a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知,所证不等式成立.

例 6 设有数列 $\{a_n\}$ 及常数 $d \geqslant 2$,令

$$b_n = a_n + da_{n+1}, \quad n = 1,2,\cdots,$$

证明:数列 $\{b_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证 充分性是显然的. 现证必要性.

设 $\{b_n\}$ 收敛,则 $\{b_n\}$ 有界 $\Rightarrow \{a_n\}$ 有界. 因为若有 $|a_1| \leqslant M$, $|b_n| \leqslant M$,则当 $|a_n| \leqslant M$ 时,有

$$|a_{n+1}| = \left|\frac{1}{d}b_n - \frac{1}{d}a_n\right| \leqslant \frac{|b_n|}{d} + \frac{|a_n|}{d} \leqslant \frac{2}{d}M \leqslant M.$$

所以 $\{a_n\}$ 有界.

又设 $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$,对等式 $a_n = b_n - da_{n+1}$ 两边分别取上、下极限,利用

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-a_n) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

得
$$A = b - da, \quad a = b - dA.$$

立即可得 $a = A$,所以 $\{a_n\}$ 收敛.

第二章　函数、极限与连续性

第一节　映射与函数

主要内容

一、映射

1. 设 A,B 为两个非空集合. 若对每一个 $x \in A$，按照某一确定法则 f，有惟一确定的 $y \in B$ 与之对应，则称法则 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射（又称算子），记作

$$f:A \to B \quad 或 \quad f:x \to y = f(x), \quad x \in A.$$

其中，y 称为元素 x 在映射 f 下的像，x 称为 y 在映射 f 下的一个逆像（原像）. 集合 A 称为映射 f 的定义域，记作 $D(f) = A$. A 中所有元素 x 的像 y 的全体所构成的集合称为映射 f 的值域，记作 $R(f)$（或 $f(A)$），即

$$R(f) = f(A) = \{y \mid y = f(x), \quad x \in A\}.$$

2. 设 f 是从集合 A 到集合 B 的一个映射，若对 A 中的任意两个不同的元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $y_1 \neq y_2$，则称 f 是从 A 到 B 的一个单射；如果 $R(f) = B$，即 B 中每一元素 y 都是 A 中某元素的像，则称 f 是从 A 到 B 的满射；如果 f 既是单射又是满射，则称 f 为双射（一一映射）.

3. 设 $f:A \to B$ 是单射，则由映射定义，对每一 $y \in R(f)$，有惟一的 $x \in A$ 满足 $f(x) = y$. 对应关系 $g:R(f) \to A$ 定义一个从 $R(f)$ 到 X 的映射，称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}. 定义域为 $D(f^{-1}) =$

$R(f)$,值域为 $R(f^{-1}) = A$.

4. 设有两个映射 $g:A \to B_1$,$f:B_2 \to C$,如果 $B_1 \subset B_2$,则对应关系 $f \circ g:A \to C$ 或$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$,$x \in A$ 定义一个从 A 到 C 的映射,称为映射 f 和 g 的复合映射.

二、函数

1. 设有两个实数集 A 和 B,若存在一个对应法则 f,使集 A 内的每一个数 x,都有一个惟一的数 $y \in B$ 与之对应,则称 f 是定义在集 A 上的函数.记作 $f:x \to y = f(x)$. $y = f(x)$ 称为一元实函数,简称函数. A 称为定义域.

函数 f 给出 x 轴上点集 A 到 y 轴上点集 B 的一个映射.

2. 函数的表示法即对应法则 f 的表示法,有列表法、图示法和公式法.

函数的公式法表示除形式 $y = f(x)$ 外,还有分段表示、隐式表示与参数表示.

3. 函数的几个特性

(1) 奇偶性　设 f 为定义在对称于原点的数集 D 上的函数,若对 $x \in D$,有 $-x \in D$,满足

$$f(x) = -f(-x) \quad (\text{或} f(x) = f(-x)), \quad x \in D,$$

则称 f 为 D 上的奇函数(或偶函数).

(2) 有界性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若 $\exists\, M > 0$,使 $\forall\, x \in D$,有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 f 为 D 上的有界函数.

(3) 单调性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若 $\forall\, x_1, x_2 \in D$,$x_1 \leqslant x_2$ 时,有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad (\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称函数 f 在 D 上单调增加(或减少).当式中等号不存在时,称严格单调增加(或减少).

(4) 周期性　设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若存在正数 T,使对于一切 $x \in D$,$f(x+T) = f(x)$ 成立,则 f 为 D 上的周期函数,T 为 f 的周期. T 中的最小值称为最小周期,简称周期.

4. 设有函数 $f:A\to\mathbf{R}$ 与 $g:B\to\mathbf{R}$，若 $R(f)\subseteq B$，则称复合映射 $\varphi=g\circ f:A\to\mathbf{R}$ 为 g 与 f 的复合函数. 如 $y=g(u)$，$u=f(x)$，$u\in R(f)$，则

$$y=\varphi(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)],\quad x\in A.$$

其中 u 称为中间变量，"$\circ$" 表示复合运算.

5. 设有函数 $f:A\to B=R(f)$，若存在函数 $g:R(f)\to A$，使 g 是 f 的逆映射，f 是可逆的. 则 g 称为 f 的反(逆)函数，记作

$$g=f^{-1}.$$

6. 常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经有限次四则运算与复合运算得到的可由一个式子表示的函数，称为初等函数.

疑难解析

1. 构成一个映射有哪些条件与要求?

答 构成一个映射必须具备下列三个基本要素:

(1) 集合 A，即定义域 $D(f)=A$;

(2) 集合 B，即限制值域的范围: $R(f)\subset B$;

(3) 对应法则 f，使每个 $x\in A$，有惟一的 $y=f(x)$ 与之对应.

在这里，映射有两点要求: 一是元素的像必须是惟一的. 如 $f:y^2=x$ 就不是一个映射; 凡是不满足像的唯一性要求的对应法则，一般只要对值域范围稍加限制，就能使之成为映射. 二是不要求原像也具有惟一性. 如 $f:y=x^2$ 是一个映射.

2. 说明函数与映射的关系?

答 在映射的定义中，若 B 是一个实数集，则称映射 $f:A\to B$ 是泛函; 若 A,B 都是实数集，则映射 $f:A\to B$ 是一元函数. 若 $A=B$，则 f 是 A 到自身的映射，称为 A 上的一个变换. 若集 A 中的每个元素都映为自己，则映射称为恒等映射或单位映射，记作 I_A 或 I，即 $\forall\, x\in A, I_x=x$.

方法、技巧与典型例题分析

映射的基本概念必须十分熟悉，才能证明关于映射的一些命题. 证明中要特别注意元素的任意性，只有任意性才能保证命题的普通性. 证明技巧中很重要的一点是反证法的运用，用好反证法将给我们解题以很大便利.

例 1 设 $A = B = [0,1]$，则 $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x$，$\varphi_2(x) = \sin\pi x$，$\varphi_3(x) = x$ 都是什么样的映射.

解 φ_1 是从 A 到 B 的单射，不是满射；φ_2 是从 A 到 B 的满射，不是单射；φ_3 是从 A 到 B 的双射.

例 2 设映射 $f: A \to B$ 是可逆的，证明：其逆映射是惟一的.

证 用反证法. 设 g_1, g_2 都是 f 的逆映射，且 $g_1 \neq g_2$，则 $\exists\ y \in B$，使得 $g_1(y) \neq g_2(y)$. 由于有 $f \circ g_2(y) = y$，得 $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_1(y)$. 又 $g_1 \circ f = I_A$，得 $g_1 \circ f \circ g_2(y) = g_2(y)$，即有 $g_1(y) = g_2(y)$，推出矛盾，所以假设不成立. 映射 $f: A \to B$ 可逆，则其逆映射是惟一的.

例 3 设 $f: A \to B$ 与 $g: B \to A$ 是两个任意映射，若 $g \circ f = I_A$，证明 f 是单射，g 是满射.

证 因为 $\forall\ x \in A$，$\exists$ 元素 $f(x) \in B$，使 $g[f(x)] = x$，所以 g 是满射.

用反证法证明 f 是单射. 设有 $x_1 \neq x_2$，使 $f(x_1) = f(x_2)$，则 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. 又 $g \circ f = I_A$，故 $x_1 = x_2$，推出矛盾. 所以 f 一定是单射.

例 4 设有映射 $f: X \to Y$，$A \subseteq X$，$B \subseteq Y$，证明：

(1) $f[f^{-1}(B)] = B \cap f(x)$；

(2) $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$，若 f 是单射，则 $f^{-1}[f(A)] = A$；

(3) $f[f^{-1}(B)] = B \Leftrightarrow f$ 为满射.

证 (1) $f[f^{-1}(B)] \subseteq B \cap f(x)$ 是显然的. 又由 $B \cap f(x) \subseteq B$, $f^{-1}[B \cap f(x)] \subseteq f^{-1}(B)$, 所以 $B \cap f(x) \subset f[f^{-1}(B)]$.
故
$$f[f^{-1}(B)] = B \cap f(x).$$

(2) 只需证 $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$. 因为 $\forall\, x \in f^{-1}[f(A)]$, $\exists\, y \in f(A)$, 使得 $x = f^{-1}(y)$, 所以 $y = f(x)$. 即 $f^{-1}[f(A)] \subseteq A$.

若 f 是单射, 则 $f^{-1}[f(A)] = A$.

(3) 先证充分性. 由题(1) 知 $f[f^{-1}(B)] \subseteq B$, 又因为 f 是满射, $\forall\, y \in B$, $\exists\, x \in f^{-1}(B)$, 使 $f(x) = y$, 故 $y = f[f^{-1}(B)]$, 因而 $B \subseteq f[f^{-1}(B)]$. 于是 $f[f^{-1}(B)] = B$. 而必要性是显然的.

例 5 设映射 $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. 证明:

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$;

(3) 若 f 为单射, 则题(2) 成为等式.

证 (1) $\forall\, y \in f(A \cup B)$, $\exists\, x \in A \cup B$, 当 $x \in A$ 时, $y \in f(A)$; 当 $x \in B$ 时, $y \in f(B)$. 所以 $y \in f(A) \cup f(B)$. 故
$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

又 $\forall\, y \in f(A) \cup f(B)$, 当 $y \in f(A)$ 时, $\exists\, x \in A$, 使 $f(x) = y$; 当 $y \in f(B)$ 时, $\exists\, x \in B$, 使 $f(x) = y$. 故
$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

综上所述得, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 因为 $\forall\, y \in f(A \cap B)$, $\exists\, x \in A \cap B$, 使 $f(x) = y$, 即 $x \in A$ 且 $x \in B$, 故 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$. 故
$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

(3) 因为题(2)$\forall\, y \in f(A) \cap f(B)$. 有 $y \in f(A)$ 且 $y \in f(B)$. 所以 $\exists\, x_1 \in A$, 使 $f(x_1) = y$, $\exists\, x_2 \in B$, 使 $f(x_2) = y$. 又因为 f 是单射, 所以 $x_1 = x_2$, 即 $x \in A \cap B$, 又 $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$, 故 $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

例 6 证明: f 是 A 到 B 上可逆映射的充分必要条件是 f 是 A 到 B 的双射.

证 **充分性** 设 f 是 A 到 B 的双射，则 $\forall\ y \in B$，$\exists$ 惟一的 $x \in A$，使得 $y = f(x)$. 由此作从 B 到 A 的映射：$f^{-1}y \to x$，则 $\forall\ x \in A$，有

$$(f^{-1} \circ f)\ (x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x,$$

即 $f^{-1} \circ f = I_A$. 同时，$\forall\ y \in B$，有

$$(f \circ f^{-1})\ (y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y.$$

即 $f \circ f^{-1} = I_B$. 因此，f 是可逆的.

必要性 设 f 可逆，故存在 $f^{-1}: B \to A$，使得 $f^{-1} \circ f = I_A$，$f \circ f^{-1} = I_B$，于是，$\forall\ x_1, x_2 \in A$，当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时，有

$$\begin{aligned} x_1 &= (f^{-1} \circ f)(x_1) = f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)] \\ &= (f^{-1} \circ f)(x_2) = x_2. \end{aligned}$$

所以，f 是单射. 又，$\forall\ y \in B$，有

$$y = (f \circ f^{-1})(y) = f[f^{-1}(y)],$$

即 $R(f) = B$，故知 f 又是满射. 从而 f 是双射.

掌握函数的基本概念，对函数式、函数的定义域、值域、复合函数和反函数有足够的了解，能够求出函数表达式、定义区域和函数，会复合和分解函数，会从已知函数求出函数的反函数.

例 7 设 $f(x) = 2x - x^2\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$，求定义于 $(-\infty, +\infty)$ 的函数 $F(x)$，使 $F(x)$ 满足以下条件：

(1) $F(x) \equiv f(x)\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

(2) $F(-x) = -F(x)\ (-\infty < x < +\infty)$;

(3) $F(x+2) = -F(x)\ (-\infty < x < +\infty)$.

解 由条件(3) 知 $F(x+4) = -F(x+2) = F(x)$，所以 $F(x)$ 是 $T = 4$ 的周期函数. 在 $[-2, 2]$ 上考虑 $F(x)$ 的表达式，因为在 $[0, 1]$ 上有

$$F(x) = f(x) = 2x - x^2 = 1 - (x-1)^2,$$

由 $F(-x) = -F(x)$，故在 $[-1, 0)$ 上有

$$F(x) = -[1 - (-x-1)^2] = (x+1)^2 - 1,$$

由 $F(x+2)=-F(x)$，故在$[1,2)$上有

$$F(x)=-\{[(x-2)+1]^2-1\}=1-(x-1)^2.$$

又由 $F(-x)=-F(x)$，故在$[-2,-1)$上有

$$F(x)=[1-(-x-1)^2]=(x+1)^2-1.$$

综上所述得，在$[-2,2]$上有

$$F(x)=\begin{cases}(x+1)^2-1, & -2\leqslant x<0,\\ 1-(x-1)^2, & 0\leqslant x<2.\end{cases}$$

考察到 $T=4$，故在$(-\infty,+\infty)$上有

$$F(x)=\begin{cases}(x-4k+1)^2-1, & 4k-2\leqslant x<4k,\\ 1-(x-4k-1)^2, & 4k\leqslant x<4k+2,\end{cases}\quad k\in\mathbf{Z}.$$

例 8 设 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域与 $f[f(-7)]$.

解 $\dfrac{1}{\lg(3-x)}$ 要求 $3-x>0, 3-x\neq 1$，即 $-\infty<x<2\cup 2<x<3$. $\sqrt{49-x^2}$ 要求 $-7\leqslant x\leqslant 7$. 故 $f(x)$ 的定义域为 $-7\leqslant x<2\cup 2<x<3$.

因为 $f(-7)=\dfrac{1}{\lg 10}+0=1$，所以

$$f[f(-7)]=f(1)=\frac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}.$$

例 9 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$.

解 (1) $|x|-x\neq 0$，定义域即 $|x|\neq x$ 的点集.

(2) $x\neq 0, \dfrac{1-x}{1+x}>0$. 定义域为$(-1,0)\cup(0,1)$.

(3) x 满足 $\begin{cases} 2+x-x^2 \geqslant 0, \\ \left|\lg \dfrac{x}{10}\right| \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-x)(1+x) > 0, \\ -1 \leqslant \lg \dfrac{x}{10} \leqslant 1. \end{cases}$

由第一式得 $-1 \leqslant x \leqslant 2$，由第二式得 $1 \leqslant x \leqslant 100$. 定义域为 $[1,2]$.

(4) 由

$$\left|\frac{2x}{1+x}\right| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \frac{2x}{1+x} \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2-\frac{2}{1+x} \leqslant 1,$$

即 $-3 \leqslant \dfrac{-2}{1+x} \leqslant 1$，解得 $-\dfrac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. 定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

例 10 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$；　　(2) $f(x-a)+f(x+a)\ (a>0)$.

解 (1) 因为对 $f(x)$ 要求 $0 \leqslant x \leqslant 1$，即要求 $0 \leqslant \sin\dfrac{\pi}{x} \leqslant 1$，所以 $2n\pi \leqslant \dfrac{\pi}{x} \leqslant (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z}$.

当 $n=0$ 时，$0 \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$，即 $x \geqslant 1$.

当 $n \neq 0$ 时，$2n \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 2n+1$，即 $x \in \left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right]$.

故 $f\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$ 的定义域为 $\left[\dfrac{1}{2n+1},\dfrac{1}{2n}\right] \cup [1,+\infty)$.

(2) 由 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$ 知，应有

$$\begin{cases} 0 \leqslant x-a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x+a \leqslant 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1+a, \\ -a \leqslant x \leqslant 1-a. \end{cases}$$

因为 $a>0$，故当 $1-a \geqslant a$（即 $0<a \leqslant 1/2$）时，$a \leqslant x \leqslant 1-a$. 当 $1-a<a$（即 $a>1/2$）时，不等式组无解. 定义域为 $[a,1-a]$ $(0<a<1/2)$.

例 11 设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；　　(2) $\dfrac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$.

解 (1) 因为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \sqrt{2x}, & x>0,\end{cases}$$

所以定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 由 $f[f(x)]=\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x^2}}+\sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right)^2}}$

$$=\sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}=\sqrt{2f(x)},$$

得 $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2=\frac{1}{2}\{\sqrt{2f(x)}\}^2=\frac{1}{2}\cdot 2f(x)=f(x)$.

求函数定义域时要注意以下几点:(1) 负数不能开偶次方;(2) 分式的分母不能为零;(3) 对数的真数必须是正数;(4) 反三角函数值有限制;(5) 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是原来函数 $y=f(x)$ 的值域;(6) 奇、偶函数定义域是关于原点对称的数集;(7) 有限个函数四则运算得到的函数的定义域是这些函数定义域的交集;(8) 复合函数 $z=f[\varphi(x)]$ 的定义域一般是 $y=\varphi(x)$ 定义域的子集,在子集上 $y=\varphi(x)$ 的值域属于 $z=f(y)$ 的定义域;(9) 应用问题函数的定义域要考虑问题的具体条件与意义来确定.

例 12 证明:若对任意实数 x 和 y,有

$$2f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y),$$

且 $f(x)\neq 0$,则:

(1) $[f(x)]^2=\frac{1}{2}[f(2x)+1]$;

(2) $[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1$.

证 此类问题一般通过对已知等式中的 x 或 y 取特殊值来证.

(1) 在等式中令 $y=0$,得 $2f(x)f(0)=2f(x)$. 由 $f(x)\neq 0$ 和上式的普通性,必 $f(0)=1$. 再在等式中令 $x=y$,得

$$2[f(x)]^2=2f(2x)+1\Rightarrow[f(x)]^2=\frac{1}{2}[f(2x)+1].$$

(2) 在等式中以 $x+y$ 与 $x-y$ 分别替代 x 与 y，并利用题(1)的结果，得

$$
\begin{aligned}
2f(x+y)f(x-y) &= f(2x)+f(2y) \\
&= 2[f(x)]^2+2[f(y)]^2-2,
\end{aligned}
$$

所以 $[f(x)]^2+[f(y)]^2=f(x+y)f(x-y)+1.$

例 13 已知 $f(x)$ 是单值函数，且满足方程

$$f^2(\ln x)+2xf(\ln x)+x^2\ln x=0 \quad (0<x<\mathrm{e}),$$

$f(0)=0$，求 $f(x)$.

解 设 $t=\ln x$，则 $x=\mathrm{e}^t$，关系式化为

$$f^2(t)+2\mathrm{e}^t f(t)+\mathrm{e}^{2t}t=0.$$

解得 $f(t)=\mathrm{e}^t(1\pm\sqrt{1-t})$，由 $f(0)=0$，得

$$f(x)=\mathrm{e}^x(1-\sqrt{1-x}).$$

例 14 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x}+3$，求 $f(x)$.

解法 1(化变量法)

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+3=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1,$$

故

$$f(x)=x^2+1.$$

解法 2 设 $t=x+\dfrac{1}{x}$，则 $t^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2$. 因此

$$f(t)=x^2+\frac{1}{x^2}+2+1=t^2+1,$$

故

$$f(x)=x^2+1.$$

类似可求下列各题：

已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\ (x>0)$，则

$$f(x)=\frac{1}{x}(1+\sqrt{x^2+1}).$$

已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$，则 $f(x)=x^2-5x+6.$

例 15 设 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，且 $y=\dfrac{1}{z}=x$. 求 $f(x)$

及 z 的表达式.

解 取 $y=1, z=x$ 代入已知表达式,得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1) \Rightarrow x-1=f(\sqrt[3]{x}-1).$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$,则 $x=(t+1)^3$,上式化为

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t,$$

即 $$f(x)=x^3+3x^2+3x, \quad z=\sqrt{y}+(x-1).$$

例 16 设对任意 $x, y \in \mathbf{R}$,若有 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$,且 $f(x) \geqslant 0, f(0)=c$,证明:对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x)=c$.

证 不等式 $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$ 说明在任意区间 $[a, b]$ 上,函数 $f(x)$ 在区间中点 $\frac{a+b}{2}$ 的值不小于两端点上函数值 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的算术平均值,则函数曲线是水平的或向上凸起的. 若 $f(x) \geqslant 0$,则 $f(x)$ 只能是水平线. 先用反证法证 $f(x) \geqslant c$.

设 $\exists a \in \mathbf{R}$,有 $f(a)<c=f(0)$. 又设 $f(0)-f(a)=h>0$. 在题给不等式中,令 $x=0, y=2a$,则有

$$2f(a) \geqslant f(0)+f(2a)$$

或 $$f(2a) \leqslant f(0)-2[f(0)-f(a)]=f(0)-2h.$$

令 $x=a, y=3a$,类似推出

$$f(3a) \leqslant 2f(2a)-f(a) \leqslant f(0)-3h, \cdots.$$

由数学归纳法可证,对任意 n,有

$$f(na) \leqslant f(0)-nh.$$

因为 $h>0$,故当 n 充分大时,有 $f(na)<0$. 这与 $f(x) \geqslant 0$ 矛盾,所以,对任意 $x \in \mathbf{R}$,有 $f(x) \geqslant c$.

再来证 $f(x)=c$. 因为对题给的不等式,若取 $y=-x\ (x \in \mathbf{R})$,有 $2f(0)=2c \geqslant f(x)+f(-x)$. 由于 $f(x) \geqslant c, f(-x) \geqslant c$,故必 $f(x)=f(-x)=c$. 即对任意 $x \in \mathbf{R}, f(x)=c$.

例 17 设 $f(x)=\frac{x}{x-1}$,求 $f\{f[f(f(x))]\}$ 和 $f[1/f(x)]$

$(x \neq 0, x \neq 1)$.

解 $$f[f(x)] = \frac{x/(x-1)}{x/(x-1)-1} = x,$$

$$f[f(f(x))] = \frac{x}{x-1} = f(x),$$

$$f\{f[f(f(x))]\} = f(f(x)) = x.$$

又 $1/f(x) = (x-1)/x = 1 - 1/x$,所以

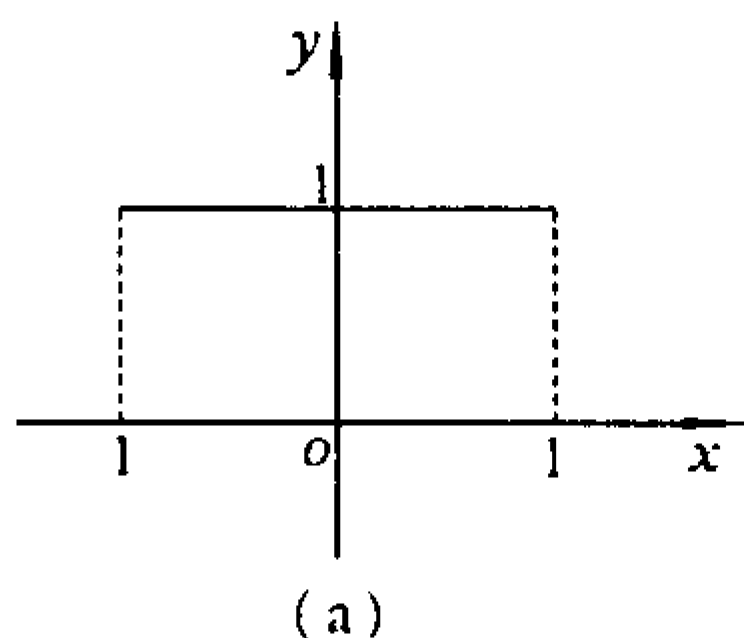
$$f[1/f(x)] = f(1-1/x) = \frac{1-1/x}{(1-1/x)-1} = 1 - x.$$

例 18 设函数

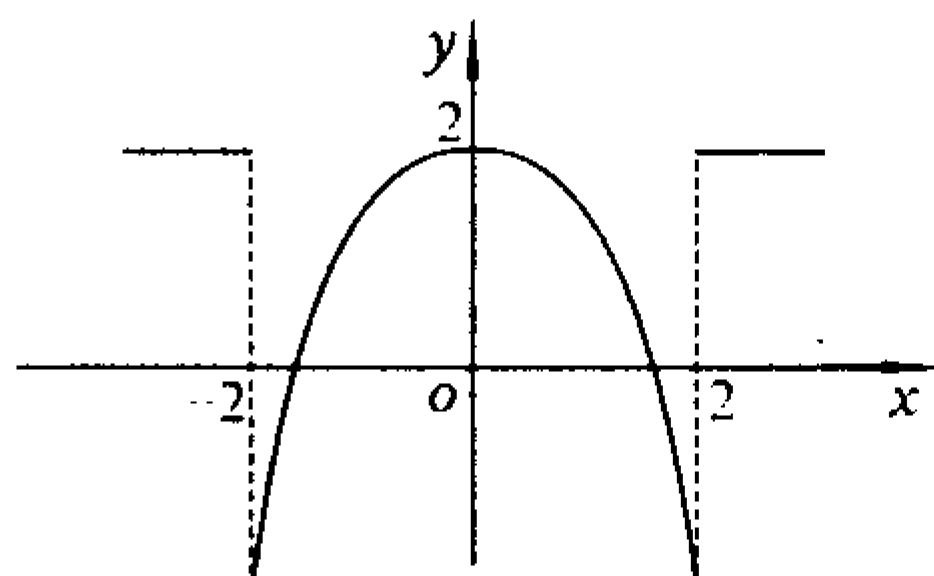
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| \leqslant 2, \\ 2, & |x| > 2, \end{cases}$$

求 $f[f(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$,$g[g(x)]$.

解 $f(x)$,$g(x)$ 的图形分别如图 2.1(a),(b) 所示.



(a)



(b)

图 2.1

(1) 因为在$(-\infty, +\infty)$内,$|f(x)| \leqslant 1$,所以

$$f[f(x)] = 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) 因为当$1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}$ 时,$|g(x)| \leqslant 1$,当 $|x| < 1$ 或 $|x| > \sqrt{3}$ 时,$|g(x)| > 1$,所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant |x| \leqslant \sqrt{3}, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(3) 因为在$(-\infty, +\infty)$内,$|f(x)| \leqslant 1$,于是 $g[f(x)] = 2 - [f(x)]^2$. 考虑 $f(x)$ 的取值,得

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

(4) 因为在$(-\infty,+\infty)$内，$|g(x)|\leqslant 2$，所以$g[g(x)]=2-[g(x)]^2$. 考虑$g(x)$的取值，得

$$g[g(x)]=\begin{cases}2-(2-x^2)^2, & |x|\leqslant 2,\\ -2, & |x|>2.\end{cases}$$

例 19 设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求$f_n(x)=\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n个}$.

解 用数学归纳法. 当$n=2$时，$f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. 设当$n=k$时，$f_k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}$. 则对于$n=k+1$，有

$$f_{k+1}(x)=\frac{x/\sqrt{1+kx^2}}{\sqrt{1+[x/\sqrt{1+kx^2}]^2}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

例 20 设$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$，求其反函数，并指出a，b,c,d满足什么条件时，反函数与直接函数相同.

解 由$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$解得$x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$，所以反函数为

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}.$$

由$\dfrac{dx+b}{cx+d}=\dfrac{-dx+b}{cx-a}\Rightarrow(a+d)[x^2+(d-a)x-b]=0$，所以，应有$a+d=0$或$b=c=0$而$a=d\neq 0$.

了解函数的特性，对研究函数是十分有用的. 解这类题的方法有反证法、恒等变换法、放大法等.

例 21 证明：定义于对称区间$(-l,l)$内的任何函数$f(x)$均可表示为一个奇函数与一个偶函数之和的形式.

证 构造两个新的函数

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)],\ f_2(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

因为 $$f_1(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)+f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=f_1(x),$$
$$f_2(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(-(-x))]$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-f_2(x),$$
所以,$f_1(x)$ 是偶函数,$f_2(x)$ 是奇函数. 而
$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
故 $f(x)$ 可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

例 22 设 $f(x)$ 是奇函数,$f(1)=a$,且
$$f(x+2)-f(x)=f(2).$$
(1) 求 $f(2)$ 与 $f(5)$ 与 a 的关系式;

(2) a 为何值时,$f(x)$ 是以 2 为周期的函数?

解 (1) x 取 -1,1 和 3 时,由所给等式得
$$f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a,$$
$$f(2)=f(3)-f(1),\quad f(2)=f(5)-f(3),$$
将后两式相加,得 $f(5)=2f(2)+f(1)=5a$.

(2) 如果 $f(x)$ 以 2 为周期,则
$$f(x+2)=f(x)\Rightarrow f(x+2)-f(x)=0=f(2),$$
即 $f(2)=2a=0\Rightarrow a=0$. 所以取 $a=0$ 时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

例 23 已知函数 $f(x)$ 满足关系式
$$af(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{b}{x}\quad(|a|\neq 1,a,b\text{ 为常数}),$$
确定 $f(x)$ 的奇偶性.

解 将 $x=\frac{1}{t}$ 代入关系式得 $af\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=bt$,又将 t 改为 x 与关系式联立得方程组

$$\begin{cases} af\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=bx, \\ af(x)+f(x)=\dfrac{b}{x}, \end{cases}$$

可解得

$$f(x)=\frac{1}{a^2-1}\left(\frac{ab}{x}-bx\right)=\frac{ab-bx^2}{(a^2-1)x} \quad (|a|\neq 1).$$

显然 $$f(-x)=\frac{ab-b(-x)^2}{(a^2-1)(-x)}=-f(x).$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 24 证明:函数 $f(x)=2x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的.

证 $\forall\, x,y\in\mathbf{R}$,且 $x<y$,有

$$\begin{aligned}|\sin y-\sin x| &= 2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right|\left|\cos\frac{y+x}{2}\right| \\ &\leqslant 2\left|\sin\frac{y-x}{2}\right|\leqslant y-x,\end{aligned}$$

即有 $$-(y-x)\leqslant \sin y-\sin x\leqslant y-x.$$

由此 $$\begin{aligned}f(y)-f(x)&=2(y-x)+(\sin y-\sin x)\\ &\geqslant y-x>0.\end{aligned}$$

从而知 $f(x)=2x+\sin x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是严格递增的.

例 25 设 $f(x),\varphi(x),\psi(x)$ 都是单调增函数,且满足

$$f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x),$$

证明: $$f[f(x)]\leqslant\varphi[\varphi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)].$$

证 由 $f(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\psi(x)$ 且 $f(x),\varphi(x),\psi(x)$ 均为单调增函数,得

$$f[f(x)]\leqslant f[\varphi(x)]\leqslant\varphi[\varphi(x)]\leqslant\varphi[\psi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)],$$

即所证不等式成立.

例 26 讨论下列函数是否周期函数.若是,求出其周期.

(1) $y=x\cos x$; (2) $y=\sin^2 x$.

解 判断一个函数是否周期函数常用两种方法:一是将所给函数进行恒等变形,讨论是否为周期函数的和、差、积、商;二是利

用反证法,证明周期 T 不存在(或与变量有关).

(1) 因为在 $x\cos x$ 中,x 不是周期函数,所以函数的周期可能不存在.用反证法.设函数的周期 $T>0$,则

$$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x.$$

令 $x=0$ 和 $x=\pi/2$,得

$$\begin{cases}T\cos T=0,\\ \left(T+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{T+\pi}{2}\right)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos T=0,\\ \sin T=0.\end{cases}$$

显然,满足方程组的 T 不存在.故 $y=x\cos x$ 不是周期函数.

(2) $\sin^2x$ 是两个周期函数的积,可能是周期函数,用恒等变换法,得

$$y=\sin^2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x.$$

其中 $1/2$ 是常数,周期可取任意正数;$\cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数.所以 $y=\sin^2x$ 是周期为 π 的函数.

例 27 证明:若函数 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 在数集 A 上有界,则函数 $f(x)+\varphi(x)$,$f(x)-\varphi(x)$,$f(x)\varphi(x)$ 在数集 A 上也有界.

证 若 $f(x)$ 有界,则 $\exists\ M_1>0,\forall\ x\in A$ 有 $|f(x)|\leqslant M_1$;若 $\varphi(x)$ 有界,则 $\exists\ M_2>0,\forall\ x\in A$ 有 $|\varphi(x)|\leqslant M_2$.所以

$$|f(x)\pm\varphi(x)|\leqslant|f(x)|+|\varphi(x)|\leqslant M_1+M_2,$$
$$|f(x)\cdot\varphi(x)|=|f(x)|\cdot|\varphi(x)|\leqslant M_1\cdot M_2.$$

故函数 $f(x)+\varphi(x)$,$f(x)-\varphi(x)$,$f(x)\varphi(x)$ 在 A 上也有界.

例 28 证明:定义在同一数集上且周期是可通约的两个周期函数的和与积都是周期函数,并求 $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 的周期和 $f(x)=\sin^2x$ 的周期.

证 设 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 是定义在同一数集上,且周期分别 T_1 和 T_2 的两个周期函数.设 T 为 T_1 与 T_2 的公约数,即

$$T_1=k_1T,\quad T_2=k_2T\quad(k_1,k_2\in\mathbf{Z})$$

则 $\quad f_1(x+k_1T)=f_1(x),\quad f_2(x+k_2T)=f_2(x).$

设 $F_1(x)=f_1(x)+f_2(x)$，于是

$$F_1(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)+f_2(x+k_1k_2T)$$
$$=f_1(x)+f_2(x)=F_1(x).$$

设 $F_2(x)=f_1(x)f_2(x)$，于是

$$F_2(x+k_1k_2T)=f_1(x+k_1k_2T)f_2(x+k_1k_2T)$$
$$=f_1(x)f_2(x)=F_2(x).$$

在 $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 中，$\sin x,\sin 2x,\sin 3x$ 的周期分别为 $2\pi,\pi,\frac{2}{3}\pi$，所以 $f(x)$ 的周期是其最小公倍数 2π.

$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 的周期是 π（见例 25 题(2)）.

第二节　函数的极限

主 要 内 容

1. 设 f 为定义在 $(a,+\infty)$ 上的函数，A 是一个确定的数，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ M>0$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 f 当 x 趋向 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

2. 设 f 在点 x_0 的去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta_0)$ 内有定义，A 是一个确定的数. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0\ (\delta<\delta_0)$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 f 当 x 趋向 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A\ (x \to x_0).$$

3. 函数的极限具有以下的性质：

（1）惟一性　若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则必是惟一的.

（2）局部有界性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则存在$x_0$的某去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得$f(x)$在邻域中有界.

（3）局部保号性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A > 0$（或$< 0$），则对任意正数$r$（$0 < r < |A|$），存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$，恒有$f(x) > r > 0$（或$f(x) < -r < 0$）.

（4）不等式性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，且存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$都有$f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

（5）迫敛性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，且存在$x_0$的某一去心邻域$U^\circ(x_0,\delta)$，使得对一切$x \in U^\circ(x_0,\delta)$都有$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$，则

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = A.$$

4. 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都存在，则函数$f \pm g, f\cdot g$在$x \to x_0$时极限也存在，且

（1）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

又若$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$，则$f/g$在$x \to x_0$时极限存在，且

（3）$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

5. 设 $f(x)$ 在 (x_0-r,x_0) $(r>0)$ 内有定义，A 是一个确定的数，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $-\delta<x-x_0<0$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 x_0 的左极限是 A，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

类似可以定义 $f(x)$ 在 x_0 的右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

函数 $f(x)$ 在 x_0 极限存在的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

以后，我们将 $U(x_0,\delta)$ 记作 $U(x_0)$，$U^\circ(x,\delta)$ 记作 $U^\circ(x_0)$.

6. 海涅(Heine)定理　设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是：对于任意满足条件 $\lim\limits_{x\to x_0}x_n=x_0$，且 $x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$ 的数列 $\{x_n\}$，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x_n)=A.$$

7. 柯西(Cauchy)准则　设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta_0)$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta(<\delta')>0$，使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta_0)$，都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

对于一些定理与法则，我们只写出了 $x\to x_0$ 时的情形，$x\to\infty$ 的情形希望读者自己写出.

8. 设 $f(x)$ 定义在 $U^\circ_+(x_0)$（或 $U^\circ_-(x_0)$）上是单调有界函数，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$）存在.

9. 设 $f(t)$ 在 $U^\circ(t_0)$ 上有定义，且 $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=A$，$t=g(x)$ 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，当 $x\in U^\circ(x_0)$ 时，$t=g(x)\in U^\circ(t_0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=t_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=A.$$

疑 难 解 析

1. 怎样理解函数极限的 ε-δ 定义?

答　函数极限的 ε-δ 定义是在 $x \to x_0$ 情形的极限定义.如同数列极限定义,ε 是可以任意取定的正数,它反映了函数值 $f(x)$ 与 A 的接近程度;δ 反映了 x 与 x_0 的接近程度,是一个与 ε 有关的量.一般地,ε 越小,δ 也相应地要小一些.

在定义中只要求 $f(x)$ 在 $U^{\circ}(x_0)$ 有定义,是说明极限只研究 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 而不等于 x_0 的过程中函数值 $f(x)$ 的变化趋势.

在几何上,ε-δ 定义的意义是:当动点 x 进入以 x_0 为中心线、$x_0 - \delta$ 和 $x_0 + \delta$ 为边界的垂直带形域时,函数值 $f(x)$ 一定落在以 $y = A$ 为中心线、$A + \varepsilon$ 和 $A - \varepsilon$ 为边界的水平带形域内.

2. 在使用函数极限性质的时候要注意什么?

答　在函数极限问题中,x 的趋向可以是 $x_0, x_0^+, x_0^-, -\infty, +\infty$,函数的极限可以是有限数 $A, \infty, +\infty, -\infty$.因此,讨论函数极限问题时,首先要注意必须在同一趋向下;其次,关于函数极限的性质,如局部保号性与迫敛性,只在极限为 $A, +\infty, -\infty$ 时才成立.当 ∞ 未定号时,因无法与任意有限数比较而得不出结果.

在复合函数求极限时,由于内外层函数的不同情形的组合很多,做证明题时一定要全面进行考虑.

方法、技巧与典型例题分析

求函数的极限有很多种方法,其中许多与求数列极限的方法和技巧相同,读者可参阅第一章第四节.

一、用极限定义证明极限

用极限定义证明极限,在 $x \to x_0$ 时,$\forall\ \varepsilon > 0$,要找出对应的 δ;在 $x \to \infty$ 时,要找出对应的 M.一般的方法是:将 $|f(x) - A|$ 经

变形、放大，得到 $|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>M$. 在变形时大多是改变 $f(x)$ 的形式，但有时也可以改变 A 的形式来实现.

例 1　证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $f(x)>0(A\geqslant 0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}.$$

证　分两种情形.

当 $A=0$ 时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，取 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，有 $|f(x)|<\varepsilon$，即 $\sqrt{f(x)}<\sqrt{\varepsilon}$. 故

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=0.$$

当 $A>0$ 时，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，对任意满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，即

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{A}|=\frac{|f(x)-A|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{A}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{A}}|f(x)-A|<\frac{1}{\sqrt{A}}\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{A}.$$

有时，在将 $|f(x)-A|$ 变形时，不仅得到 $x-x_0$ 因式，而且还得到含 x 的其它因式. 这时，我们要利用 $x\to x_0$ 这一条件，限定 x 的取值范围，得出 $|x-x_0|<\delta$，如例 2、例 3.

例 2　证明：$\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$.

证　因为

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{7/(16x^2-9)-1}{\sqrt{7/(16x^2-9)}+1}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\frac{16|1+x||1-x|}{|(4x+3)(4x-3)|},$$

设 $|x-1|<1$，即 $0<x<2$，则上式右边不大于 $\dfrac{16\cdot 3|1-x|}{3\cdot 4|x-3/4|}$.

再设$|x-1|<\frac{1}{8}$,即$1-\frac{1}{8}<x<1+\frac{1}{8}$,于是上式右边不大于$32|1-x|$.

故$\forall\ \varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{32},\frac{1}{8}\right\}$,则当$|x-1|<\delta$时,有$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}=1.$$

例 3 按定义验证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-3}=2$.

证 因为$\forall\ \varepsilon>0$,要找到$M>0$,使$|x|>M$时,有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-3}-2\right|=\frac{7}{|x^2-3|}<\varepsilon.$$

而当$|x|>3$时,$|x^2-3|>|x|$,故要

$$\frac{7}{|x^2-3|}<\frac{7}{|x|}<\varepsilon.$$

只需$|x|>\frac{7}{\varepsilon}$.故$\forall\ \varepsilon>0$,取$M=\max\left\{3,\frac{7}{\varepsilon}\right\}$,当$|x|>M$时,有

$$\left|\frac{2x^2-1}{x^2-2}-2\right|<\varepsilon.$$

于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2-3}=2.$$

二、用恒等变形求极限

例 4 求$\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x^3+1}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-x+1-3}{x^3+1}$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-x+1}=-1.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

解 先有理化，再进行恒等变形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)}$$

$$=-\frac{1}{4}.$$

例 6 求 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$.

解 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$ （分子二项式展开）

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}[x^n+nx^{n-1}\Delta x+\cdots+\Delta x^n-x^n]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n}{2}(n-1)x^{n-2}\Delta x+\cdots+\Delta x^{n-1}\right]$$

$$=nx^{n-1}.$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}1\Big/[\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1]=1/n.$$

三、用变量代换求极限

例 8 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2})$.

解 令 $x=\frac{1}{t}$，则 $t=\frac{1}{x}\to 0^+$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt[3]{1+t}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+t}-1)-(\sqrt[3]{1+t}-1)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t(\sqrt{1+t}+1)}$$

$$-\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t(\sqrt[3]{(1+t)^2}+\sqrt[3]{(1+t)}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\ (\alpha>0)$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

解 (1) 令 $x=\mathrm{e}^t, a=\mathrm{e}^\alpha$，则 $a>1$，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{\alpha t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{a^t}\quad(\text{第一章第四节例 4})$$
$$=0.$$

(2) 由题(1)知，当 $\alpha=1$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$，于是

$$\lim_{x\to+\infty}x^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\ln x/x}=\mathrm{e}^0=1.$$

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$.

解法 1 令 $t=\frac{\pi}{2}(1-x)$，则 $\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}-t$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}t\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\pi}\cdot\cot t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{\tan t}=\frac{2}{\pi}.$$

解法 2 令 $x-1=t$，则 $\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}(1+t)$，于是

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}(-t)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)=\lim_{t\to 0}t\cdot\cot\frac{\pi t}{2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot \pi/2}{\tan\pi(t/2)} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

这里用到了下一节的重要结论$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$和$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$.

例 11　利用变量代换求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}$.

解　(1) 令 $\arcsin x = t$,则 $x = \sin t$,于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = 1.$$

(2) 令 $\arctan x = t$,则 $x = \tan x$,于是

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\tan t} = 1.$$

(3) 令 $e^x - 1 = t$,则 $x = \ln(1 + t)$,于是

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} = \lim_{t\to 0} 1\Big/\ln(1 + t)^{1/t} = 1.$$

(4) 令 $\alpha - \beta = t$,则

$$\lim_{\alpha\to\beta} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} = \lim_{t\to 0} \frac{e^\beta(e^t - 1)}{t} \text{（利用题(3)的结果）}$$
$$= e^\beta.$$

这里用到了下一节的另一重要结论$\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.

四、用迫敛性求极限

例 12　求$\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

解　因为$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x}\right] \leqslant \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$,所以

当 $x > 0$ 时,$1 - x < x\left[\frac{1}{x}\right] \leqslant 1$;

当 $x < 0$ 时,$1 - x > x\left[\frac{1}{x}\right] \geqslant 1$.

于是
$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

五、其它方法

例 13 设$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0,\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$,证明:

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$$

证 引入函数 $\varphi(x)=v(x)\ln u(x)$,因为

$$\lim_{x\to x_0}\ln u(x)=\ln a\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=b\ln a,$$

故

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{\varphi(x)}=e^{b\ln a}=a^b.$$

这个例子给出了求幂指函数极限的公式.

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

解 对函数变形可得

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}\right]^{\tan x/\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}\right]^{x/\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}\right]^{\sqrt{x}},$$

而$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{(\sqrt{x})^{\sqrt{x}}}=1,\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$,所以

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=1^0=1.$$

例 15 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$, $a>0,a\neq 1$.

解 令 $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$,则对 $a>1,x>0$,有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(a-1)}{x}+\frac{\ln(a^x-1)}{x}.$$

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a-1)}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(a^x-1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1-a^{-x})}{x}+\ln a\right)=\ln a,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}=\ln a.$$

当 $0<a<1, x>0$ 时,有

$$\ln f(x)=-\frac{\ln x}{x}-\frac{\ln(1-a)}{x}+\frac{\ln(1-a^x)}{x},$$

而 $$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-a)}{x}=0,\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1-a^x)}{x}=0.$$

所以 $$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}=0.$$

综上所述,得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln f(x)}=\begin{cases}a, & a>1,\\ 1, & 0<a<1.\end{cases}$$

例 16 讨论极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},\ a_n\neq 0,\ b_m\neq 0.$$

解 利用第一章第四节例 8 结论可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n}, & m=n,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

本例的结果对 m,n 不是整数的情形也适用.

例 17 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{1+x}}}{\sqrt{x}}$.

解 $x\to+\infty$,分子各项中最高项次数为$\dfrac{1}{2}$,由系数比,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}=1.$$

例18 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ $(n\in\mathrm{N})$.

解 $x\to\infty$. 分子最高项次数为 n,第一项的系数和为零,第二项系数和为 2^n;分母最高项次数为 n,系数为 1. 所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}=\frac{2^n}{1}=2^n.$$

例 19 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$.

解 先有理化,再比较最高项次数与系数.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{3/2}(\sqrt{x^2+2x}-x-1)(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^{3/2}}{(\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}.$$

至此可以看出,分子 x 的次数是 3/2,系数是 -2,而分母 x 的次数最高也是 3/2,系数是 $4\times2=8$. 故

$$\lim_{x\to+\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x}+1+\sqrt{x})=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

例 20 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]$.

解 用左、右极限求解. 因为

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{2e^{-4/x}+e^{-3/x}}{e^{-4/x}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]=1,$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}-\frac{\sin x}{x}\right]=2-1=1,$$

所以
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{2+e^{1/x}}{1+e^{4/x}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1.$$

例 21 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}\ (0<|a|<\pi)$.

解 用左、右极限求解. 当 $a>0$ 时,有

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{\sqrt{2\sin^2(ax/2)}}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\frac{\sqrt{2}}{a};$$

当 $a<0$ 时，有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\sqrt{2}\sin(ax/2)}=-\frac{\sqrt{2}}{a}.$$

所以，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos ax}}$ 不存在.

例 22 求$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x-a}\right)$.

解 $a\neq 0$ 时，讨论左、右极限. 因为

$$\lim_{x\to a^+}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\right)=\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7a}{6},$$

$$\lim_{x\to a^-}\left(\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\right)=\frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{a}{6},$$

左、右极限存在，但不相等，所以

$$\lim \frac{2a}{3}+\frac{a}{\pi}\arctan\frac{1}{x-a}\quad (a\neq 0)$$

不存在.

$a=0$ 时，显然有$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x-a}\right)=0$.

例 23 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^3}$.

解

$$\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6x+xf(x)}{x^3}.$$

当 $x\to 0$ 时，$6x-\sin 6x\sim(6x)^3/6$. 因而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(6x)^3}{6x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{36x^3}{x^3}=36.$$

例 24 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4\arctan x-\pi}{x-1}$.

解 作变量代换 $t=x-1$,则 $x=t+1$,再利用等式

$$\arctan x-\arctan y=\arctan\frac{x-y}{1+xy}\quad (xy>-1),$$

则 $$\begin{aligned}原式&=4\lim_{t\to 0}\frac{\arctan(t+1)-\arctan 1}{t}\\&=4\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[\arctan\frac{(1+t)-1}{1+(1+t)\cdot 1}\right]\\&=4\lim\frac{1}{t}\arctan\left(\frac{t}{2+t}\right)\\&=4\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{2+t}\cdot\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{2}=2.\end{aligned}$$

最后一个等式利用了等价无穷小的代换.

第三节 两个重要极限 无穷小量与无穷大量

主要内容

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.

2. 若函数 $f(x)$ 的极限等于零,则称这个函数为无穷小量,简称无穷小,用记号“o”表示.

函数 f 在 $x\to x_0$ 时极限为 A 的充要条件是 $f(x)-A$ 在 $x\to x_0$ 时为无穷小量.

3. 无穷小量有如下运算性质:

(1) 有限个无穷小量之和是无穷小量.

(2) 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

(3) 常数与无穷小量的乘积是无穷小量.

(4) 有限个无穷小量的乘积是无穷小量.

4. 无穷小量阶的比较

设在 x 的同一趋向下，f,g 均为无穷小量，则：

若 $\lim \frac{f}{g} = 0$，称 f 为比 g 高阶的无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = \infty$，称 f 为比 g 低阶的无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = c \neq 0$，称 f 与 g 是同阶无穷小量.

若 $\lim \frac{f}{g} = 1$，称 f 与 g 是等价无穷小量，记作 $f \sim g$.

常用的等价无穷小量有：

当 $x \to 0$ 时，$x \sim \sin x \sim \tan x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim \arcsin x \sim \arctan x$，$\sqrt[n]{1+x} \sim 1 + \frac{x}{n}$，$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

5. 若函数 $f(x)$ 以 ∞(或 $-\infty$，$+\infty$) 为极限，则称 f 为无穷大量，用记号"O"表示.

6. 若函数 $f(x)$ 在 x 的某一趋向下为无穷小量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 在 x 的同一趋向下为无穷大量($f \neq 0$).

7. 无穷大量阶的比较类同于无穷小量阶的比较.

疑 难 解 析

1. 怎样理解无穷小量和无穷小量的阶？

答　无穷小量是一个变量，它在 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 的过程中可以变得小于事先给定的任意小正数. 无穷小量是在 x 的某一趋向下实现的，因而不是普遍意义的.

在 x 的同一趋向下的几个无穷小量收敛于零的速度有快慢之分，无穷小量的阶就是对它们的收敛速度作出的判断. 但是，并不是任何两个无穷小量都可以进行比较的. 如 $x \to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，但它没有阶. 事实上，若其阶为 α，则 $\alpha \leqslant 1$. 当 $\alpha < 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}\Big/x^{\alpha} = 0$；当 $\alpha = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}\Big/x$ 不存在，都与无穷小量阶的定义相矛盾.

2. 怎样理解无穷大量和无穷大量的阶？

答 请读者参照疑难解析 1 自己作出回答.

需要注意的是：无穷大量一定是无界函数，但无界函数不一定是无穷大量. 如函数 $f(x) = x\sin x$ 在 $x \to +\infty$ 时是无界函数，因为对任何 $M > 0$，取 $x = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$，总能使

$$f(x) = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} > M.$$

但当 $x \to +\infty$ 时，$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq \infty$，因为若取数列 $x_n = 2n\pi\ (n = 1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = 0$.

3. 在具体计算中，使用等价量代换要注意什么问题？

答 在计算中出现无穷小量（或无穷大量）的相互叠加（如函数的代数和）时，不能直接进行等价量代换. 应将它们分离（如代数和化为乘积）后才能进行代换，如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x \cdot x^2/2}{\cos x \cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

如果直接进行代换，将得到错误的结果.

方法、技巧与典型例题分析

两个重要极限的利用与等价无穷小（大）代换是极限计算的

重要方法. 利用两个重要极限的技巧在于掌握它们的形式特点.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的形式特点是,在 x 的趋向下,分式的分母是无穷小量,分子是同一无穷小量的正弦函数. 这里 x 趋向于什么不是重要的,重要的是分母是无穷小量,分子是同一无穷小量的正弦函数. 因而 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x-a}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{1/x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$ 的形式特点是,幂指函数的底数是 1 与一个无穷小量的和,指数是同一无穷小量的倒数. 同样,x 趋向于什么不是重要的. 因而

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\csc x}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1-2/x)^{2x}=\lim_{x\to+\infty}(1-2/x)^{\frac{x}{2}\cdot 4}=\mathrm{e}^{-4}.$$

因此,如何将函数变形为重要极限的形式,成为我们解题的关键. 无穷小量代换应注意的问题已在疑难解析 3 中指出,不再重复.

一、两个重要极限

例 1 利用重要极限求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{\pi}{2^x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{x}\cdot\sin(1/x)}{\sqrt{x}-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2ax-\sin ax}{3bx+\sin bx}$.

解 将函数变形为重要极限形式后,再利用重要极限求出.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\dfrac{\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x\sin\dfrac{\pi}{2^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi/2^x)}{\pi/2^x}\cdot\pi=\pi\cdot 1=\pi$.

(3)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\sin(1/x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$
$$=1\cdot 1=1.$$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}\cdot\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{4}.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2\cdot 4}=1^2\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}.$

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{2ax-\sin ax}{3bx+\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{2-(\sin ax)/ax}{3+(\sin bx)/bx}\cdot\frac{ax}{bx}$$

$$=\frac{2-1}{3+1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{4b}.$$

例 2 利用重要极限求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to n\pi}\dfrac{\sin x}{x-n\pi}\ (n\in\mathbf{N}^+)$；

(3) $\lim\limits_{x\to a}\sin\dfrac{x-a}{2}\tan\dfrac{\pi x}{2a}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{\pi}{x}\right)$.

解　此例的变形要比例 1 复杂，因此要谨防出错.

(1) $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\cos x\cdot x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{1}{4\cos x}$$

$$=1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 令 $t=x-n\pi$，则 $x=n\pi+t$，于是

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^n\sin t}{t}=(-1)^n.$$

(3) 令 $t=x-a$，则 $x=a+t$，于是

$$原式=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\cdot\tan\frac{\pi(a+t)}{2a}$$

$$=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{2a}\right)=\lim_{t\to 0}\sin\frac{t}{2}\left(-\cot\frac{\pi t}{2a}\right)$$

$$=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t/2)}{t/2}\cdot\frac{\pi t/(2a)}{\tan[(\pi t/2a)]}\cdot\frac{a}{\pi}=-\frac{a}{\pi}.$$

(4) $$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2[1-\cos(\pi/x)][1+\cos(\pi/x)]}{1+\cos(\pi/x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin^2(\pi/x)}{1+\cos(\pi/x)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin^2(\pi/x)}{(\pi/x)^2} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos(\pi/x)}$$

$$= 1^2 \cdot \pi^2 \cdot 1/2 = \pi^2/2.$$

例 3 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{x\sin x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x\sin x} - 1) + (1 - \cos x)}{x\sin x}$.

其中

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - 1}{x\sin x} \xlongequal{\text{有理化}} \lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{x\sin x(\sqrt{1 + x\sin x} + 1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2) \cdot 2\sin(x/2)\cos(x/2) \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

所以 $$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{x\sin x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

例 4 设 $f(x) = a_1\sin x + a_2\sin 2x + \cdots + a_n\sin nx$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数，且 $\forall\, x \in \mathbf{R}$，有 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$，证明：

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

证 利用极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. 用 $|x| \neq 0$ 除 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$，将 $f(x)$ 用等式代入，得

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left|a_1 \frac{\sin x}{x} + 2a_2 \frac{\sin 2x}{2x} + \cdots + na_n \frac{\sin nx}{nx}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1$$

或 $$-1 \leqslant a_1 \frac{\sin x}{x} + 2a_2 \frac{\sin 2x}{2x} + \cdots + na_n \frac{\sin nx}{nx} \leqslant 1.$$

上述不等式对任何 $x \neq 0$ 都成立. 当 $x \to 0$ 时，有

$$-1 \leqslant a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \leqslant 1,$$

所以 $$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

例 5 求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos a_1 x \cdots \cos a_n x}{x^2}$.

解　先利用$x_0+\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=x_n$将分子变形，然后利用$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$即可求得.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}[(1-\cos a_1x)+(\cos a_1x-\cos a_1x\cos a_2x)+\cdots\\&\quad+(\cos a_1x\cdots\cos a_{n-1}x-\cos a_1x\cdots\cos a_nx)]\\&=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\cos a_1x\cdots\cos a_{i-1}x\cdot\frac{1-\cos a_ix}{x^2}\ (\text{令}\cos a_0x=1)\\&=\lim_{x\to 0}\sum_{i=1}^{n}\cos a_1x\cdots\cos a_{i-1}x\,\frac{\sin^2(a_ix/2)}{(a_ix/2)^2}\cdot\frac{a_i^2}{2}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{2}=\frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).\end{aligned}$$

例 6　求$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2a}{x^2}$.

解　先变形，再利用重要极限求解.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan a+\tan x}{1-\tan a\tan x}\cdot\frac{\tan a-\tan x}{1+\tan a\tan y}-\tan^2a\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^2a-\tan^2x}{1-\tan^2a\tan^2x}-\tan^2a\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2x}{x^2}\cdot\left(\frac{\tan^4a-1}{1-\tan^2a\tan^2x}\right)=\tan^4a-1.\end{aligned}$$

例 7　利用重要极限求下列极限：

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$；　　(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$；　　(4) $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{1-2x}$.

解　仍然是从$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$的形式性入手.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{x/2}}=e^6$.

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}\cdot\frac{2x}{-x/3}}=e^{-6}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^2\cdot(x^2+1)/x^2}=\mathrm{e}.$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{1/x}$

$$=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{-1/2x\cdot -2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

例 8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^{1/(1-\cos x)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}(a\neq k\pi)$.

解 先变形为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$形式.

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi/4}\{[1+(\tan x-1)]^{1/(\tan x-1)}\}^{\tan 2x\cdot(\tan x-1)}$,

而 $\tan 2x\cdot(\tan x-1)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}(\tan x-1)$

$$=-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\xrightarrow{x\to\pi/4}-1.$$

所以 原式 $=\mathrm{e}^{-1}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{1/(\cos x-1)\cdot(-1)}=\mathrm{e}^{-1}$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{1/(\cos\sqrt{x}-1)\cdot(\cos\sqrt{x}-1)/x}$

$=\mathrm{e}^{-1/2}$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to a}\left(1+\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\sin a/(\sin x-\sin a)\cdot(\sin x-\sin a)/[(x-a)\sin a]}$.

而 $\dfrac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}=\dfrac{2\cos(x+a)/2\cdot\sin(x-a)/2}{(x-a)\sin a}\xrightarrow{x\to a}\cot a$,

所以 原式 $=\mathrm{e}^{\cot a}$.

此类题可以转化为下述命题来解.

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在$(-\infty,+\infty)$上的两个函数，且 $\lim f(x)=0$，$\lim g(x)=\infty$，$\lim[f(x)g(x)]=a$ (a 为有限数或 $\pm\infty$)，则

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=\mathrm{e}^{\lim[f(x)g(x)]}=\mathrm{e}^{a}.$$

例 9 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}(a>0,b>0)$.

解 化为重要极限形式.

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{\sqrt[x]{a}-\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1}\right)\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x}.$$

而 $$\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt[x]{a}-1\right)+\left(\sqrt[x]{b}-1\right)\right]x,$$

其中 $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[x]{a}-1\right)x\xlongequal{x=1/t}\lim_{t\to0}\frac{a^{t}-1}{t}$$

$$\xlongequal{a^{t}-1=y}\lim_{y\to0}\frac{y}{\log a(1+y)}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\log a(1+y)^{1/y}}=\ln a.$$

所以 $$\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}-1\right)x=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}=e^{(\ln ab)/2}=\sqrt{ab}.$$

例 10 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{1/x}$, $a>0,b>0,c>0$ 和

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^{x}+a_2^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}\right)^{1/x},\ a_i>0,i=1,2,\cdots.$$

解 利用例 9 的方法.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{a^{x}+b^{x}+c^{x}}{3}-1}\right)\left(\frac{a^{x}-1+b^{x}-1+c^{x}-1}{3x}\right)}$$

$$=\sqrt[3]{abc}.$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}-1\right)\right]^{\left(\frac{1}{\frac{a_1^{x}+\cdots+a_n^{x}}{n}-1}\right)\left(\frac{a_1^{x}-1+\cdots+a_n^{x}-1}{nx}\right)}$$

$$=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

例 11 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

解 将原式分解后凑成重要极限形式.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+a}}\cdot\frac{(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{x+b}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}1\Big/\left[\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{x+a}\cdot\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{x+b}\right]$$

$$=\frac{1}{e^a\cdot e^b}=e^{-(a+b)}.$$

例12 求$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]x$.

解 将原式进行拆、拼变形,化为重要极限形式.

$$原式=\lim_{x\to+\infty}[(x+1)\ln\frac{x+2}{(x+1)^2}+\ln(x+2)$$

$$+(x+1)\ln x-\ln x]x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[(x+1)\ln\frac{(x+2)x}{(x+1)^2}+\ln\frac{x+2}{x}\right]x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[(x^2+x)\ln\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\right]+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left\{\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{(x+1)^2}\left[1-\frac{1}{(x+1)^2}\right]^{-(x+1)^2\cdot\frac{1}{x+1}}\right\}$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2\cdot2}$$

$$=\ln e^{-1}+\ln e^2=-1+2=1.$$

二、无穷小量与无穷大量

例 13 证明下列关系式:

(1) $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}\sim\dfrac{1}{4}x^3(x\to0)$;

(2) $\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}\ (x\to\infty)$.

解 按定义求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3/4}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})/4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x})/4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot x^2/2}{x^3/2} = 1.$$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}} = 1.$

所以,题(1)、题(2)所示关系式成立.

例 14 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是关于 $x-a$ 的 p 级和 q 级无穷小,求 $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ 关于 $x-a$ 的无穷小的级.

解 设 $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} = \alpha \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-b)^q} = \beta \neq 0$.

(1) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^t}$

$$= \lim \frac{f(x)}{(x-a)^p}(x-a)^{p-t} \pm \frac{g(x)}{(x-a)^q}(x-a)^{q-t}.$$

因为
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p}(x-a)^{p-t} = \begin{cases} 0, & t < p, \\ \alpha, & t = p, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{(x-a)^q}(x-a)^{q-t} = \begin{cases} 0, & t < q, \\ \beta, & t = q, \end{cases}$$

故
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^t} = \begin{cases} \alpha \neq 0, & t = p = \min(p,q) < q, \\ \beta \neq 0, & t = q = \min(p,q) < p. \end{cases}$$

则 $f(x) \pm g(x)$ 是关于 $x-a$ 的 $t(t = \min(p,q))$ 阶无穷小.

当 $p = q$ 时,有

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) \pm g(x)}{(x-a)^p} = \alpha + \beta \neq 0 \ (\alpha + \beta \neq 0),$$

这时 $f(x) \pm g(x)$ 是关于 $x-a$ 的 $p(p = q)$ 阶无穷小.

(2) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)g(x)}{(x-a)^{p+q}} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p} \cdot \frac{g(x)}{(x-a)^q} = \alpha\beta \neq 0,$

故 $f(x)g(x)$ 是关于 $(x-a)$ 的 $p+q$ 阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)/g(x)}{(x-a)^{p-q}}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(x-a)^{p}}\Big/\dfrac{g(x)}{(x-a)^{q}}=\dfrac{\alpha}{\beta}\neq 0$,

故 $f(x)/g(x)$ 是关于 $(x-a)$ 的 $p-q(p>q)$ 阶无穷小.

例 15 证明:当 $x\to a$ 时,有

(1) $o[f(x)]\cdot o[g(x)]=o[f(x)g(x)]$;

(2) $O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$;

(3) $o\{O[f(x)]\}=o[f(x)]$;

(4) $O\{o[f(x)]\}=o[f(x)]$.

其中 $o[f(x)]$ 表示是关于 $f(x)$ 的高阶无穷小,$O[f(x)]$ 表示是关于 $f(x)$ 的高阶无穷大.

证 (1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o[f(x)]o[g(x)]}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o[f(x)]}{f(x)}\cdot\dfrac{o[g(x)]}{g(x)}=0$,

故
$$o[f(x)]o[g(x)]=o[f(x)g(x)].$$

(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O[f(x)]O[g(x)]}{f(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O[f(x)]}{f(x)}\cdot\dfrac{O[g(x)]}{g(x)}=A\neq 0$,

故
$$O[f(x)]\cdot O[g(x)]=O[f(x)g(x)]$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]}\cdot\dfrac{O[f(x)]}{f(x)}=0$,

故
$$o\{O[f(x)]\}=o[f(x)].$$

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{O\{o[f(x)]\}}{o[f(x)]}\cdot\dfrac{o[f(x)]}{f(x)}=0$,

故
$$O\{o[f(x)]\}=o[f(x)].$$

例 16 利用等价无穷小代换求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\sqrt[n]{1(x-2\pi)^2}-1}{1-\cos x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-e^{x/3}}{\ln(1+2x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x})$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1}$; (6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x\sin x^3}$.

解 (1) 因为 $\sqrt[n]{1+(x-2\pi)^2}\sim 1+\dfrac{1}{n}(x-2\pi)^2$, $1-\cos$

$= 1 - \cos(2\pi - x) \sim (2\pi - x)^2/2 = (x - 2\pi)^2/2$,所以

$$\lim_{x\to 2\pi}\frac{\sqrt{1+(x-2\pi)^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 2\pi}\frac{(x-2\pi)^2/n}{(x-2\pi)^2/2} = \frac{2}{n}.$$

(2) 因为 $\sqrt{1+x} \sim 1+\frac{x}{2}$,$e^{x/3} \sim 1+\frac{x}{3}$,$\ln(1+2x) \sim 2x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-e^{x/3}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x/2-1-x/3}{2x} = \frac{1}{12}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x})$

$$= \lim_{x\to\infty} x^2\left[\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)-\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}}-1\right)\right].$$

因为$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}} \sim 1+\frac{1}{3x^2}$,$\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^2}} \sim 1-\frac{1}{3x^2}$,所以

$$\lim_{x\to\infty} x(\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt{x^3-x}) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}.$$

(4) 因为 $\tan^4 x \sim x^4$,$1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$,$\sin^3 x \sim x^3$,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\tan^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot x^4}{x^3\cdot x^2/2} = 2.$$

(5) 因为 $\sqrt{1+\tan x} \sim 1+\frac{x}{2}$, $\sqrt{1-\tan x} \sim 1-\frac{x}{2}$,$e^x - 1 \sim x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x/2-1+x/2}{x} = 1.$$

(6) 因为 $1-\cos x^2 \sim \frac{x^4}{2}$,$\sin x^3 \sim x^3$,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x^2}{x\sin x^3} = \lim\frac{x^4/2}{x\cdot x^3} = \frac{1}{2}.$$

例 17 利用等价无穷小求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-(1-\cos\sqrt{x})}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

解　(1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2/2}{x\cdot(\sqrt{x})^2/2\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\sin x}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}$.

因为 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x-\dfrac{1}{3!}x^3\Rightarrow x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{3!}$，$\sin x\sim x$，所以

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/3!}{x^3}\cdot\cos x=\frac{1}{6}.$$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{2\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{3\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}\right).$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$ 是无穷小与有界量的乘积，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\frac{3}{2}+0=\frac{3}{2}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$.

因为 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x+\dfrac{x^3}{3}\Rightarrow\tan x-x\sim\dfrac{x^3}{3}$，$\tan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3/2}{x^2\cdot x}=\frac{1}{3}.$$

例 18　已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+ax^2+b}{x-1}=5$，求 a,b 的值.

解　由极限与无穷小量的关系，得

$$\frac{x^3+ax^2+b}{x-1}=5+\alpha(x),$$

其中

$$\alpha(x)\xrightarrow{x\to 1}0.$$

故　　$\lim\limits_{x\to 1} x^3 + ax^2 + b = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)(5+\alpha(x)) = 0.$

又　　$\lim\limits_{x\to 1} x^3 + ax^2 + b = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0,$

于是

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2+b}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax^2-(1+a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^3-1)+a(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}x^2+x+1+ax+a=2a+3=5.$$

所以　　$a = 1,\quad b = -1 - a = -2.$

例 19　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}\right)^n$, $x\neq 0$.

解　令 $\cos\dfrac{x}{n}+\lambda\sin\dfrac{x}{n}=1+\dfrac{x_n}{n}$,则

$$x_n = n\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}-1\right)$$
$$=\lambda x\frac{\sin(x/n)}{x/n}-x\frac{1-\cos(x/n)}{x/n}$$
$$=\lambda x\frac{x/n}{x/n}-x\frac{(x/n)^2/2}{x/n}.$$

所以　　$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda x.$$

又　　$$\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{n/x_n}\right]^{x_n},$$

故　　$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n=e^{\lambda x}.$$

例 20　设当 $x\to 0$ 时,$(1+\alpha x^2)^{1/3}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小,求常数 α.

解　因为当 $x\to 0$ 时,$1-\cos x\sim x^2/2$,$(1+\alpha x^2)^{1/3}-1\sim\alpha x^2/3$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x^2)^{1/3}}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha x^2/3}{-x^2/2}=-2\alpha/3=1.$$

从而　　$\alpha = -3/2.$

例 21　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2(a^{1/x}-a^{1/(x+1)})$;　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{1+\sin x}{\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)-\ln\cos x}{\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x}{\sin x}.$$

因为当$x\to 0$时,$\ln(1+\sin x)\sim\sin x\sim x$,$\ln\cos^2 x=\ln(1-\sin^2 x)$ $\sim-\sin^2 x\sim -x^2$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sec x+\tan x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}-\frac{1}{2}\lim\frac{-x^2}{x}=1-0=1.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\sin x}\dfrac{e^{\tan x-\sin x}-1}{\tan x-\sin x}$.

因为当$x\to 0$时,$e^{\tan x-\sin x}-1\sim\tan x-\sin x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{\sin x}}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\sin x}\cdot\lim\frac{e^{\tan x-\sin x}}{\tan x-\sin x}=e^0\cdot 1=1.$$

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to +\infty}a^{1/(x+1)}\dfrac{a^{1/x-1/(x+1)}-1}{(1/x)^2}$

$$=\lim a^{1/(x+1)}\frac{a^{1/x(x+1)}-1}{(1/x)^2}.$$

因为当$x\to +\infty$时,$\dfrac{1}{x^2}\sim\dfrac{1}{x(x+1)}$,$a^{1/x(x+1)}-1\sim\dfrac{1}{x(x+1)}\ln a$ $\sim\dfrac{1}{x^2}\ln a$,所以

$$\lim_{x\to +\infty}x^2(a^{1/x}-a^{1/(x+1)})=\lim_{x\to +\infty}a^{1/(x+1)}\frac{(1/x^2)\ln a}{(1/x^2)}$$
$$=1\cdot\ln a=\ln a.$$

(4) 因为当$x\to 0$时,$e^{\sin x}-1\sim\sin x\sim x$,$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2 x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\cos x\frac{x^4}{x^2\cdot x^2/2}=2.$$

例 22 设$f,g:A\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是两个函数,且$\forall x\in A,f(x)>$

0，则称形如 $f(x)^{g(x)}$ 的函数为幂指函数. 若 $\lim f(x)=1,\lim g(x)=\infty$，则称极限 $\lim f(x)^{g(x)}$ 属于 1^{∞} 型不等式，可以利用等式

$$f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x)\ln f(x)}$$

转化为 $0\cdot\infty$ 型未定式 $g(x)\ln f(x)$ 的极限问题.

(1) 设 $g_1(x)\sim g_2(x)$，证明：若 $\lim f(x)^{g_1(x)}$ 存在，则

$$\lim f(x)^{g_2(x)}=\lim f(x)^{g_1(x)}.$$

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$，证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b.$$

(3) 求下列极限：

1° $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}$；　　　2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

证　(1) 若 $\lim f(x)^{g_1(x)}$ 存在，则 $\lim \mathrm{e}^{g_1(x)\ln f(x)}$ 存在，即 $\lim g_1(x)\ln f(x)$ 存在. 由等价无穷小代换得

$$\lim g_2(x)\ln f(x)=\lim g_1(x)\ln f(x),$$

所以
$$\lim \mathrm{e}^{g_2(x)\ln f(x)}=\lim \mathrm{e}^{g_1(x)\ln f(x)},$$

即
$$\lim f(x)^{g_2(x)}=\lim f(x)^{g_1(x)}.$$

(2) 令 $f(x)^{g(x)}=y$，则 $\ln y=g(x)\ln f(x)$，故有

$$\lim_{x\to x_0}\ln y=\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x),$$

即
$$\ln\left(\lim_{x\to x_0}y\right)=\lim_{x\to x_0}g(x)\lim_{x\to x_0}\ln f(x),$$

从而
$$\ln\left(\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}\right)=b\ln a\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=a^b.$$

(3) 1° 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1-\sin x)}$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{x}=-1,$$

故
$$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{1/x}=\mathrm{e}^{-1}.$$

2° 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^2\ln\cos\frac{1}{x}}$，而

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}{1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}-1}{1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1/x^2)\cdot 1/2}{1/x^2}=-\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{-1/2}.$$

第四节　连续函数

主要内容

1. 函数 f 在点 x_0 连续的三个等价定义：

(1) 函数 f 在 $U(x_0)$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(3) $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时，总有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

2. 设函数 f 在 $U^+(x_0)$（或 $U^-(x_0)$）内有定义，且

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)\right),$$

则称函数 f 在点 x_0 右连续(或左连续).

函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是：函数 f 在点 x_0 左、右连续.

3. 若函数 f 在点 x_0 不连续，则称 x_0 为 f 的间断点.

(1) 在 x_0 处 f 左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，包括

1° 可去间断点　　存在 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，但 f 在 x_0 无定义，或 $f(x_0)\neq A$.

2° 跳跃间断点　在 x_0 左、右极限存在，但 $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

(2) 在 x_0 处 f 左、右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

4. 若函数 f 在区间 I 上每一点都连续，则称 f 为 I 上的连续函数.

5. 连续函数的局部性质

(1) 局部有界性　若函数 f 在 x_0 连续，则函数 f 在 x_0 的某邻域内有界.

(2) 局部保号性　若函数 f 在 x_0 连续，且 $f(x_0) \neq 0$，则 f 在 x_0 的某邻域内与 $f(x_0)$ 同号. 且 $\exists\ \gamma > 0$，使在 $U(x_0)$ 内，$|f(x)| > \gamma > 0$.

(3) 四则运算　若函数 f, g 在点 x_0 都连续，则 $f \pm g, f \cdot g, f/g\ (g(x_0) \neq 0)$ 在 x_0 仍连续.

(4) 复合性　若函数 f 在点 x_0 连续，g 在点 u_0 连续，且 $u_0 = f(x_0)$，则复合函数 $f \circ g$ 在 x_0 连续.

6. 有界性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

7. 最值定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上取得最大值和最小值.

8. 介值性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2 \in [a,b]$，且 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则 f 可取到介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间的每一个值.

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内至少存在一点 x_0，使 $f(x_0) = 0$.

9. 反函数连续性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调增加(或单调减少) 且连续，则反函数 f^{-1} 在其相应定义域 $[f(a), f(b)]$(或 $[f(b), f(a)]$) 上连续.

10. 设函数 f 定义在 I 上，$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，使对于一切 x', x''

$\in I$,只要 $|x'-x''|<\delta$,就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 则称 f 在 I 上一致连续.

11. 一致连续性定理　若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,则在 f 上一致连续.

疑难解析

1. 为什么要研究连续函数?

答　连续函数有许多优点:

(1) 有广泛的应用. 自然界和科学技术中的许多问题可以用连续函数来描述.

(2) 有优良的局部性质. 当我们研究一点 x_0 附近(某邻域内)函数性质时,连续函数的局部有界性与局部保号性会给研究以很大的便利.

(3) 便于计算函数的极限. 当函数连续时,极限记号与函数记号可以交换;即运算“f”与“lim”可以交换顺序,$\lim f(x)=f[\lim x]$. 尤其在复合函数情形时效果更为显著.

(4) 闭区间上连续函数具有优良的整体性质,如有界性、取最值性、介值性和一致连续性. 数学分析中很多问题的研究证明要应用这些性质来进行.

2. 在区间上函数 f 连续与一致连续有什么不同?

答　在区间上函数连续与一致连续有重大的差别. 从两者定义上可以看出:对于 f 连续来说,当 ε 给定时,对不同的 $x\in I$,相应的 δ 不仅与 ε 有关,还与 x 有关;而对于 f 一致连续情形,当 ε 给定时,相应的 δ 只与 ε 有关而与 x 无关.

连续函数在区间 I 上的一致连续性是函数在 I 上整体变化情况的一种衡量. 如果连续函数的图像在每个局部都比较平缓,即其陡势受到控制,函数可能是一致连续,所以可以通过图像对函数的一致连续性作一初步估计.

方法、技巧与典型例题分析

连续性和一致连续性概念是数学分析的主要理论基础，因此，利用连续性和一致连续性来证明命题，是检验对概念的理解程度好坏的方法. 一般都采用直接证明的方法进行，有时也采用反证法进行.

一、连续函数概念的命题

例 1 设函数 $f(x)$ 对一切 $x_1, x_2 \in I$，满足等式 $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，证明：$f(x)$ 在任意 $x \in I$ 连续.

证 在等式 $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ 中令 $x_2 = 0$，则

$$f(x_1) = f(x_1) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

又由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性，有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = f(0) = 0$. 而由所给等式

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(x_0) + f(\Delta x) - f(x_0) = f(\Delta x),$$

取 $\Delta x \to 0$ 的极限，即得

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = 0,$$

所以，$f(x)$ 在任意点 $x_0 \in I$ 连续.

例 2 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，且 $f(x_0) > 0$，证明：$\exists\, \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) > 0$.

证 取 $\varepsilon = f(x_0) > 0$，则由于 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续，$\exists\, \delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = f(x_0)$. 从而

$$f(x) > f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

例 3 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) 若对任何有理数 $r \in [a,b]$，有 $f(r) = 0$，则在 $[a,b]$ 上，$f(x) \equiv 0$.

(2) 若对任何有理数 $r_1, r_2 \in [a,b]$，$r_1 < r_2$，有 $f(r_1) < f(r_2)$，

则 f 在$[a,b]$上严格递增.

证 (1)对任何无理数$x_0\in[a,b]$,取有理点列$\{r_n\}\subset[a,b]$,使$r_n\to x_0(n\to+\infty)$,则

$$f(x_0)=\lim_{n\to+\infty}f(r_n)=0.$$

由x_0的任意性和$f(r)=0$知,$f(x)\equiv 0$.

(2)对任意$x_1,x_2\in(a,b)$,$x_1<x_2$,取有理数$r_1,r_2\in(x_1,x_2)$,$r_1<r_2$,则由f的连续性知,对$\varepsilon=\frac{1}{2}[f(r_2)-f(r_1)]>0$,$\exists\ \delta>0$(可设$\delta=\min\{r_1-x_1,x_2-r_2\}$),使对于$r_1'\in(x_1,x_1+\delta)$及$r_2'\in(x_2-\delta,x_2)$,且$r_1',r_2'$为有理数,有

$$f(x_1)<f(r_1')+\varepsilon,\quad f(x_2)>f(r_2')-\varepsilon.$$

因为$r_1'<r_1<r_2<r_2'$,故由f在有理点上的严格递增和上面给出的不等式,有

$$f(x_1)<f(r_1')+\varepsilon<f(r_1)+\varepsilon=f(r_2)-\varepsilon<f(r_2')-\varepsilon<f(x_2),$$

由$x_1<x_2$和x_1,x_2的任意性知,f在$[a,b]$上严格递增.

例 4 证明:若函数f和g是连续的,则函数$\varphi=\min\{f,g\}$和$\psi=\max\{f,g\}$也是连续的.

证 (1)$\forall\ x_0\in I$,若$f(x_0)\neq g(x_0)$,不妨设$f(x_0)>g(x_0)$,由f和g的连续性得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=f(x_0)-g(x_0)>0,$$

即$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$当$|x-x_0|<\delta$时,总有

$$f(x)-g(x)>0,\quad 即\quad f(x)>g(x).$$

所以,当$|x-x_0|<\delta$时,有

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}=g(x)$$

和
$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|g(x)-g(x_0)|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

所以,当$f(x_0)\neq g(x_0)$时,$\varphi(x)$在x_0连续.

若$f(x_0)=g(x_0)$,则$\varphi(x_0)=f(x_0)=g(x_0)$,由$f$和$g$的连

续性知，$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，

$$|f(x) - \varphi(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

与
$$|g(x) - \varphi(x_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

同时成立，于是 $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ 成立. 所以 $f(x_0) = g(x_0)$ 时，$\varphi(x)$ 在 x_0 也连续.

由 x_0 的任意性知，$\varphi = \min\{f, g\}$ 是连续函数.

(2) 类似可证. 请读者一试.

例 5 区间 (a,b) 内单调函数的不连续点必为第一类间断点.

证 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（单调减少可类似证明）. 任取 $x_0 \in (a,b)$，则集合 $\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$ 有上界，且为上确界，记为 $\alpha = \sup\{f(x) | x \in (a, x_0)\}$. 对一切 $x \in (a, x_0)$，有 $f(x) \leqslant \alpha$.

而 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ x' \in (a, x_0)$，使得 $f(x') > a - \varepsilon$ 成立. 取 $\delta = x_0 - x' > 0$，则当 $-\delta > x - x_0 < 0$ 时，有 $x' < x < x_0$，于是，有

$$-\varepsilon < f(x') - a \leqslant f(x) - a \leqslant 0.$$

即
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$$

类似可证 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \beta$，其中

$$\beta = \inf\{f(x) | x \in (x_0, b)\}.$$

以上两式说明：若 x_0 是单调函数在 (a,b) 内的间断点，必为第一类间断点中的跳跃间断点.

例 6 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，且 $f(0) = 0$，已知 $|g(x)| \leqslant |f(x)|$，证明：函数 $g(x)$ 在 $x = 0$ 也连续.

证 因为 $|g(x)| \leqslant |f(x)|$，所以 $|g(0)| \leqslant |f(0)| = 0$，即 $g(0) = 0$. 又 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$，即 $\lim\limits_{x \to 0} |f(x)| = 0$，于是，有

$$0 \leqslant |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant 0 \quad (x \to 0).$$

由迫敛性知，$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)$，所以 $g(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

例 7 设函数 f 在 (a,b) 内每一点处的左、右极限都存在，又 $\forall\ x, y \in (a,b)$，有

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x)+f(y)],$$

证明:f 在(a,b) 内连续.

证 $\forall x_0 \in (a,b)$,记 $f(x_0^+) = A^+$,$f(x_0^-) = A^-$. 以下证明 $A^+ = A^- = f(x_0)$.

在不等式中令 $x = x_0$,分别取 $y \to x_0^+$ 与 $y \to x_0^-$ 时的极限,得

$$\begin{cases} A^+ \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^+, \\ A^- \leqslant \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}A^-, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A^+ \leqslant f(x_0), \\ A^- \leqslant f(x_0). \end{cases}$$

在不等式中又令 $x = x_0 + h, y = x_0 - h$,取 $h \to 0$ 时的极限,得

$$f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}(A^+ + A^-).$$

于是 $A^+ = A^- = f(x_0)$. 由 x_0 的任意性知,$f(x)$ 在(a,b) 内连续.

题给不等式是(a,b) 内 f 为凸函数的条件,因此本例又说明:对于凸函数 f,只要在(a,b) 内每一点存在左、右极限,则必为连续函数.

例 8 证明:若 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内连续,且$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在,则 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内必有界.

证 令 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,则 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists X > 0$,只要 $|x| > X$,就有 $|f(x) - A| < \varepsilon$,也就是 $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

由于 $f(x)$ 在$[-X,X]$ 上连续,则由有界性定理,$\exists M$,使 $|f(x)| \leqslant M$. 因而若取 $N = \max\{M, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$,一定有 $|f(x)| \leqslant M$,$x \in (-\infty, +\infty)$.

例 9 设 $f(x)$ 是定义在$(-\infty, +\infty)$ 上的实函数,且满足:$f(a) < c < f(b)$,则在 a,b 间存在一个 x,使 $f(x) = c$,且当 r 为有理数时,满足 $f(x) = r$ 的 x 组成一个闭集. 证明:f 是连续函数.

证 用反证法. 若 $f(x)$ 在 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ 上不连续,则

$\exists\ \varepsilon_0$ 及点列$\{x_n\}$，$x_n \to x_0$，使

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

即 $\qquad f(x_n) < f(x_0) - \varepsilon \quad$ 或 $\quad f(x_n) > f(x_0) + \varepsilon.$

若有无穷多个点$\{x_{n_i}\}$，使 $f(x_{n_i}) < f(x_0) - \varepsilon_0$，则 $\exists$ 有理数 r_i，使

$$f(x_{n_i}) < r_i < f(x_0) \quad (i = 1,2,\cdots).$$

由题设知，$\exists\ \xi_i$，使 ξ_i 在 x_0 与 x_{n_i} 之间，有 $r_i = f(\xi_i)$ $(i = 1,2,\cdots)$，而$\{\xi_i\}$ 为一个闭集. 故$\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i = x_0 \in \{\xi_i\}$. 从而 $f(x_0) = r_i$，推出矛盾.

对于若有无穷多个点$\{x_{n_j}\}$，使 $f(x_{n_j}) > f(x_0) + \varepsilon$ 的情况，可以用类似方法推出矛盾.

综上所述知，$f(x)$ 是$(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数.

例 10 设 f 是不为常数的连续周期函数，证明：f 必有最小正周期.

证 设 f 的正周期的集合为 $T = \{t|t$ 为 f 正周期$\}$，显然 $\inf T = t_0$（因为 T 有下界 0）.

设 $t_0 > 0$，根据确界的性质，存在$\{t_n\} \subset T$，使$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0$. 则由 f 的连续性，$\forall\ x \in \mathbf{R}$，有

$$f(x + t_0) = \lim_{n\to\infty} f(x + t_n) = f(x),$$

所以，t_0 是 f 的周期.

用反证法证 $t_0 \neq 0$. 若 $t_0 = 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$. 即 $\forall\ x \in \mathbf{R}$，$\exists\ \{x_n\} \to x$ $(x_n = k_n x_n + r_n, n = 1,2,\cdots$. 其中 k_n 为整数，$0 \leqslant r_n \leqslant t_n)$. 于是，由 f 的连续性

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(k_n t_n) = f(0),$$

即 $f(x) \equiv f(0)$，与假设矛盾，故 $t_0 > 0$.

由于 t_0 是 f 的正周期下界，且 $t_0 > 0$，所以 t_0 是 f 最小正周期.

例 11 设 $f(x)$ 在$(0,1)$ 内有定义，且函数 $e^x f(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在$(0,1)$ 内都是单调不减的. 证明：$f(x)$ 在$(0,1)$ 内连续.

证 先证∃ $x_0\in(0,1)$,左、右极限存在,再证它们相等.

$\forall x_0\in(0,1)$,因 $e^{-f(x)}$ 单调不减,故 $x>x_0$ 时,$e^{-f(x)}\geqslant e^{-f(x_0)}\Rightarrow e^{f(x_0)}\geqslant e^{f(x)}$,$f(x_0)\geqslant f(x)$,即 $f(x)$ 单调递减.所以,对于 $x_0\in(0,1)$,$f(x_0+0)$,$f(x_0-0)$ 都存在.

又由 $e^x f(x)$ 单调不减知:当 $x>x_0$,$e^x f(x)\geqslant e^{x_0}f(x_0)$,令 $x\to x_0^+$,则 $e^x f(x_0+0)\geqslant e^x f(x_0)\Rightarrow f(x_0+0)\geqslant f(x_0)$.在前段中,令 $x\to x_0^+$,得 $f(x_0)\geqslant f(x_0+0)$,故有 $f(x_0)=f(x_0+0)$.类似可证 $f(x_0-0)=f(x_0)$.从而知 $f(x)$ 在 x_0 连续.由 x_0 的任意性,确认 $f(x)$ 在(0,1)内连续.

例 12 证明:对于黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}, \quad q>0,\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及零}, \qquad 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

$R(x)$ 在无理点上连续,在有理点上间断.

证 任取 $x_0\in(0,1)$,则 $\forall\varepsilon>0$,由无理点的稠密性,只有有限个正整数 $q\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}$.即在(0,1)中,只有有限个有理点 $\dfrac{p}{q}$,使 $R\left(\dfrac{p}{q}\right)=\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$.于是,∃ $\delta>0$,使在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中没有有理点 $x(x\neq x_0)$,出现 $R(x)\geqslant\varepsilon$.从而,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $|R(x)|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$.

若 x_0 是无理点,则由 $R(x_0)=0$ 知,$R(x)$ 在 x_0 连续;若 x_0 是有理点,则由 $R(x_0)=\dfrac{1}{q}\neq 0$ 知,$R(x)$ 在 x_0 间断.

例 13 设 $f(x)\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x^2)=f(x)$,且 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 连续,证明:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为常数.

证 当 $x>0$ 时,因为 $f(x^2)=f(x)$,所以

$$f(x)=f(x^{1/2})=f(x^{1/4})=\cdots=f(x^{1/2^n})=\cdots,$$

故
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{1/2^n})=f(\lim_{n\to\infty}x^{1/2^n})=f(1).$$

当 $x<0$ 时，可得 $f(x)=f(x^2)=f(1)$（此时 $x^2>0$）.

当 $x=0$ 时，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(1)$.

综上所述知，$f(x)\equiv f(1)$.

例 14 确定 a,b 的值，使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

解 要 $x=0$ 为无穷间断点，应有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0.$$

故当 $a=0,b\neq 1$ 时，$x=0$ 为无穷间断点.

要 $x=1$ 为可去间断点，应有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-b/e)}{(x-a)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a},$$

即 $$e^{x-1}-\frac{b}{e}\sim x-1\Rightarrow\frac{b}{e}=1\Rightarrow b=e.$$

所以，应有 $a=0,b=e$.

例 15 讨论下面函数的连续性：

$$f(x)=\begin{cases}1/(1-e^{x/(x-1)}), & x\neq 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

若有间断点，指出其类型.

解 在 $x=0$ 与 $x=1$，$f(x)$ 无定义，所以 $x=0$ 和 $x=1$ 是间断点. 在其它点 $f(x)$ 连续. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=1,\quad \lim_{x\to 1^+}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=0.$$
$$\lim_{x\to 0^-}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}1\Big/\left(1-e^{x/(x-1)}\right)=-\infty.$$

所以，$x=1$ 是第一类间断点（跳跃间断点），$x=0$ 是第二类间断点（无穷间断点）.

例 16 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)\right]=0$，求 a,b 的值.

解 因为

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-(ax+b)=\frac{x^2+1-(ax+b)(x+1)}{x+1}$$
$$=\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1},$$

而
$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x+1-b}{x+1}=0,$$

所以，必有 $1-a=0$（否则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$）$\Rightarrow a=1$. 又

$$a+b=0（否则\lim_{x\to\infty}f(x)=-(a+b)\neq 0）\Rightarrow b=-a=-1.$$

综上所述知，要使等式成立，必须使 $a=1,b=-1$.

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-(ax+b)]=0$ 的几何意义是：直线 $y=ax+b$ 是函数 $g(x)$ 曲线的斜渐近线. 故此例说明，函数 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ 以 $y=x-1$ 为斜渐近线.

二、闭区间上的连续函数

例 17 证明：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每个函数值恰好取得两次，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续.

证 用反证法和闭区间上连续函数的介值定理证明. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，则有惟一的 $c\in[a,b]$，使 $f(a)=f(c)$. 为简单计，设 $c=b$，则 $f(a)=f(b)$.

$\forall\, x\in(a,b)$，有 $f(x)<f(a)$ 或 $f(x)>f(a)$. 取 $f(x)>f(a)$（$f(x)<f(a)$ 类似可证），则 $f(a)=f(b)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值 m. 由 f 的连续性，f 在 $[a,b]$ 必有最大值 M，依题设有 $x,y\in[a,b]$，且 $x<y$，使 $f(x)=f(y)=M$（见图 2.2）.

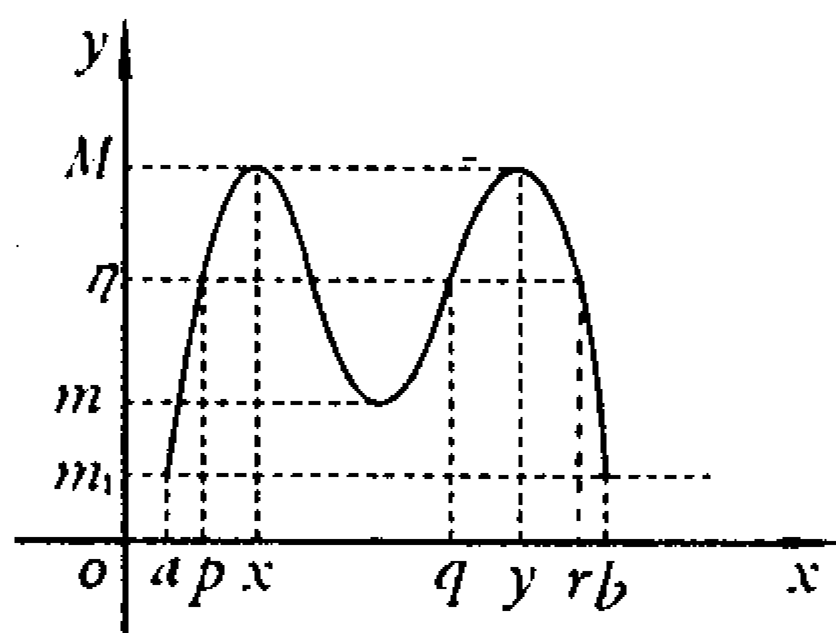


图 2.2

而 f 在 $[x,y]$ 上连续，故在 (x,y) 内 f 有最小值 m_1，使 $m<m_1<M$. 则 $\forall\,\eta\in[m_1,M]$，依连续函数的介值定理，在 $[a,x]$，$[x,y]$，$[y,b]$ 内至少各有一点 p,q,r 存在，使

$$f(p) = f(q) = f(r) = \eta.$$

推出与题设相矛盾.故可确定,f 在$[a,b]$上不是连续函数.

例 18 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,$a < c < d < b$,证明:对任意正数 p 和 q,至少有一 $\xi \in [c,d]$,使

$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$$

证 因$[c,d] \subset [a,b]$,所以 f 在$[c,d]$上连续,必在$[c,d]$上有最大值 M 与最小值 m,使

$$m \leqslant f(c) \leqslant M, \quad m \leqslant f(d) \leqslant M.$$

又因 $p > 0, q > 0$,所以

$$pm \leqslant pf(c) \leqslant pM, \quad qm \leqslant qf(d) \leqslant qM,$$

得
$$(p+q)m \leqslant pf(c) + qf(d) \leqslant (p+q)M,$$

即
$$m \leqslant \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q} \leqslant M.$$

于是,依闭区间上连续函数的介值定理,在$[c,d]$上至少有一点 ξ,使

$$f(\xi) = \frac{pf(c) + qf(d)}{p+q}.$$

从而有
$$pf(c) + qf(d) = (p+q)f(\xi).$$

例 19 设函数 $f(x)$ 在$[0,2a]$上连续,且 $f(0) = f(2a)$,证明:在$[0,a]$上至少存在一点 ξ,使 $f(\xi) = f(x+a)$.

证 令 $F(x) = f(x) - f(x+a)$,则由 $f(x)$ 在$[0,2a]$上连续知,$f(x+a)$ 在$[0,a]$上连续,所以 $F(x)$ 在$[0,a]$上连续.由于

$$F(0) = f(0) - f(a),$$

$$F(a) = f(a) - f(2a) = -[f(0) - f(a)] = -F(0),$$

故若 $f(0) - f(a) = 0$,有 $f(0) = f(a) = f(2a)$,即当 $\xi = a$ 时,有 $f(\xi) = f(\xi + a)$;若 $f(0) - f(a) \neq 0$,有 $F(0)F(a) < 0$,由零点定理,至少有一点 $\xi \in (0,a)$,使 $F(\xi) = 0$,即 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

综上所述知,在$[0,a]$上至少有一点 ξ,使 $f(\xi) = f(\xi + a)$.

例 20 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且无零点,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上恒正(或恒负).

证 用反证法.设 $f(x)$ 在$[a,b]$上不恒正(或不恒负),可设

$f(x_1)<0, f(x_2)>0, x_1, x_2 \in [a,b]$ 且 $x_1<x_2$. 由闭区间上连续函数的零点定理,至少有一点 $\xi \in (x_1,x_2)$,使 $f(\xi)=0$. 与题设 $f(x)$ 无零点矛盾. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必恒正(或恒负).

例 21 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且是一一对应的,证明:

(1) 当 $f(a)<f(b)$ 时,$f(x)$ 严格单调增加;

(2) 当 $f(a)>f(b)$ 时,$f(x)$ 严格单调减少.

证 (1) 用反证法. 设 $f(x)$ 不严格单调增加. 则 $\exists\, x_1, x_2 \in [a,b]$,且 $x_1<x_2$,而 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. 因函数是一一对应的,故必有 $f(x_1)>f(x_2)$.

若 $f(x_2)>f(a)$,依闭区间上连续函数的介值定理,$\exists\, \xi \in (a,x_1)$,使得 $f(\xi)=f(x_2)(\xi<x_1<x_2)$. 这与函数 $f(x)$ 是一一对应的矛盾.

若 $f(x_2)<f(a)$,同样知 $\exists\, \eta \in (x_2,b)$,使得 $f(\eta)=f(a)$ $(\eta>x_2 \geqslant a)$. 这也与函数 $f(x)$ 是一一对应的矛盾.

综上所述知,此时 $f(x)$ 严格单调增加.

(2) 令 $g(x)=-f(x)$,则 $g(a)<g(b)$. 由题(1) 知 $g(x)$ 严格单调增加. 故 $f(x)$ 严格单调减少.

例 22 设 $f:[0,1] \to [0,1]$ 为连续函数,$f(0)=0, f(1)=1, f[f(x)]=x$. 证明:$f(x)=x$.

证 因为 $\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$,若 $f(x_1)=f(x_2)$,则由 $f[f(x)]=x$ 知

$$x_1=f[f(x_1)]=f[f(x_2)]=x_2.$$

所以,f 是一一对应的. 现证明 f 是严格单调的,用反证法. 设 f 不严格单调,则必 $\exists\, x_1<x_2<x_3$,使得 $f(x_1)<f(x_2)$,但 $f(x_2)>f(x_3)$(或 $f(x_1)>f(x_2), f(x_2)<f(x_3)$) 下面讨论 $f(x_1)<f(x_2), f(x_2)>f(x_3)$ 的情形(括号内情形类似可证).

任取一数 c,使 $\max\{f(x_1),f(x_3)\}<c<f(x_2)$,则由闭区间上的介值定理知:$\exists\, \xi_1 \in (x_1,x_2)$ 和 $\xi_2 \in (x_2,x_3)$,使 $f(\xi_1)=c=f(\xi_2)$. 这与 f 的一一对应性矛盾,故 f 是严格单调的.

因为 $\forall x \in [0,1]$，因此要么 $f(x) \geqslant x$，因此要么 $f(x) \leqslant x$. 由于 $f(x)$ 严格单调，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，所以 $f(x)$ 是严格单调增加的. 因此，当 $f(x) \geqslant x$ 时，有

$$x = f[f(x)] \geqslant f(x);$$

当 $f(x) \leqslant x$ 时，有

$$x = f[f(x)] \leqslant f(x).$$

故总有

$$f(x) = x.$$

例 23 设函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f_1(a) < f_2(a)$，$f_1(b) > f_2(b)$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

证 引入辅助函数 $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$，则由题设条件知：$F(a) < 0$，$F(b) > 0$，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 依闭区间上连续函数的零点定理，在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $F(\xi) = 0$，即 $f_1(\xi) = f_2(\xi)$.

例 24 证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$，则在 $[x_1, x_n]$ 上必有一点 ξ，使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

证 因为 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上有最大值 M 和最小值 m，故对 x_i 有

$$m \leqslant f(x_i) \leqslant M \quad (x_i \in [x_1, x_n], i = 1,2,\cdots,n).$$

于是

$$nm \leqslant f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \leqslant nM,$$

即

$$m \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \xi \in [a,b].$$

类题 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $x_i \in (a,b)$，$i = 1,2,\cdots,n$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

证 这时，因为不知 x_i 的大小，可取区间 $[c,d]$，其中

$$c=\min\{x_i\},\quad d=\max\{x_i\}.$$

则 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 内连续且有最大值 M 和最小值 m. 仿效例 24 中的做法，得

$$\frac{n(n+1)}{2}m\leqslant f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)\leqslant\frac{n(n+1)}{2}M,$$

即
$$m\leqslant\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}\leqslant M.$$

依介值定理即得，至少有一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

例 25 设 $f(x)$ 在 $[0,n]$ 上连续，$f(0)=f(n)\ (n\in\mathbf{N})$，证明：在 $(0,n)$ 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi+1)=f(\xi)$.

证 作辅助函数 $F(x)=f(x+1)-f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上连续，且

$$F(i)=f(i+1)-f(i)\quad(i=0,1,\cdots,n-1),$$

于是
$$F(0)+F(1)+\cdots+F(n-1)=f(n)-f(0)=0.$$

记 $F(x)$ 在 $[0,n-1]$ 上的最大值为 M，最小值为 m，则由例 24 知，$m\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}F(i)\leqslant M$. 于是，由闭区间上连续函数的介值定理知，在 $(0,n-1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$F(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(i)=0,$$

即
$$f(\xi+1)=f(\xi),\ \xi\in(a,b).$$

例 26 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\forall\ x\in[a,b]$，记 $M(x)=\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}f(t)$，证明：$M(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证 任取 $x_0\in(a,b)$，则 $\forall\ x\in(a,x_0)$，有

$f(x)\leqslant\sup\limits_{a\leqslant t\leqslant x}f(t)=M(x)\leqslant M(x_0-0)$（因为 $M(x)$ 递增）

$$\Rightarrow M(x_0) = \sup_{a\leqslant t\leqslant x} f(x) \leqslant M(x_0 - 0),$$

故知 $$M(x_0 - 0) = M(x_0).$$

又，由 f 在 x_0 的连续性，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，$\forall\ h \in (0,\delta)$ 以及 $x \in (x_0, x_0 + h)$，有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \leqslant M(x_0) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in(x_0,x_0+h)} f(x) \leqslant M(x_0 + \varepsilon),$$

从而得 $M(x_0 + h) = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant x_0+h} f(x)$

$$= \max\{M(x_0), \sup_{x\in(x_0,x_0+h)} f(x)\} \leqslant M(x_0) + \varepsilon.$$

令 $h \to 0^+$，由 ε 的任意性，即得

$$M(x_0 + 0) \leqslant M(x_0) \Rightarrow M(x_0 + 0) = M(x_0).$$

所以，$M(x)$ 在 x_0 连续，即 $M(x)$ 在$[a,b]$连续.

类似可证以下命题：若 f 在$[a,b]$上连续，则 $m(x) = \min\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 和 $M(x) = \min\limits_{a\leqslant t\leqslant x}\{f(t)\}$ 在$[a,b]$上连续.

例27 定义在$\mathbf{R}$上的函数f满足：f在$x = 0$连续，且对 $x,y \in \mathbf{R}$ 有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$. 证明：(1)f 在 $\mathbf{R}$ 上连续；(2)$\forall\ x \in \mathbf{R}, f(x) = xf(1)$.

证 (1) 令 $x = y = 0$，则知 $f(0) = 0$. $\forall\ x_0 \in \mathbf{R}$，由 $f(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$ 及 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性得

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}[f(x - x_0) + f(x_0)] = f(0) + f(x_0) = f(x_0),$$

所以，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续.

(2) 以 $y = -x$ 代入，得 $f(x) = f(-x)$，即 f 为奇函数. 对正整数 p,q，反复运用等式 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，得

$$f(p) = pf(1),\quad f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1).$$

由此结果及 f 为奇函数知，对任何有理数 $r = \dfrac{p}{q}$ $(q \neq 0)$，有

$$f(r) = rf(1).$$

因此，$\forall\ x \in \mathbf{R}$，取有理数列$\{r_n\}$，$r_n \to x$ $(n \to \infty)$，可由 f 的连

续性得

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}r_nf(1)=xf(1).$$

三、一致连续性问题

例 28 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，证明：

(1) $\exists\ \delta>0$，使 $\forall\ x_0$，当 $x\in(a,b)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1$；

(2) $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 (1) 因为 $f(x)$ 一致连续，故对 $\varepsilon=1>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $x\in(a,b)\cap(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<1\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+1.$$

(2) 利用题(1) 中的 δ，把 (a,b) 分为 n 个小区间，分点为 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，使

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}(x_k-x_{k-1})<\delta.$$

取 $$M=\max_{1\leqslant k\leqslant n-1}\{f(x_k)+1\},\quad\forall\ x\in(a,b),$$

x 必落在其中一个小区间上. 则依题(1)，有

$$|f(x)-f(x_k)|<1\ (1\leqslant k\leqslant n-1),$$

或 $$|f(x)-f(x_{k-1})|<1\ (2\leqslant k\leqslant n).$$

故 $$|f(x)|\leqslant M.$$

例 29 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，证明：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证 由极限存在知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x>X$ 时，有

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故 $\forall\ x',x''\in[a,+\infty)$，当 x',x'' 均 $>X$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,X+1]$ 上连续，必在 $[a,X+1]$ 上一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_0>0$，当 $|x_2-x_1|<\delta_0$ 且 $x_1x_2\in[a,X+1]$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

设 $\delta=\min\{\delta_0,1\}$，则对于任意两个 x_1 和 x_2，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有三种情形.

(1) x_1,x_2 均 $\in[X,+\infty)$，则由第一个不等式知

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

(2) $x_1\in[X,+\infty)$，$x_2\in[a,X]$（或 x_1,x_2 所在区间互换），由 $|x_1-x_2|<\delta\leqslant 1$ 知

$$x_1\in[a,X+1],\quad x_2\in[a,X+1],$$

因此

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

(3) $x_1\in[a,X]$，$x_2\in[a,X]$，由闭区间上连续知

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

综上所述知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

例 30 函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：$\forall\ \{x_n\},\{y_n\}\in I$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

证　必要性　用定义证明. 因为 $f(x)$ 一致连续，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $x_n,y_n\in I$ 时，有

$$|x_n-y_n|<\delta\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

在已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，对于 $\delta>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，必有 $|x_n-y_n|<\delta$，因而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0.$$

充分性　用反证法. 设 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，则有 $\varepsilon_0>0$，$\forall\ \delta>0$，$\exists\ x',x''\in I$，由

$$|x'-x''|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0.$$

取 $\delta=\dfrac{1}{n}\ (n\in\mathbf{N})$，$\exists\ x_n,y_n\in I$，由

$$|x_n-y_n|<\frac{1}{n}\Rightarrow|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0.$$

这显然与 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时、有 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=0$ 矛盾.

所以 $f(x)$ 在 I 上必然一致连续.

例 31 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续,则存在正数 A,B,使 $\forall x \in \mathbf{R}$,有 $|f(x)| \leqslant A|x| + B$.

证 由 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续知,对 $\varepsilon = 1$,$\exists \delta > 0$,$\forall x',x'' \in \mathbf{R}$,若 $|x' - x''| \leqslant \delta$,则有 $|f(x') - f(x'')| < 1$.

又 $\forall x \in \mathbf{R}$,有 $x = n\delta + x_0, n \in \mathbf{Z}, x_0 \in (-\delta,\delta)$. 由 f 的连续性可知,f 在$[-\delta,\delta]$上有界. 即 $\forall x \in [-\delta,\delta]$,有 $|f(x)| \leqslant M$. 从而

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}[f(k\delta + x_0) - f((k-1)\delta + x_0)] + f(x_0)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}|f(k\delta + x_0) - f((k-1)\delta + x_0)| + |f(x_0)| \\
&\leqslant |n| + M = \frac{1}{\delta}|x - x_0| + M \\
&\leqslant \frac{1}{\delta}|x| + \frac{1}{\delta}|x_0| + M \leqslant \frac{1}{\delta}|x| + M + 1.
\end{aligned}
$$

令 $\frac{1}{\delta} = A, M + 1 = B$,即得 $|f(x)| \leqslant A|x| + B$.

例 32 证明:在区间(a,b)内的有限个一致连续函数的和与乘积在(a,b)内仍然一致连续.

证 只证两个函数的和与乘积情形,可将其结论推广到有限个函数的和与乘积情形.

(1) 设 $f(x),g(x)$ 都在(a,b)内一致连续. $\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta_1 > 0$,使对任何 $x',x'' \in (a,b)$,当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时,就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta_2 > 0$,使对任何 $x',x'' \in (a,b)$,当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时,就有 $|g(x_1') - g(x_2')| < \varepsilon$. 因此,若令 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x' - x''| < \delta$ 时,恒有

$$
\begin{aligned}
&|[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| \\
&\leqslant |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

即 $f(x)+g(x)$ 在(a,b)内一致连续.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在(a,b)内一致连续，由例 26 结论(2)，$f(x),g(x)$ 在(a,b)上有界，即

$$|f(x)|\leqslant M,\quad |g(x)|\leqslant L\ (L>0,M>0).$$

$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，对于任何 $x',x''\in(a,b)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2M},|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2L}$，所以

$$\begin{aligned}&|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&=|[f(x')-f(x'')g(x')]+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\\&<\frac{\varepsilon}{2M}M+\frac{\varepsilon}{2L}L=\varepsilon.\end{aligned}$$

因而 $f(x)g(x)$ 在(a,b)内一致连续.

例 33 证明：$f(x)=x^{\alpha}$ 在$[0,+\infty)$上当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时一致连续，当 $\alpha>1$ 时不一致连续.

证 当 $0<\alpha\leqslant 1$ 时，因为 $\forall\ x\in[0,1]$，有不等式

$$(1-x)^{\alpha}+x^{\alpha}\geqslant(1-x)+x=1,$$

得 $1-x^{\alpha}\leqslant(1-x)^{\alpha}$，由此知：$\forall\ x_1,x_2\in[0,+\infty)$ 且 $x_1>x_2$，有

$$x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}=x_1^{\alpha}\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}\right]\leqslant x_1^{\alpha}\left(1-\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha}=(x_1-x_2)^{\alpha}.$$

从而知此时 $f(x)=x^{\alpha}$ 在$[0,+\infty)$上一致连续.

当 $\alpha>1$ 时，由于

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}[(x+\eta)^{\alpha}-x^{\alpha}]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{\eta}{x}\right)^{\alpha}-1\right]\\&=\eta\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{t}=\eta\lim_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\alpha}-1}{\ln(1+t)}=\eta\alpha\ \left(t=\frac{\eta}{x}\right),\end{aligned}$$

所以，当 $\alpha>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+\eta)^{\alpha}-x^{\alpha}]=+\infty$.

故 $\forall\ \delta>0$，取充分大的 x_1 及 $x_2=x_1+\eta,0<\eta<\delta$，有

$$|x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}|>1=\varepsilon_0.$$

因而 $f(x)=x^{\alpha}$ 在$[0,+\infty)$上不一致连续.

例 34 设 $f(x)$ 在$[a,+\infty)$上一致连续，$\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$

上连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$. 证明：$\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$上一致连续.

证 (1) 由题设极限存在知：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>a$，当 $x>X$ 时，$|f(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 又由 $f(x)$ 一致连续得：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_1>0$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时，$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$. 因而 $\forall\ x',x''>X$，且 $|x'-x''|<\delta_1$，有

$$\begin{aligned}|\varphi(x')-\varphi(x'')|&\leqslant|\varphi(x')-f(x')|+|f(x')-f(x'')|\\&\quad+|f(x'')-\varphi(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

(2) 由康托尔(Cantor)定理(一致连续性)知，$\varphi(x)$ 在$[a,X+1]$上一致连续，所以对此 $\varepsilon>0$，$\exists\ \delta_2>0$，当 $x',x''\in[a,X+1]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时，有 $|\varphi(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

(3) 于是，取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x',x''\in[a,+\infty)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\varepsilon$. 即 $\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$上一致收敛.

从例 1 至例 32，我们讨论了函数的连续性，闭区间上连续函数的性质和一致连续性问题. 在这里，我们领会到：(1) 要善于准确地使用概念，从定义、性质出发进行论证；(2) 要会构造合适的辅助函数，利用辅助函数进行论证；(3) 要恰当地使用反证法，利用已知条件推出矛盾，证明命题.

最后证一个关于连续概念的应用题.

例 35 证明：若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|,\ 0<k<1,$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有惟一的不动点 a，即 $f(a)=a$.

证 符合题设条件的 f 称为压缩映射.

任取 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=f(x_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，构造一个迭代数列$\{x_n\}$. 因为

$$|x_n - x_{n-1}| = |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|$$
$$\leqslant k|x_{n-1} - x_{n-2}| = k|f(x_{n-2}) - f(x_{n-3})|$$
$$\leqslant k^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \leqslant \cdots \leqslant k^n|x_1 - x_0|.$$

所以,$\forall\, n,p \in \mathbf{N}$,有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$
$$\leqslant (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^n)|x_1 - x_0|$$
$$= \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,$$

因为 $k < 1$,所以 $\forall\, \varepsilon > 0$,$\exists\, N \in \mathbf{N}$,当 $n > N$ 时,恒有

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|.$$

由柯西收敛原理,数列$\{x_n\}$收敛,设 $x_n \to a$.

对 $x_n = f(x_{n-1})$ 两边取极限,即得 $a = f(a)$,所以 a 是 f 的一个不动点,即 a 是 $x = f(x)$ 的一个根.

再证不动点的惟一性.设另有不动点为 b,即 $b = f(b)$,则

$$|b - a| = |f(b) - f(a)| \leqslant k|b - a|,$$

知 $k \geqslant 1$,这与已知条件矛盾.故不动点惟一.

第三章　导数与微分

第一节　导数概念与求导法则

主要内容

1．设函数$y=f(x)$在x_0的某个邻域内有定义，若极限$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$存在，则称$f(x)$在$x_0$可导，其极限值称为$f(x)$在$x_0$的导数，记作$f'(x_0)$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

若$f(x)$在x_0的右极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则极限值称为$f(x)$在$x_0$的右导数，记作$f'_+(x_0)$.

若$f(x)$在x_0的左极限$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在，则极限值称为$f(x)$在$x_0$的左导数，记作$f'_-(x_0)$.

2．若$f(x)$在x_0的某邻域内有定义，则

$$f'(x_0)\text{存在}\Longleftrightarrow f'_+(x_0),f'_-(x_0)\text{存在},$$

且
$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0).$$

3．若$f(x)$在x_0可导，则f在x_0连续，反之不一定成立．如$y=|x|$在$x=0$连续，但不可导.

4．若函数$f(x)$在区间I上每一点都可导，则称f为I上的可导函数．$f'(x)$称为f在I上的导函数，简称导数，记作f'，y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

5. 基本求导法则有

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$；

(2) $(uv)' = u'v + uv'$，$(cu)' = cu'$（c 为常数）；

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$，$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$；

(4) 反函数的导数：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$；

(5) 复合函数的导数：若 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

疑难解析

1. 怎样认识函数 $f(x)$ 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义？

答　函数 f 在点 x_0 的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 切线的斜率. 因此，曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 的切线方程与法线方程分别为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

要正确认识切线与导数的关系. 即若 $y = f(x)$ 在 x_0 可导，则曲线 $y = f(x)$ 在点(x_0, y_0) 存在切线；但 $f(x)$ 在 x_0 不可导时，曲线 $y = f(x)$ 在点(x_0, y_0) 也可能存在切线，但这时切线必垂直于 x 轴. 反之，若曲线 $y = f(x)$ 在点(x_0, y_0) 不存在切线，则 $f(x)$ 在 x_0 一定不可导.

2. 在哪些情形下函数 $f(x)$ 在 x_0 连续但不可导？

答　函数 $f(x)$ 在 x_0 连续是 $f(x)$ 在 x_0 可导的必要条件，但不是充分条件. $f(x)$ 在 x_0 连续但不可导有以下几种情形：

(1) 左、右导数存在但不相等，即 $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.

(2) 左、右导数至少有一个不存在. 如

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \text{有 } f'_+(0) \text{ 不存在}, \\ 0, & x\leqslant 0, \text{有 } f'_-(0)=0. \end{cases}$$

所以在 $x=0$ 不可导.

(3) 左、右导数至少有一个为 ∞. 如 $y=\sqrt[3]{x}$ 在 $x_0=0$ 的左、右导数均为 $+\infty$, 所以在 $x=0$ 不可导.

3. 怎样理解 $f'_+(x_0)$ 和 $f'(x_0+0)$ 的区别?

答 $f'_+(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在点 x_0 的右导数, 即

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

而 $f'(x_0+0)$ 表示导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 的右极限, 即

$$f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x),$$

也表示 $f'(x)$ 在 x_0 右连续.

它们两个不一定同时存在. 如

$$f(x)=\begin{cases} \arctan\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1, \\ 0, & x=1. \end{cases}$$

因为 $x\neq 1$ 时, $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=\dfrac{1}{2}$. 而

$$\begin{aligned} f'_+(x) &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\arctan(2+\Delta x)/(-\Delta x)}{\Delta x}=-\infty. \end{aligned}$$

当 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta]$ 上连续, 且在 $(x_0,x_0+\delta)$ 可导, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=A$ 时, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的右导数存在, 且

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=A=f'(x_0+0).$$

方法、技巧与典型例题分析

一、导数概念的命题

关于导数概念的命题，主要是证明题与讨论题. 解这些题目时，必须正确运用导数、连续以及极限的有关概念，从定义出发进行论证与分析，也可以利用有关法则和性质来简化过程，使证明更加简洁.

例 1 证明：偶函数的导数是奇函数，奇函数的导数是偶函数.

证 用定义证明. 设 $f(x)=f(-x)$，且 $f(x)$ 可导，则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f[-(x-\Delta x)]-f(-x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

所以，偶函数的导数是奇函数.

用复合函数求导法则证明. 设 $f(x)=f(-x)$，且 $f(x)$ 可导，则对等式两边求导，得

$$[f(-x)]'=f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(-x)=f'(x).$$

所以，偶函数的导数为奇函数.

类似可证奇函数的导数是偶函数.

例 2 证明：若 $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x\cdot\sin 3x$，则 $f''(0)=0$.

证 因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f'(x)$ 是偶函数，$f''(x)$ 是奇函数. 由于 $f''(x)$ 曲线关于原点对称，则由 $f''(x)$ 的连续性知，$f''(0)=0$.

例 3 证明：周期函数的导数仍是周期函数，且周期不变.

证 设 $f(x+T)=f(x)$，且 $f(x)$ 可导，对等式两边求导得，$f'(x+T)=f'(x)$. 故 $f'(x)$ 仍为周期函数，且周期不变

例 4 设 $\varphi(x)$ 在点 $x=a$ 连续,问:下列函数在 $x=a$ 是否可导?(1) $f(x)=(x-a)\varphi(x)$;(2) $g(x)=|x-a|\varphi(x)$.

解 因为 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)$.

(1) 由

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x-a)\varphi(a+\Delta x)-(a-a)\varphi(a)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(a+\Delta x)=\varphi(a)\end{aligned}$$

知,$f(x)$ 在 $x=a$ 可导,且 $f'(a)=\varphi(a)$.

(2) 由

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|a+\Delta x-a|\varphi(a+\Delta x)-|a-a|\varphi(a)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|\varphi(a+\Delta x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

知,$g'_-(a)=-\varphi(a)$,$g'_+(a)=\varphi(a)$. 则当 $\varphi(a)=0$ 时,$g(x)$ 在 $x=a$ 可导,且 $g'(a)=0$;当 $\varphi(a)\neq 0$ 时,$g'_+(a)\neq g'_-(a)$,$g(x)$ 在 $x=a$ 不可导.

例 5 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义,在 $x=0$ 连续,且 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续;

(2) 设 $f'(0)=a$(常数),证明 $f(x)=ax$.

证 (1) 由题给等式,令 $x_1=x_2=0$,得 $f(0)=f(0)+f(0)$. 于是 $f(0)=0$.

又 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]&=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0.\end{aligned}$$

所以由 x_0 的任意性知:$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 又 $\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$,依导数定义有

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f'(0)=a.$$

所以由 x_0 的任意性知：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且 $f'(x)=a$. 从而 $f(x)=ax+b$，而 $f(0)=0$，故 $b=0$，即 $f(x)=ax$.

例 6 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当 } x=\dfrac{p}{q}(q>0)\text{ 为既约分数，}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在[0,1]上处处不可微.

证 由第三章第四节例4知，$R(x)$ 在有理点间断，所以 $R(x)$ 在有理点不可微.

设 $x_0\in(0,1)$ 为任一无理点列，当取无理点列 $\{x_n\}\to x_0$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0}=\lim\frac{0}{x_n-x_0}=0.$$

再取一有理点列 $\{x_n'\}\to x_0$（其中 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 为无理数，$x_n'=0.a_1\cdots a_n$ 为有理数），显然 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 有无穷多项不为零. 记第一个不为零的下标为 N，于是当 $n>N$ 时，有

$$R(x_n')=R(0.a_1\cdots a_n)>1/10^n,$$

从而
$$\left|\frac{R(x_n')-R(x_0)}{x_n-x_0}\right|=\frac{R(0.a_1\cdots a_n)}{0.0\cdots 0\,a_{n+1}}\geqslant 1.$$

得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{R(x_n'-R(x_0))}{x_n-x_0}\neq 0.$$

所以，可以确定 $R(x)$ 在无理点也不可微，即 $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可微.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$，且在 (a,b) 内有连续的右导数

$$f_+'(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'_+(\xi) = 0$.

证 若 $f(x) \equiv$ 常数，则结论显然成立.

设 $f(x) \not\equiv$ 常数. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，必在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m，则 M 与 m 至少有一个在 (a,b) 内取得. 设 $\eta \in (a,b)$，$f(\eta) = M$ ($f(\eta) = m$ 可类似讨论)，于是

$$f'_+(\eta) = \lim_{x \to \eta^+} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \leqslant 0 \quad \text{(见单调性的判别)}.$$

在 $[a,\eta)$ 内任取一点 c，由 f 在 $[c,\eta]$ 上连续，故 f 在 $[c,\eta]$ 上也有一点 η_1 达到最小值，使

$$f'_+(\eta_1) = \lim_{x \to \eta_1^+} \frac{f(x) - f(\eta_1)}{x - \eta_1} \geqslant 0 \ (a < \eta_1 < \eta).$$

由 $f'_+(\eta) \leqslant 0$，$f'_+(\eta_1) \geqslant 0$，$\eta, \eta_1 \in (a,b)$ 知，$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$f'_+(\xi) = 0.$$

例 8 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且 $\forall\ x,y \in (0,+\infty)$，都有 $f(xy) = f(x) + f(y)$. 已知 $f'(1)$ 存在，求 $f'(x)$.

解 在题给等式中令 $y = 1$，得 $f(1) = 0$.

再令 $y = 1 + \Delta x$，$0 < |\Delta x| < 1$，得 $xy = x + x\Delta x$，故

$$x\frac{f(x + x\Delta x) - f(x)}{x\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}.$$

上式两边取 $\Delta x \to 0$ 的极限，得 $xf'(x) = f'(1)$，即

$$f'(x) = -\frac{f'(1)}{x}.$$

例 9 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，且 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在，证明：$f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

证 因为 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在，且 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$，所以

$$f(0) = 0 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

于是 $$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0),$$

即 $f'(0)$ 存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

例 10 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 可微，$\alpha_n<x_0<\beta_n$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=x_0$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 因为

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}$$

$$=\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}-\frac{\alpha_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n}\cdot\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0},$$

记 $\dfrac{\beta_n-x_0}{\beta_n\alpha_n}=\lambda_n$，则 $\dfrac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}=1-\lambda_n$ 且 $0<\lambda_n,1-\lambda_n<1$，则

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lambda_n\frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}+(1-\lambda_n)\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}.$$

由 $f'(x_0)=\lambda_n f'(x_0)+(1-\lambda_n)f'(x_0)$ 得

$$\left|\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}-f'(x_0)\right|$$

$$\leqslant\lambda_n\left|\frac{f(\beta_n)-f(x_n)}{\beta_n-x_0}-f'(x_0)\right|+(1-\lambda_n)\left|\frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$\to 0$（当 $n\to+\infty$ 时），

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

本例运用了组合的技巧，这在证明过程可以使问题简单化，往往可以直接得出结论.

例 11 设 $f:I\to\mathbf{R}$ 是任一函数，$x_0\in I$，证明：$f(x)$ 在 x_0 可导 $\Longleftrightarrow$ 存在一个函数 $\varphi:I\to\mathbf{R}$，使

(1) $\forall\, x\in I, f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0)$；

(2) φ 在 x_0 连续.

此时，
$$f'(x_0)=\varphi(x_0).$$

证 **必要性** 若 $f(x)$ 在 x_0 可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在.令 $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x\neq x_0,\\ f'(x_0), & x=x_0,\end{cases}$$

于是,当 $x\neq x_0$ 时,$f(x)-f(x_0)=\varphi(x_0)(x-x_0)$;显然,当 $x=x_0$ 时上式也成立,且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

充分性 若 $\forall\, x\in I$,有 $\varphi(x)$,使得

$$f(x)-f(x_0)=\varphi(x)(x-x_0),$$

且 $\varphi(x)$ 在 x_0 连续,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0).$$

故 $f(x)$ 在点 x_0 可导,且 $f'(x_0)=\varphi(x_0)$.

例 12 若函数 $f(x)$ 在 x_0 满足李卜希兹(Lipshitz)条件

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant M|x-x_0|^{\alpha}\quad(M\text{ 为常数}),$$

则 $f(x)$ 在 x_0 可导;若 $\alpha=1$,则 $f'(x_0)$ 可能不存在.

证 若 $\alpha>1$,则由 $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant M|x-x_0|^{\alpha-1}$,得

$$\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=0.$$

因而 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)=0.$$

若 $\alpha=1$,设 $f(x)=|x|$,$x_0=0$,知 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.但此时仍有 $|f(x)-f(0)|=|x|\leqslant 2|x-0|^{\alpha}$ 成立.

二、求导法则的运用

例 13 设 $g(0)=g'(0)=0$,而

$$f(x)=\begin{cases}g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

求 $f'(0)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$,故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\sin\dfrac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\text{(零乘以有界量)}=0.$$

例 14 设 $g(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续,有

$$f(x)=\cos g(x),\quad f'(x)=\sin g(x),$$

证明:对满足 $g(x)\neq n\pi$ 的一切 x,$g(x)$ 可导,且 $g'(x)=1$.

证 设$g(x_0)\neq n\pi$,则由$g(x)$的连续性,$\exists\ \delta>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,$g(x)\neq n\pi$. 于是有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{\cos g(x)-\cos g(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]$$

$$=-\frac{1}{\sin g(x_0)}\cdot\sin g(x_0)=-1.$$

即 $g(x)$ 在不等于 $n\pi$ 的一切 x 点可导,且 $g'(x)=-1$.

例 15 已知 $f'(a)$ 存在,$f(a)\neq 0$,求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n,\quad n\text{ 为正整数}.$$

解 化为重要极限形式

$$\text{原式}=\left[1+\left(\frac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right)\right]^{1\Big/\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right]\cdot\frac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)\cdot 1/n}}.$$

因为$\left[\dfrac{f(a+1/n)}{f(a)}-1\right]\xrightarrow{n\to\infty}0$,而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+1/n)-f(a)}{f(a)\cdot 1/n}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+1/n)}{f(a)}\right]^n=e^{f'(a)/f(a)}.$$

当函数是幂指函数、若干个因式的积、商或由根式组成时,求导运算常用对数求导法. 其具体步骤是:

(1) 对 $y=f(x)$ 两边取绝对值后，再取自然对数；

(2) 将得到的等式两边分别对自变量求导；

(3) 从求导后等式中解出 y'.

在对 $y=f(x)$ 取对数后，两边对自变量 x 求导时，把 y 看作复合函数中的中间变量. 其优点是，可以把积化为和，商化为差，幂指函数化为乘积，从而使求导运算变简单.

例 16 求下列函数的导数：

(1) $y=x^{x^x}$； (2) $y=\sqrt{\dfrac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}}$；

(3) $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

解 (1) 取对数，得 $\ln y=x^x\ln x$，所以

$$y'/y=(x^x)'\ln x+x^x\cdot 1/x\Rightarrow y'=(x^x)'y\ln x+y\cdot x^{x-1}.$$

对 $y_1=x^x$ 取对数，得 $\ln y_1=x\ln x$，所以

$$y_1'/y_1=\ln x+1\Rightarrow y_1'=(x^x)'=x^x(1+\ln x).$$

故 $$y'=x^{x^x}[x^x(\ln x+\ln^2x+1/x)].$$

(2) 取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(1+x)+\ln(2+x^2)-\ln(3+x^3)]$$

所以 $$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{3x^2}{x^3+3}\right].$$

故 $$y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^3+3}}\cdot\left[\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2+2}-\frac{3x^2}{x^3+3}\right].$$

(3) 取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\frac{1}{2}\ln\sin x+\frac{1}{4}\ln(1-e^x),$$

所以 $$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{2\sin x}+\frac{-e^x}{4(1-e^x)}.$$

故 $$y'=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}\cdot\left[\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}\cot x-\frac{e^x}{4(1-e^x)}\right].$$

例 17 设函数 $f(u)$ 一阶可导，求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f\left(t+\frac{x}{a}\right)-f\left(t-\frac{x}{a}\right)\right],$$

$a\neq 0, a, t$ 与 x 无关.

解 将原式变形为导数定义形式即得.

$$\text{原式}=\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\left[\frac{f\left(t+\frac{x}{a}\right)-f(t)}{\frac{x}{a}}+\frac{f\left(t-\frac{x}{a}\right)-f(t)}{\left(-\frac{x}{a}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{a}[f'(t)+f'(t)]=\frac{2}{a}f'(t).$$

例 18 设 $f(x), g(x)$ 可导，求下列函数的导数：

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$；

(3) $y=f(\sin^2x)+f(\cos^2x)$； (4) $y=f(e^x)e^{g(x)}$.

解 本题的函数都是复合函数，因此要用复合函数求导法则. 函数又都是抽象函数，所以对中间变量的导数仍可用抽象函数表示.

(1) $y'=f'(x^2)\cdot 2x=2xf'(x^2)$.

(2) $$y'=\frac{2f(x)f'(x)+2g(x)g'(x)}{2\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}=\frac{f(x)f'(x)+g(x)g'(x)}{\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}}.$$

(3) $$y'=f'(\sin^2x)\cdot 2\sin x\cos x+f'(\cos^2x)\cdot 2\cos x(-\sin x)=\sin 2x[f'(\sin^2x)-f'(\cos^2x)].$$

(4) $$y'=f'(e^x)\cdot e^x\cdot e^{g(x)}+f(c^x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{g(x)}[e^xf'(e^x)+f(e^x)g'(x)].$$

例 19 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是常数，且 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$. 证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1.$$

证 用导数定义证明. 显然，$f(0)=0, f'(0)=(a_1\cos x+2a_2\cos x+\cdots+na_n\cos x)|_{x=0}=a_1+2a_2+\cdots+na_n$. 故只需证

$|f'(0)| \leqslant 1$. 由定义,有

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

由于 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$,所以 $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right|$. 于是

$$|f'(0)| = \left|\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}\right| = \lim_{x \to 0}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \lim_{x \to 0}\left|\frac{\sin x}{x}\right|$$

$$= \left|\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}\right| = 1.$$

故 $|f'(0)| \leqslant 1$,从而 $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1$.

例 20 设 $f(x)$ 在 x_0 可导,求

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x^4) - f(x_0)}{1 - \cos(\Delta x^2)}.$$

解 利用等价无穷小代换与导数定义,有

$$原式 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x^4) - f(x_0)}{\Delta x^4/2} = \frac{1}{2} f'(x_0).$$

例 21 设 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x}$,求 $f'(x)$.

解 利用变量代换与解方程组法. 等式两边对 x 求导,得

$$f'(x) + 2f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}. \qquad ①$$

将 x 代换成 $\frac{1}{x}$,得 $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = 3x$. 两边对 x 求导,得

$$-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + 2f'(x) = 3, \qquad ②$$

② × 2 − ①,消去 $\frac{1}{x}$ 因式,即得

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2}.$$

例 22 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$ 的导数.

解 显然,$f(x)$ 在各段上是连续的,可用求导法则直接求

出. 但在分段函数的分界点上，导数必须用定义求出. 因此，有

$$f'(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x|<1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1/e-1/e}{x-1}=0,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{-x^2}-1/e}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-1}{e(x-1)}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2e^{1-x^2}-x^2+x^2-1}{e(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}(1+x)\frac{-x^2(e^{1-x^2}-1)}{e(1-x^2)}+\lim_{x\to1}\frac{x+1}{e}.$$

由于 $x\to1^-$ 时，$e^{1-x^2}-1\sim x^2$，所以

$$f'_-(1)=-\frac{2}{e}+\frac{2}{e}=0 \quad\Rightarrow\quad f'(1)=0.$$

而 $f(x)$ 是偶函数，故 $f'(-1)=f'(1)=0$. 于是

$$f'(x)=\begin{cases}2xe^{-x^2}(1-x^2), & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant1.\end{cases}$$

例 23 设 $f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3e^{p(x-1)}+ax+b}{1+e^{p(x-1)}}$（$p$ 为不等于零的常数），问 a,b 为何值时，$f(x)$ 连续且可导.

解 去掉极限符号，就有

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x>1,\\ \dfrac{1}{2}(1+a+b), & x=1,\\ ax+b, & x<1.\end{cases}$$

若 $f_-(1)=f_+(1)=f(1)$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，即

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b).$$

可知，当 $a+b=1$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

又 $$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>1,\\ a, & x<1.\end{cases}$$

若 $f'_+(1)=f'_-(1)$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，即

$$2=a \Rightarrow b=-1.$$

所以，当 $a=2,b=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续而且可导.

例 24 利用恒等式

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$$

求出表示和式

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 恒等式两边取对数，得

$$\ln\left[\left|\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right|\right]=\ln|\sin x|-\ln\left|2^n\sin\frac{x}{2^n}\right|.$$

两边同时对 x 求导，得

$$\frac{1}{2}\,\frac{-\sin(x/2)}{\cos(x/2)}+\frac{1}{4}\,\frac{-\sin(x/4)}{\cos(x/4)}+\cdots+\frac{1}{2^n}\,\frac{-\sin(x/2^n)}{\cos(x/2^n)}$$
$$=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos(x/2^n)}{2^n\sin(x/2^n)}.$$

即 $-\left(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\right)=\cot x-\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}$，

于是 $$S_n=\frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}-\cot x.$$

由上述例题可以看出，运用求导法则不仅可以求导数和导函数，还可以求极限，证明等式与不等式. 并且还可以利用导数求连续曲线的切线方程、法线方程和验证几何命题.

例 25 确定 a,b,c,d 的值，使曲线 $y=ax^4+bx^3+cx^2+d$ 与 $y=11x-5$ 在点 $(1,6)$ 相切，经过点 $(-1,8)$，并在点 $(0,3)$ 有水平的切线.

解 依题意，曲线在点(1,6)与(0,3)有切线，得

$$(ax^4+bx^3+cx^2+d)'\Big|_{x=1}=(11x-5)'\Big|_{x=1},$$

$$(ax^4+bx^3+cx^2+d')\Big|_{x=0}=0,$$

又曲线经过点(1,6)，(−1,8)，(0,3)，有

$$a+b+c+d=6,\ a-b+c+d=8,\ d=3.$$

综上所述，得方程组

$$\begin{cases}d=3,\\ a+b+c+d=6,\\ a-b+c+d=8,\\ 4a+3b+2c=11,\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}a=3,\\ b=-1,\\ c=1,\\ d=3.\end{cases}$$

例 26 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$，求在定义域内的不可导点.

解 $f(x)=(x^2-x-2)|(x+1)(x-1)x|$

$$=(x-2)|x||x-1|[(x+1)|x+1|].$$

因为 $f_1(x)=(x+1)|x+1|$ 在 $x=-1$ 可导，$f_1'(-1)=2$；$|x|$ 在 $x=0$ 不可导，$|x-1|$ 在 $x=1$ 不可导，所以 $f(x)$ 在定义域上除 $x=0,x=1$ 两点外均可导.

例 27 设周期 $T=4$ 的函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1.$$

求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处切线的斜率.

解 $y=f(x)$ 曲线在 $x=5$ 处切线斜率 $f'(5)=f'(1)$.

由 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=1,$$

得 $$f'(1)=f'(5)=-2.$$

注意 这里用了例 3 的结论. 周期函数的导数仍为周期函

数，且周期不变.

例 28 验证函数 $f(x)=\arctan\dfrac{x+a}{1-ax}$ 与 $g(x)=\arctan x$ 在 $ax>1$ 和 $ax<1$ 内有相同的导函数，并求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的关系式.

解 在 $ax>1$ 和 $ax<1$ 内，有

$$f'(x)=1\Big/\left[1+\left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2\right]\cdot\frac{1-ax+a(x+a)}{(1-ax)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $\qquad f'(x)=g'(x)\ \Rightarrow\ f(x)-g(x)=c.$

当 $ax<1$ 时，设 $f(x)-g(x)=c_1$；

当 $ax>1$ 时，设 $f(x)-g(x)=c_2$.

设 $a>0$ ($a<0$ 类似讨论)，在 $ax<1$ 时，令 $x\to-\infty$，得

$$-\arctan\frac{1}{a}+\frac{\pi}{2}=c_1\Rightarrow c_1=\arctan a.$$

在 $ax>1$ 时，令 $x\to+\infty$，得

$$-\arctan\frac{1}{a}-\frac{\pi}{2}=c_2\Rightarrow c_2=\arctan a-\pi.$$

因此，$f(x)$ 与 $g(x)$ 有关系式

$$\arctan\frac{x+a}{1-ax}-\arctan x=\begin{cases}\arctan a, & ax<1,\\ \arctan a-\pi, & ax>1.\end{cases}$$

例 29 设 $f(x)$ 是周期 $T=5$ 的连续函数，它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to0$ 时是 x 的高阶无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导. 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

解 对关系式两边取 $x\to0$ 时的极限，得

$$f(1)-3f(1)=0\ \Rightarrow\ f(1)=0.$$

又 $\qquad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x} \frac{x}{\sin x} \right) = 8.$$

即 $$\lim_{x \to 0} \frac{f(1 + \sin x) - f(1)}{\sin x - \sin 0} + 3 \lim_{x \to 0} \frac{f(1 - \sin x) - f(1)}{(-\sin x + \sin 0)}$$
$$= f'(1) + 3f'(1) = 8 \quad \Rightarrow f'(1) = 2.$$

因为周期函数的导数仍为周期函数，且 T 不变，所以

$$f'(6) = f'(1) = 2.$$

由 $f(6) = f(1) = 0, f'(6) = 2$，得切线方程

$$y = 2(x - 6) \quad 即 \quad 2x - y - 12 = 0.$$

例 30 求下列函数的导数：

(1) $f(x) = [x]\sin\pi x$； (2) $f(x) = x\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|, f(0) = 0$；

(3) $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 (1) 当 x 不为整数时，$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi[x]\cos\pi x$.

当 x 为整数时，由导数定义有

$$f'_+(k) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[k + \Delta x]\sin\pi(k + \Delta x) - 0}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{k\sin(\pi\Delta x) \cdot \cos k\pi}{\Delta x} = k\pi(-1)^k.$$

类似可得 $$f'_-(k) = \pi(k - 1)(-1)^k.$$

(2) 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时，有

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \left|\cos\frac{\pi}{x}\right| + \frac{\pi}{x} \cdot \frac{|\cos(\pi/x)|}{\cos(\pi/x)} \cdot \sin\frac{\pi}{x}.$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时，由导数定义有

$$f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) = -\frac{2k+1}{2}\pi, \quad f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) = \frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{1}{\Delta x}\left[\Delta x\left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|\right] = \lim_{\Delta x \to 0^-} \left|\cos\frac{\pi}{\Delta x}\right|,$$

所以，$f'_-(0)$ 不存在. 类似地，$f'_+(0)$ 也不存在.

(3) 当 $x = \sqrt{2k\pi}, k = 0$ 时，有

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x}=-1.$$

当 $x=\sqrt{2k\pi}$, $k=1,2,\cdots$ 时,有

$$f'_+(\sqrt{2k\pi})=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi}+\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin[2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2]}{2\Delta x\sqrt{2k\pi}+(\Delta x)^2}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x}+1}$$

$$=+\infty.$$

类似可得 $f'_-(\sqrt{2k\pi})=-\infty$, $k=1,2,\cdots$(也可由奇偶性得),

$$f'_+(\sqrt{(2k+1)\pi})=+\infty,\ f'_-(\sqrt{(2k+1)\pi})=-\infty.$$

当 $\sqrt{2k\pi}<|x|<\sqrt{(2k+1)\pi}$, $k=0,1,2,\cdots$ 时,函数有意义,由求导法则,得

$$f'_-(x)=f'_+(x)=\frac{x\cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}.$$

例 31 设 $f(x)$ 可导,$f'(0)=1$,$y=f(x^2+\sin^2x)+f(\arctan x)$,求 $y'(0)$.

解
$$y'=f'(x^2+\sin^2x)\cdot(2x+\sin 2x)$$
$$+f'(\arctan x)\frac{1}{1+x^2},$$

由 $f'(0)=1$,得 $y'(0)=f'(0)\cdot 0+f'(0)\cdot 1=1$.

例 32 求下列函数的导数:

(1) $y=\ln\arcsin(2x)$; (2) $y=e^x(x^2+2x-1)\arcsin x$.

解 (1) 用复合函数求导法则,得

$$y'=\frac{1}{\arcsin(2x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\cdot 2=\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin(2x)}.$$

(2) 用积的求导法则,也可用取对数求导法取

$$\ln y = x + \ln(x^2 + 3x - 1) + \ln\arcsin x.$$

$$\frac{1}{y}y' = 1 + \frac{2x+3}{x^2+3x-1} + \frac{1}{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = [e^x(x^2+3x-1) + e^x(2x+3)]\arcsin x + e^x\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= e^x(x^2+5x+2)\arcsin x + e^x\frac{x^2+3x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 33 讨论函数 $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的导数.

解 由复合函数求导法则,有

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{|x|}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \begin{cases} 1/\sqrt{1-x^2}, & -1 < x < 0, \\ -1/\sqrt{1-x^2}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt{1-x^2}-\pi/2}{x},$$

显然,当 $x \to 0$ 时,$y \to 0^-$. 这里

$$y = \arcsin\sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2}, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right],$$

则有 $$x = \begin{cases} \sin y, & -1 < x < 0 \\ -\sin y, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \begin{cases} \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{y}{\sin y} = 1, & x < 0, \\ \lim\limits_{y\to 0^-}\dfrac{-y}{\sin y} = -1, & x > 0. \end{cases}$$

从而知上述极限不存在,所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不可导.

例 34 证明:若函数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 在点 x 均可导,且 $f_i(0) \neq 0$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 设 $g(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$,则函数 $g(x)$ 也在点 x 可导,且

$$g'(x) = g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right].$$

证 由乘积的导数公式,得

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{i=1}^{n} f_1(x)f_2(x)\cdots f_i'(x)\cdots f_n(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot \frac{f_1(x)f_2(x)\cdots f_i'(x)\cdots f_n(x)}{f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)} \\ &= g(x)\left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right]. \end{aligned}$$

第二节 隐函数与参数方程确定函数的导数

主要内容

1. 方程 $F(x,y)=0$ 决定一个 y 关于 x 的函数 $y=y(x)$,称为隐函数.隐函数常用两种方法求导.

(1) 对方程 $F(x,y)=0$ 两边关于 x 求导,因 y 是 x 的函数,用复合函数求导法则进行.然后从等式中解出 y'.

(2) 对方程 $F(x,y)=0$ 两边求微分,利用一阶微分形式不变性,把 y 视作自变量,得含 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 的等式,再解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设 $y=y(x)$ 的函数关系由参数形式

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

确定.$\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上可微,$\varphi(t)$ 在 (t_0,t_1) 上严格单调,且 $\varphi'(t)\neq 0$,则由反函数求导法则和复合函数求导法则,有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

疑难解析

1. 怎样求极坐标方程 $r=f(\theta)$ 给出曲线 C 在曲线上点 $M(\theta,f(\theta))$ 处切线的斜率和过 M 点的切线与向径 oM 的夹角?

答　求极坐标方程 $r=f(\theta)$ 给出的曲线 C 在曲线上点 $M(\theta,f(\theta))$ 处切线的斜率,就是求 $r=f(\theta)$ 转化的显式方程 $y=f(x)$ 在对应点 (x,y) 的导数.

由 $r=f(\theta)$ 得到以 θ 为参数的方程

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\cos\theta, \end{cases} \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2.$$

于是

$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} = \frac{f'(\theta)\tan\theta + f(\theta)}{f'(\theta) - f(\theta)\tan\theta}.$$

从图 3.1 可以看出,过点 M 的切线与 oM 的夹角 φ 满足

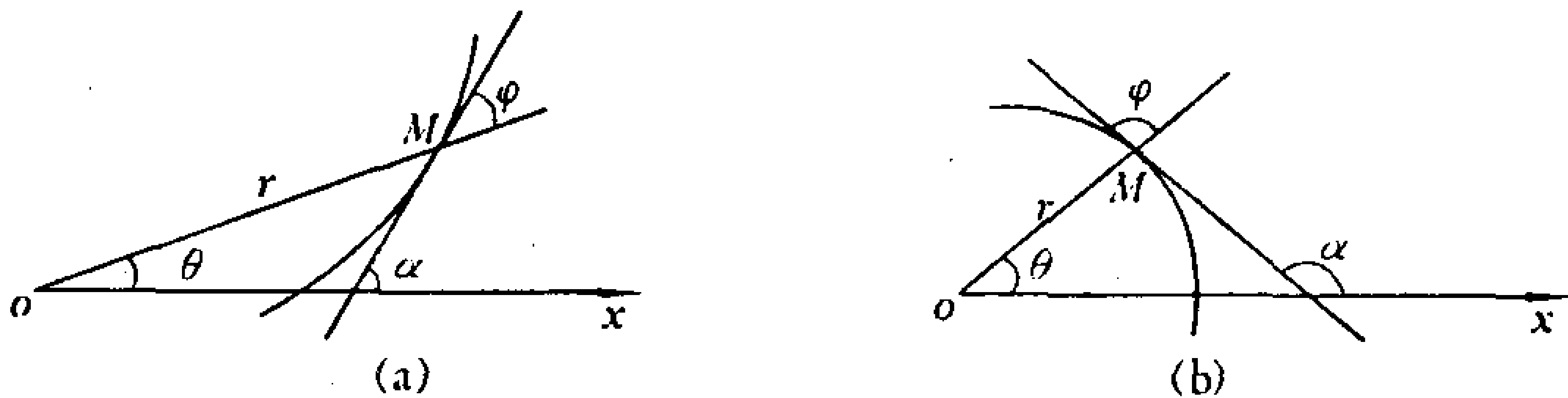


图 3.1

$$\tan\varphi = \tan(\alpha - \theta) = \frac{\tan\alpha - \tan\theta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\theta} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

即

$$\varphi = \arctan\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}.$$

2. 若曲线 C 的参数方程 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 在 t_0 都可导,但 $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=0$,问:曲线在点 $(\varphi(t_0),\psi'(t_0))$ 有什么几何性质? 若只有一个导数等于零呢?

答　当 $\varphi'(t_0)=\psi'(t_0)=0$ 时,有 $[\varphi'(t_0)]^2+[\psi'(t_0)]^2=0$,

这时点$(x_0,y_0)=(\varphi(t_0),\psi(t_0))$是曲线$C$的奇异点.

如,星形线(见图 3.2)的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0.$$

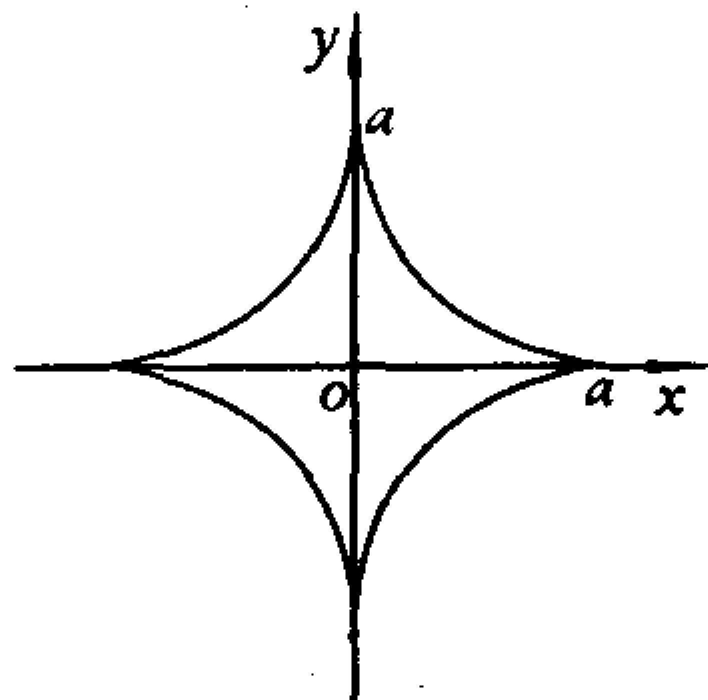


图 3.2

有
$$x'(t)=-3a\cos^2 t\sin t,$$
$$y'(t)=3a\sin^2 t\cos t.$$

显然,当$t_0=0,\pi/2,\pi,3/2\pi$时,$x'(t_0)=y'(t_0)=0$. 所以,点$(a,0),(0,a),(-a,0),(0,-a)$都是星形线的奇异点. 从星形线的图形知,这四个点又是星形线的尖点. 一般地,尖点是奇异点,但奇异点不全是尖点.

当$\varphi'(t_0)\neq 0$,而$\psi'(t_0)=0$时,由于在t_0的邻域内存在反函数$t=\varphi^{-1}(x)$,故$\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}=0$,即曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$有水平(平行于$x$轴)的切线.

当$\varphi'(t_0)=0$,而$\psi'(t_0)=0$时,$\tan\alpha=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\infty$,即曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$有竖直(平行于$y$轴)的切线.

以上两种情形都有$[\varphi'(t_0)]^2+[\psi'(t_0)^2]\neq 0$,所以曲线$C$在点$(\varphi(t_0),\psi(t_0))$存在切线.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数的导数

在主要内容 1 中,我们已经指出了隐函数求导的两种方法. 当隐函数为幂指函数时,我们还可用取对数求导法来进行.

例 1 求下列隐函数的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (2) $\mathrm{e}^{xy}+x^2y-1=0$;

(3) $x^y = y^x$；　　　　　　　　(4) $\cos(xy) = x^3y^3$.

解　(1) 用复合函数求导法则，有

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy'),$$

解得
$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x+y}{x-y}.$$

(2) 对等式两边求微分，因为

$$\mathrm{d}e^{xy}=e^{xy}\mathrm{d}(xy)=e^{xy}(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x),$$

$$\mathrm{d}(x^2y)=2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y,$$

所以
$$(e^{xy}+x)x\mathrm{d}y+(e^{xy}+2x)y\mathrm{d}x=0,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(e^{xy}+2x)y}{(e^{xy}+x)x}.$$

(3) 用取对数求导法，有

$$y\ln x=x\ln y,$$

$$y'\ln x+\frac{y}{x}=\ln y+\frac{x}{y}y',$$

解得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y-x\ln y}{x-y\ln x}=\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}.$$

(4) 对等式两边求微分，有

$$\mathrm{d}\cos(xy)=\mathrm{d}(x^3y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)\mathrm{d}(xy)=y^3\mathrm{d}(x^3)+x^3\mathrm{d}(y^3)$$

$$\Rightarrow -\sin(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=3x^2y^3\mathrm{d}x+3x^3y^2\mathrm{d}y,$$

得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y\sin(xy)+3x^2y^3}{x\sin(xy)+3x^3y^2}$$

$$=-\frac{y}{x}\cdot\frac{\sin(xy)+3x^2y^2}{\sin(xy)3x^2y^2}=-\frac{y}{x}.$$

例 2　设 $y=f(x+y)$，其中 f 二阶可导，且其一阶导数不等于 1，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解　等式两边对 x 求导，得

$$y'=f'(x+y)(1+y')\Rightarrow y'=\frac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}.$$

上式两边再次对 x 求导，得

$$y'' = f''(x+y)(1+y')^2 + f'(x+y)y''$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{f''(x+y)(1+y')^2}{1-f'(x+y)}.$$

将 y' 代入上式，有

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)]^3}.$$

例 3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x=4$ 确定，求$\frac{dy}{dx}$.

解 将方程改写为 $e^{y^2\ln x}+y^2\ln x=4$，进行变量代换，令 $u=y^2\ln x$，则有 $e^u+u=4$.

对 x 求导，得$(e^u+1)\frac{du}{dx}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=0$，即

$$2y\cdot y'\ln x+\frac{y^2}{x}=0\Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{2x\ln x}.$$

此例说明，在解题过程中加强观察，可能会找到简便的解法.

例 4 设 $y=y(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$$

所确定的隐函数，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解 两个方程分别对 t 求导，得

$$\begin{cases} x'_t=6t+2, \\ y'_t=\frac{e^y\cot t}{1-e^y\sin t}=\frac{e^y\cos t}{2-y}, \end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t+1)}.$$

故

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{e^y\cos t}{2(2-y)(3t-1)}\right]\Big/\frac{dx}{dt}$$

$$=\frac{e^y(3t+1)[(3-y)y'_t\cos t-(2-y)\sin t]-3(2-y)e^y\cos t}{4(3t-1)^3(2-y)^2}.$$

例 5 设 $\arcsin x\cdot\ln y-e^{2x}+\tan y=0$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对 x 求导，得

$$\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\arcsin x}{y}y'-2e^{2x}+\frac{1}{\cos^2 y}y'=0,$$

解得　$$y'=\left[2e^{2x}-\frac{\ln y}{\sqrt{1-x^2}}\right]\Bigg/\left[\frac{\arcsin x}{y}+\frac{1}{\cos^2 y}\right].$$

由于 $x=0$ 时，$y=\frac{\pi}{4}$，故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=1-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{4}.$$

二、参数方程确定函数的导数

例 6　设摆线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$$

(1) 求摆线上任一点 P 处切线与法线的斜率；

(2) 求方程确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解　(1) $$k_{切}=\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$k_{法}=-1\Big/k_{切}=-\frac{1-\cos t}{\sin t}.$$

(2) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\sin t}{1-\cos t}\Big/\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{a(1-\cos t)a\cos t-a\sin t a\sin t}{a^3(1-\cos)^3}=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

例 7　设函数 $f(t)$ 三次可微，且 $f''(t)\neq 0$，有

$$\begin{cases}x=f'(t),\\ y=tf'(t)-f(t),\end{cases}$$

求 $\frac{d^3y}{dx^3}$.

解　$$\frac{dy}{dx}=\frac{d[tf'(t)-f(t)]}{df'(t)}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}t\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{1}{f''(t)}.$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f''(t)}\right]\Big/\frac{dx}{dt}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

例 8 求曲线 $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}, y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}$ 在 $t=0,1,\infty$ 各点处的切线方程与法线方程.

解 $x_t'=\frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},\quad y_t'=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}.$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4},\quad k_{切}=\frac{dy}{dx},\quad k_{法}=-\frac{dx}{dy}.$

(1) $t=0,(x,y)=(0,0),k_{切}=1,k_{法}=-1.$

切线方程 $y=x$,法线方程 $y=-x$.

(2) $t=1,(x,y)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),k_{切}=3,k_{法}=-\frac{1}{3}.$

切线方程 $3x-y=4$,法线方程 $x+3y=3$.

(3) $t=\infty,(x,y)=(0,0),k_{切}=-1,k_{法}=1.$

切线方程 $y=-x$,法线方程 $y=x$.

例 9 证明:星形线

$$x=a\cos^3t,\quad b=a\sin^3t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

上除 $t_0=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$ 外,切线被两坐标轴所截线段长为一定数.

证 因为 $x_t'=-3a\cos^2t\sin t,\quad y_t'=3a\sin^2t\cos t.$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t\sin t}=-\tan t.$$

过点$(x(t_0),y(t_0))$的切线方程为

$$y-a\sin^3t_0=-\tan t_0(x-a\cos t_0),$$

所以,切线与x轴的交点是$M(a\cos t_0,0)$,与y轴的交点是$N(0,a\sin t_0)$,于是切线长为

$$|MN|=\sqrt{(a\cos t_0)^2+(a\sin t_0)^2}.$$

例 10 设 $x=\sqrt{1+t},y=\sqrt{1-t}$ 确定函数 $y=y(x)$,证明:$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y},\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{y^3}.$

证 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-1/(2\sqrt{1-t})}{1/(2\sqrt{1+t})}=-\dfrac{\sqrt{1+t}}{\sqrt{1-t}}=-\dfrac{x}{y}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(-\frac{x}{y}\right)'_x=-\frac{y-xy'_x}{y^2}=-\frac{y-x(-x/y)}{y^2}$$

$$=-\frac{y^2+x^2}{y^3}=-\frac{(\sqrt{1-t})^2+(\sqrt{1+t})^2}{y^3}=-\frac{2}{y^3}.$$

例 11 证明：心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$ $(a>0)$ 的向径与切线间的夹角等于向径极角的二分之一.

证 由疑难解析 1 知，$f(\theta)=a(1-\cos\theta)$，$f'(\theta)=a\sin\theta$，故

$$\tan\varphi=\frac{f(\theta)}{f'(\theta)}=\frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}$$
$$=\tan(\theta/2).$$

例 12 求对数螺线 $\rho=e^{\varphi}$ 在点 $(\rho,\varphi)=\left(e^{\pi/2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程.

解 将极坐标方程 $\rho=e^{\varphi}$ 转换成直角坐标系下的参数方程：$x=e^{\varphi}\cos\varphi$，$y=e^{\varphi}\sin\varphi$. 所以，切线斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi}\Rightarrow\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\varphi=\pi/2}=-1.$$

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=e^{\pi/2}$. 故切线方程为

$$y-e^{\pi/2}=-x,\quad 即\quad x+y=e^{\pi/2}.$$

例 13 设 $\rho=\rho(x)$ 是抛物线 $y=\sqrt{x}$ 上任意一点 $M(x,y)$ $(x\geqslant1)$ 处的曲率半径，$s=s(x)$ 是抛物线上介于点 $A(1,1)$ 与 M 之间的弧长，计算 $3\rho\dfrac{d^2\rho}{ds^2}-\left(\dfrac{d\rho}{ds}\right)^2$ 的值(直角坐标系下曲率公式为 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

解 因为 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$，所以抛物线在点

$M(x,y)$ 处的曲率半径为

$$\rho=\rho(x)=\frac{1}{\kappa}=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}=\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}.$$

抛物线上$\overset{\frown}{AB}$的弧长

$$s=s(x)=\int_1^x\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_1^x\sqrt{1+1/(4x)}\mathrm{d}x.$$

显然,ρ 和 s 都是参变量 x 的函数. 由参数方程确定函数的导数公式,得

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s/\mathrm{d}x}=\frac{1/2\cdot 3/2(4x+1)^{1/2}\cdot 4}{\sqrt{1+1/(4x)}}=6\sqrt{x},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{6}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+1/(4x)}}=\frac{6}{\sqrt{4x+1}}.$$

因此,有

$$3\rho\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}\right)^2=3\cdot\frac{1}{2}(4x+1)^{3/2}\cdot\frac{6}{\sqrt{4x+1}}-36x=9.$$

例 14 已知曲线的极坐标方程是 $r=1-\cos\theta$,求该曲线上对应于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

解 曲线的参数方程为:$x=(1-\cos\theta)\cos\theta,y=(1-\cos\theta)\sin\theta$,即 $x=\cos\theta-\cos^2\theta,y=\sin\theta-\sin\theta\cos\theta$.

切点坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\pi/6}=\left.\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=\pi/6}=\left.\frac{\cos\theta-\cos^2\theta+\sin^2\theta}{-\sin\theta+2\cos\theta\sin\theta}\right|_{\theta=\pi/6}=1.$$

所以,切线方程和法线方程为

$$\begin{cases}y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4},\\ y-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{5}{4}=0,\\ x+y-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=0.\end{cases}$$

例 15 参数方程 $x = e^t\sin t, y = e^t\cot t$ 确定函数 $y = y(x)$，证明：$y''(x + y)^2 = 2(xy' - y)$.

证 由参数方程的求导法，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = 1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3},$$

故 $$y''(x + y)^2 = \frac{-2}{e^t(\cos t + \sin t)^3} \cdot e^{2t}(\sin t + \cos t)^2$$

$$= \frac{-2e^t}{\cos t + \sin t},$$

$$2(xy' - y) = 2\left[x\left(1 - \frac{2\sin t}{\cos t + \sin t}\right) - e^t\cos t\right]$$

$$= 2e^t\left(\sin t\,\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} - \cos t\right) = \frac{-2c^t}{\cos t + \sin t}.$$

于是 $$y''(x + y)^2 = 2(xy' - y).$$

例 16 参数方程 $x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|$ 确定函数 $y = y(x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 因为 $|t|$ 在 $t = 0$ 不可导，故不能直接使用参数方程确定函数的求导法则，需先求出函数 $y = y(x)$ 的表达式

由 $$x = \begin{cases} 3t, & t \geqslant 0, \\ t, & t < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 9t^2, & t \geqslant 0, \\ t^2, & t < 0 \end{cases}$$

知，x 与 t 同正负，故

$$t = \begin{cases} \dfrac{x}{3}, & x \geqslant 0, \\ x, & x < 0, \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$$

所以 $$\frac{dy}{dx} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = 0.$$

第三节　微分与高阶导数

主要内容

1. 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的增量 Δy 可以表示为 Δx 的线性函数 $A\Delta x$ 与较 Δx 较高阶的无穷小量之和：$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$，则称函数 f 在点 x_0 可微，$A\Delta x$ 为函数 f 在点 x_0 的微分，记作

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = A\Delta x \quad 或 \quad \mathrm{d}(f(x))\Big|_{x=x_0} = A\Delta x,$$

A 是与 Δx 无关的常数.

2. 函数 f 在 x_0 可微 $\Longleftrightarrow$ 函数 f 在 x_0 可导. 此时 $A = f'(x_0)$.

3. 若 f 在区间 I 上每点都可微，则称 f 为 I 上的可微函数. f 在 I 上的微分记作 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$，它不仅依赖于 Δx，也依赖于 x.

4. 有如下微分运算法则：

(1) $\mathrm{d}[u(x) \pm v(x)] = \mathrm{d}u(x) \pm \mathrm{d}v(x)$；

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$；

(3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{v(x)}{u(x)}\right) = \dfrac{u(x)\mathrm{d}v(x) - v(x)\mathrm{d}u(x)}{u^2(x)}$；

(4) $\mathrm{d}[(f\circ g)(x)] = f'(u)g'(x)\mathrm{d}x = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}u$.

当式(4)中以 $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$ 代入时，也可写作 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$，与 $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ 形式上完全一样. 即不论 x 是自变量还是 u 是中间变量，它都有相同的微分形式. 此性质称为一阶微分的形式不变性.

5. 若函数 $y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$ 在点 x 可导，则称其导数为 f 在 x 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$，$y^{(n)}$，$n=2,3,\cdots$. n 阶导数称为高阶导数.

6. $y=uv$ 的 n 阶导数公式称莱布尼茨公式.

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots$$
$$+C_n^ku^{(n-k)}v^k+\cdots+u^{(0)}v^{(n)}.$$

7. 若 $y=f[g(x)]$,则 $y'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$,

$$y''=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x).$$

8. 若 $y=f(x)$ 为严格单调的连续函数,其反函数 $x=\varphi(y)$ 有高阶导数,且 $\varphi'(y)\neq 0$,则

$$y'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)},\quad y''(x)=-\frac{\varphi''(y)}{[\varphi'(y)]^3},$$

$$y'''(x)=\frac{3[\varphi''(y)]^2-\varphi'(y)\cdot\varphi'''(y)}{[\varphi'(y)]^5}.$$

9. 若函数 $f=f(x)$ 的 $n-1$ 阶微分 $d^{n-1}f(x)$ 在点 x 可微,则称其微分为 f 在 x 的 n 阶微分,记作 $d^nf(x)$,d^ny,$n=1,2,\cdots$. 一般有 $d^ny=y^{(n)}dx^n$.

疑 难 解 析

1. 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 的导数与微分有什么区别?

答　从理论上讲,导数与微分是等价的,它们互为充要条件. 但从实际意义与几何上看,它们有着很大的区别,表现为:

(1) 导数 $f'(x_0)$ 是一个数值,是函数增量 Δy 与自变量增量 Δx 之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 当 $\Delta x\to 0$ 时的极限,它反映函数 $f(x)$ 在点 x_0 的变化率. 而微分 $dy=f'(x_0)(x-x_0)$ 是自变量增量 $\Delta x=(x-x_0)$ 的线性函数,是一个无穷小量,它反映函数 $f(x)$ 在点 x_0 增量的线性主部. 两者的实际意义相去甚远.

(2) 在几何意义上,导数 $f'(x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线斜率,而微分 $dy=f'(x_0)(x-x_0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线在区间 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 上的纵坐标的增量(见图 3.3).

(3) 在使用上,导数主要用于函数性质的理论研究与应用问

题变化率的讨论，而微分主要用于微分运算与近似计算，误差估计.

2. 为什么二阶微分不再具有形式不变性？

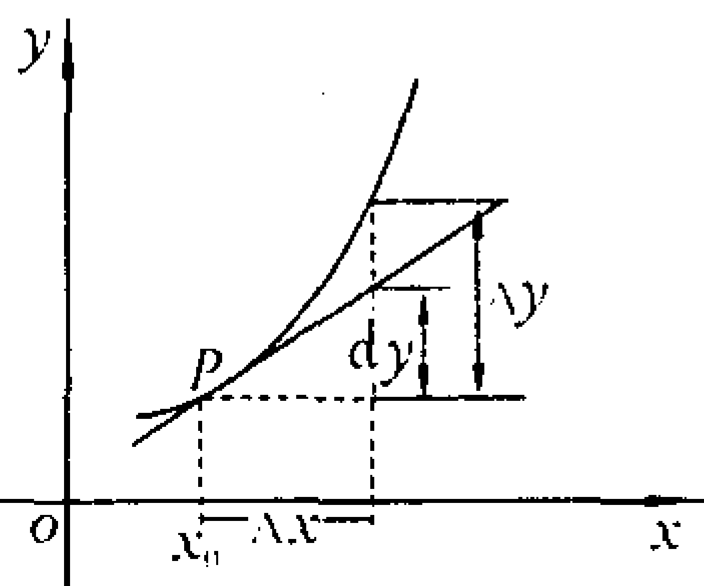


图 3.3

答 对于复合函数 $y = f(u), u = g(x)$，具有一阶微分的形式不变性，即

$$dy = f'(u)du.$$

但是，二阶微分时，$d^2y \neq f''(u)du^2$. 这是因为，当对 $dy = f'(u)du$ 两边求微分时，有

$$d^2y = d[f'(u)] \cdot dy + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

因为 u 是中间变量而不是自变量，一般地，$d^2u \neq 0$，所以多了一项，不再有微分形式不变性.

方法、技巧与典型例题分析

对于微分运算，常用两种方法：一是用一阶微分的形式不变性直接求出，二是先求出导数，再配以自变量微分得到函数的微分. 求高阶微分时，要注意微分形式不变性已不再成立. 求高阶导数时，一般采用逐阶求导法. 对复合函数求导. 一定要注意链式法则的运用. 求高阶导数最关键的是从前几阶导数中总结和发现规律，写出高阶导数公式.

一、微分问题

例 1 求下列微分：

(1) $y = e^{-ax}\cos bx$；　　(2) $y = x^2\ln x^2 + \cos x^2$；

(3) $\cos(xy) = x^2y^2$；　　(4) $y = \ln\left[\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{x}{2}\right)\right]$.

解 (1) 由一阶微分形式不变性，有

$$dy = d(e^{-ax}\cos bx) = \cos bx\, d(e^{-ax}) + e^{-ax}d(\cos bx)$$
$$= [\cos bx\, e^{-ax}(-a) + e^{-ax}(-\sin bx) \cdot b]dx$$

$$= -e^{-ax}[a\cos bx + b\sin bx]dx.$$

(2) 因为 $y' = 2x\ln x^2 + 2x - \sin x^2 \cdot 2x$,所以

$$dy = 2x[\ln x^2 + 1 - \sin x^2]dx.$$

(3) 所给方程是一个隐函数,两边求微分,得

$$d\cos(xy) = d(x^2y^2),$$

$$-\sin(xy)d(xy) = y^2dx^2 + x^2dy^2,$$

$$-\sin(xy)(xdy + ydx) = 2xy^2dx + 2x^2ydy,$$

经整理,解出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y\sin(xy) + 2xy^2}{x\sin(xy) + 2x^2y} = -\frac{y}{x}.$$

故
$$dy = -\frac{y}{x}dx.$$

(4) 由一阶微分形式不变性,有

$$dy = d\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right] = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} \cdot d\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1\Big/\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]d\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 1\Big/\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{\sin(\pi/2 + x)} = \frac{dx}{\cos x} = \sec x dx.$$

例 2 讨论由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t + |t|, \\ y = 3t^2 + t|t| \end{cases}$$

确定的函数 $y = f(x)$ 的微分 dy.

解 因为

$$x = \begin{cases} t, & t \leqslant 0, \\ 3t, & t > 0, \end{cases} \quad y = \begin{cases} 2t^2, & t \leqslant 0, \\ 4t^2, & t > 0, \end{cases}$$

显然,x 与 t 同正负,有

$$t = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ x/3, & x > 0. \end{cases}$$

代入 y 的表达式,得

$$y=\begin{cases}2x^2, & x\leqslant 0,\\ 4x^2/9, & x>0.\end{cases}$$

由于 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以

$$\mathrm{d}y=\begin{cases}4x\mathrm{d}x, & x\leqslant 0,\\ 8x/9\cdot\mathrm{d}x, & x>0.\end{cases}$$

例 3 设 $y=\sin[u^2(x)+v^2(x)]$，$u(x)$，$v(x)$ 可微，求 $\mathrm{d}y$.

解 y 是抽象函数，用一阶微分的形式不变性来求.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\cos[u^2(x)+v^2(x)]\mathrm{d}[u^2(x)+v^2(x)]\\&=\cos[u^2(x)+v^2(x)][2u(x)\mathrm{d}u(x)+2v(x)\mathrm{d}v(x)]\\&=2\cos[u^2(x)+v^2(x)]\cdot[u(x)u'(x)+v(x)v'(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 4 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $2^{xy}=x+y$ 确定，求 $\mathrm{d}y\Big|_{x=0}$.

解 $y(x)$ 是一个隐函数，要对方程两边求微分，利用一阶微分形式不变性，得

$$\mathrm{d}2^{xy}=\mathrm{d}(x+y),$$

$$2^{xy}\ln 2(x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y.$$

解得
$$\mathrm{d}y=\frac{\ln 2\cdot 2^{xy}\cdot y-1}{1-\ln 2\cdot 2^{xy}\cdot x}\mathrm{d}x.$$

因 $x=0$ 时，由方程可得 $y=1$，故

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=0}=(\ln 2-1)\mathrm{d}x.$$

例 5 设 $f(x)>0$ 且处处可微，求 $\mathrm{d}f\left[\dfrac{\ln f(x)}{f(x)}\right]$.

解 由一阶微分形式不变性，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\mathrm{d}\,\frac{\ln f(x)}{f(x)}\\&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\cdot\frac{f(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\ln f(x)}{[f(x)]^2}\mathrm{d}x\\&=f'\left[\frac{\ln f(x)}{f(x)}\right]\cdot\frac{f'(x)}{f^2(x)}(1-\ln f(x))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 6 设函数曲线可由参数式 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 表示，又可

用极坐标式 $r=r(\theta)$ 表示. 证明：

$$(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2=(r\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}r)^2.$$

证 因为 $x=r(\theta)\cos\theta, y=r(\theta)\sin\theta$,所以

$$\mathrm{d}x=\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta,\quad \mathrm{d}y=\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2&=(\cos\theta\mathrm{d}r-r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2+(\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2\\&=(r\mathrm{d}\theta)^2+(\mathrm{d}r^2).\end{aligned}$$

例 7 设 $y=[f(x^2)]^{1/x}, f(x)>0$ 且可微,求 $\mathrm{d}y$.

解 y 是幂指函数,用取对数微分法,得

$$\ln y=\frac{1}{x}\ln f(x^2).$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{y}&=\frac{x\mathrm{d}\ln f(x^2)-\ln f(x^2)\cdot\mathrm{d}x}{x^2}\\&=\frac{1}{x}\cdot\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}2x\mathrm{d}x-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\mathrm{d}x\\&=\left[2\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\right]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $$\mathrm{d}y=[f(x^2)]^{1/x}\left[2\frac{f'(x^2)}{f(x^2)}-\frac{1}{x^2}\ln f(x^2)\right]\mathrm{d}x.$$

例 8 设 $f_{ij}(x)\ (i,j=1,2,3)$ 可微,求以如下行列式定义的函数 $F(x)$ 的微分：

$$F(x)=\begin{vmatrix}f_{11}(x)&f_{12}(x)&f_{13}(x)\\f_{21}(x)&f_{22}(x)&f_{23}(x)\\f_{31}(x)&f_{32}(x)&f_{33}(x)\end{vmatrix}.$$

解 因为 $\quad f_{ij}(x+\Delta x)=f_{ij}(x)+f'_{ij}(x)+o(\Delta x),$

$$F(x+\Delta x)=F(x)+G(x)\Delta x+o(\Delta x),$$

其中

$$G(x)\triangleq\begin{vmatrix}f'_{11}(x)&f_{12}(x)&f_{13}(x)\\f'_{21}(x)&f_{22}(x)&f_{23}(x)\\f'_{31}(x)&f_{32}(x)&f_{33}(x)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}f_{11}(x)&f'_{12}(x)&f_{13}(x)\\f_{21}(x)&f'_{22}(x)&f_{23}(x)\\f_{31}(x)&f'_{32}(x)&f_{33}(x)\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & f'_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f'_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f'_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

则
$$\mathrm{d}F(x) = G(x)\mathrm{d}x.$$

例 9 设 $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x)$，$\varphi(x)$，$\psi(x)$ 可微，$\varphi(x) > 0$，$\psi(x) > 0$，求 $\mathrm{d}y$.

解 因为 $y = \log_{\varphi(x)}\psi(x) = \dfrac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)}$，所以对等式两边分别微分，得

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\,\frac{\ln\psi(x)}{\ln\varphi(x)} = \frac{1}{\ln^2\varphi(x)}\left[\ln\varphi(x)\,\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \ln\psi(x)\,\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\ln\varphi(x)}\left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \log_{\varphi(x)}\psi(x)\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right]\mathrm{d}x.$$

例 10 设 $y = \dfrac{x-a}{1-ax}$ $(|a| < 1)$，证明：当 $|x| < 1$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}.$$

证 对方程 $y = \dfrac{x-a}{1-ax}$ 两边微分，得

$$\mathrm{d}y = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2}\mathrm{d}x.$$

而
$$1-y^2 = 1-\left(\frac{x-a}{1-ax}\right)^2 = \frac{1-a^2}{(1-ax)^2}(1-x^2),$$

故
$$\mathrm{d}y = \frac{1-y^2}{1-x^2}\mathrm{d}x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}.$$

二、高阶导数与高阶微分问题

求高阶导数有下列基本公式：

(1) $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$，$(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n \quad (a > 0)$；

(2) $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$；

(3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$，$(\cos x)^n = \cos\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$；

(4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{x^n}$，

$$(\log_a x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n \ln a};$$

(5) $$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

在求高阶导数时，要先将函数变形，尽可能利用基本公式.要善于用数学归纳法、递推公式和莱布尼茨公式.

例 11 设函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geqslant 0. \end{cases}$$

问 a,b 为何值时，$f'(x)$ 处处连续，但在 $x=0$ 无二阶导数.

解 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 连续是显然的.要在 $x=0$ 可导，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，由 $f_+(0) = f_-(0) = f(0) \Rightarrow c = 0$.又

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{ax^2 + bx}{x} = b,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

所以，由 $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0)$ 得 $b = 1$.

讨论 $f'(x)$ 的连续性.当 $x < 0$ 时，$f'(x) = 2ax + 1$，$f'(0^-) = 1$；当 $x > 0$ 时，$f'(x) = \frac{1}{1+x}$，$f'(0^+) = 1$.由 $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0)$ 知，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续，从而 $f(x)$ 处处有一阶连续导数.

$$f''_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2ax + 1 - 1}{x} = 2a,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1/(1+x) - 1}{x} = -1,$$

所以，当 $2a \neq -1$，即 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时，$f''(0)$ 不存在.

即本例选 $a \neq -\frac{1}{2}$，$b = 1$.

例 12 证明：

$$(a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin(bx+n\varphi)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i e^{ax}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}i\right),$$

其中 $\varphi=\arctan\dfrac{b}{a}$.

证 设 $f(x)=e^{ax}\sin bx$,则

$$f'(x)=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$$

$$=(a^2+b^2)^{1/2}e^{ax}\sin(bx+\varphi)\left(\varphi=\arctan\frac{b}{a}\right).$$

逐次求导,可得

$$f^{(n)}(x)=(a^2+b^2)^{n/2}e^{ax}\sin(bx+n\varphi).$$

又,用莱布尼茨公式直接求导,得

$$f^{(n)}(x)=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i e^{ax}\sin\left(bx+\frac{\pi}{2}i\right)$$

比较两式,即得所证命题.

例 13 设 $f(x)=\arcsin x$,证明:

(1) $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0$;

(2) $f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)$;

(3) $f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=1^2\cdot3^2\cdot5^2\cdots(2k-1)^2, \forall k\in$ **N**.

证 (1) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,即 $\sqrt{1-x^2}f'(x)=1$,所以

$$f''(x)\sqrt{1-x^2}-f'(x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

即
$$f''(x)(1-x^2)-f'(x)\cdot x=0.$$

对上式两项分别使用莱布尼茨公式,得

$$f^{(n+2)}(x)(1-x^2)+nf^{(n+1)}(x)(-2x)$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}f^{(n)}(x)(-1)-[f^{(n+1)}(x)x+nf^{(n)}(x)]=0.$$

经整理,即得

$$(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+1)xf^{(n+1)}(x)-n^2f^{(n)}(x)=0.$$

(2) 在上式中,令 $x=0$,即得所证命题.

(3) 因为 $f'(0)=0, f''(0)=0$,利用题(2)的结果,得

$$f'''(0)=1^2 f'(0)=1^2,\ f^{(4)}(0)=0,\cdots.$$

所以,$f^{(2k)}(0)=0, f^{(2k+1)}(0)=1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2, \forall\, k\in \mathbf{N}$.

例 14 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

其中 $g(x)$ 为二阶可导且导数连续,$g(0)=1$.

(1) 求使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的 a 值;

(2) 求 $f'(x)$ 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 (1) 因为 $[g(x)-\cos x]\Big|_{x=0}=1-1=0$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-\cos x]-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0}g'(x)+\sin x=g'(0).$$

当 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=g'(0)$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续,则 $f(x)$ 处处连续. 即 $a=g'(0)$,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

(2) 当 $x\neq 0$ 时,有

$$f'(x)=\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2},$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[g(x)-\cos x]/x-g'(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\cos x-xg'(0)}{x^2}$$
$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x-g'(0)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{g'(x)-g'(0)}{2x-0}+\frac{\sin x-\sin 0}{2x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}g''(0)+\frac{1}{2}\ (L'\text{ 用法见下章第二节}).$$

故 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}g''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$

由于

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{[g''(x)+\cos x]+[g'(x)+\sin x]-[g'(x)+\sin x]}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)}{2}+\frac{1}{2},$$

所以，$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

例 15 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0, n=1,2,\cdots$.

证 利用导数定义和数学归纳法证.

当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$,

$$f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-1/x^2},\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},\cdots,$$

其中 $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3n$ 次多项式.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{e^{1/x^2}}=0.$$

设 $f^{(n-1)}(0)=0$，则

$$f^{(n)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{P_{n-1}(1/x)e^{-1/x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{P_{n-1}(1/x)/x}{e^{-1/x^2}}=0.$$

故，$f(x)$ 在 $x=0$ 存在任意阶导数，且 $f^{(n)}(0)=0$.

注 由 $f'(x)$，$f''(x)$ 可知：$P_1\left(\frac{1}{x}\right)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{x}\right)$ 是3次、6次多项式，设 $f^{(n-1)}(x)=P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$，其中 $P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $3(n-1)$ 次多项式，则可推出

$$f^{(n)}(x)=\left[2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]e^{-1/x^2},$$

故 $$P_n\left(\frac{1}{x}\right)=2\left(\frac{1}{x}\right)^3P_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)^2P'_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

是$\frac{1}{x}$的 $3n$ 次多项式.

例 16 设 f 二阶可导,$y=f\{f[f(x)]\}$,求 $y''(x)$.

解 由复合函数导数的链式法则,有

$$y'=f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x),$$

$$\begin{aligned}y''=&f''\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f'(x)\\&+f'\{f[f(x)]\}\cdot f''[f(x)]\cdot f'(x)\\&+f'\{f[f(x)]\}\cdot f'[f(x)]\cdot f''(x).\end{aligned}$$

例 17 设函数 $f(x)$ 当 $x\leqslant x_0$ 时有定义且可微分两次,问 a,b,c 为何值时,函数

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0\end{cases}$$

可微分两次.

解 由题设 $F'(x)$ 存在,故 $F(x)$ 在 $x=x_0$ 连续.即有

$$\lim_{x\to x_0^-}F(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0^+}F(x)=\lim_{x\to x_0^+}[a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c]=c,$$

得 $c=f(x_0)$.又由 $F'(x_0^-)=F'(x_0^+)$ 得

$$f'(x_0)=[2a(x-x_0)+b]\Big|_{x=x_0}=b,$$

得 $b=f'(x_0)$.再由 $F''(x_0^-)=F''(x_0^+)$ 得

$$f''(x_0)=2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}f''(x_0).$$

例 18 求下列导数的高阶导数:

(1) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求 $y^{(100)}$; (2) $y=x^2e^{2x}$.

解 (1)$y=(1+x)(1-x)^{-1/2}$,用莱布尼茨公式.注意到

$(1+x)$ 项只能求导一次，故

$$y^{(100)}=\sum_{i=0}^{100}C_{100}^{i}(1+x)^{(i)}[(1-x)^{-1/2}]^{(100-i)}$$

$$=(1+x)[(1-x)^{-1/2}]^{(100)}+C_{100}^{1}[(1-x)^{-1/2}]^{(99)}$$

$$=(1+x)\frac{199!!}{2^{100}}(1-x)^{-201/2}+100\cdot\frac{197!!}{2^{99}}(1-x)^{-199/2}$$

$$=\frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}\quad(x<1).$$

(2) 用莱布尼茨公式，注意到 x^2 项只能求导两次，故

$$y^{(20)}=x^2(\mathrm{e}^{2x})^{(20)}+2x\,C_{20}^{1}(\mathrm{e}^{2x})^{(19)}+2C_{20}^{2}(\mathrm{e}^{2x})^{(18)}$$

$$=2^{20}\mathrm{e}^{2x}(x^2+20x+95).$$

例 19 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$； (2) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\sin ax\sin bx$； (4) $y=\sin ax\cos bx$；

(5) $y=\sin^4x+\cos^4x$； (6) $y=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$.

解 (1) $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $y''=-\dfrac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$.

设对 n 有 $y^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}}\left(x\neq-\dfrac{d}{c}\right)$，则对于 $n+1$，有

$$y^{(n+1)}=-(-1)^{n-1}\frac{c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n\cdot c}{(cx+d)^{2(n+1)}}$$

$$=(-1)^n\frac{c^n(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{n+2}}.$$

(2) $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$，由基本公式(5)，得

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$$

$$=n!(-1)^n\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right]\ (x\neq1,x\neq2).$$

(3) $y=\dfrac{1}{2}\cos(a-b)x-\dfrac{1}{2}\cos(a+b)x$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^n\cos\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right.$$
$$\left.-(a+b)^n\cos\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right\}.$$

(4) $y=\frac{1}{2}\sin(a+b)x+\frac{1}{2}\sin(a-b)x$,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left\{(a+b)^n\sin\left[(a+b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right.$$
$$\left.-(a-b)^n\sin\left[(a-b)x+\frac{n}{2}\pi\right]\right\}.$$

(5) $y=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos4x,$$

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n}{2}\pi\right).$$

(6) $y=\ln(a+bx)-\ln(a-bx)$,

$$y'=\frac{b}{a+bx}+\frac{b}{a-bx}.$$

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{b^n(n-1)!}{(a+bx)^n}+\frac{b^n(n-1)!}{(a-bx)^n}$$
$$=b^n(n-1)!\left[\frac{(-1)^n}{(a+bx)^n}+\frac{1}{(a-bx)^n}\right]\quad\left(|x|<\left|\frac{a}{b}\right|\right).$$

例 20 求下列函数的 n 阶微分 d^ny：

(1) $y=x^n\mathrm{e}^x$；　　(2) $y=\frac{\ln x}{x}$.

解

(1) $\mathrm{d}^ny=y^{(n)}\mathrm{d}x^n$

$$=\mathrm{e}^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\cdots+n!\right]\mathrm{d}x^n.$$

(2) $\mathrm{d}^ny=y^{(n)}\mathrm{d}x^n=\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}\ln x+n\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-1)}\right.$

$$\left.+C_n^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}+\cdots+\frac{1}{x}(\ln x)^{(n)}\right]\mathrm{d}x^n$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left[\ln x - \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}\right]\mathrm{d}x^n \quad (x > 0).$$

例 21 设函数 $f(y)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及 $f'[f^{-1}(x)]$，$f''[f^{-1}(x)]$ 都存在，且 $f'[f^{-1}(x)] \neq 0$，证明：

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

证 由题设 $x = f(y)$，$y = f^{-1}(x)$. 依反函数与复合函数求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f^{-1}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{f'(y)}\right]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= -\frac{f''(y)}{[f'(y)]^2} \cdot \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = -\frac{f''[f^{-1}(x)]}{\{f'[f^{-1}(x)]\}^3}.$$

例 22 设 $y = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$，$a,b,c$ 互不相等，求 $y^{(n)}$.

解 先分解因式，得

$$y = \frac{1}{(c-b)(c-a)}\frac{1}{(x-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{(x-b)} + \frac{1}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{(x-a)}$$

故

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(c-b)(c-a)(x-c)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(b-a)(b-c)}\frac{1}{(x-b)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(a-b)(a-c)}\frac{1}{(x-a)^{n+1}}.$$

例 23 若 $y = f(x)$ 存在单值反函数 $x = \varphi(y)$，且 $y' \neq 0$，$y'' \neq 0$. 求反函数的导数 $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$，$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}y^3}$.

解 由反函数导数公式，得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1\Big/\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y'}$.

(1) $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{(y')}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$

$$= \frac{-1}{(y')^2} \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2) $$\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{y''}{(y')^3}\right)\frac{dx}{dy}$$

$$= -\frac{y'''(y')^3 - 3(y')^2y'' \cdot y''}{(y')^6} \cdot \frac{1}{y'} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}.$$

例 24 $$f(x) = \begin{cases} x^m\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

设 m 为自然数.问在什么条件下,有

(1) 在 $x = 0$ $f(x)$ 连续; (2) 在 $x = 0$ $f(x)$ 可导;

(3) 在 $x = 0$ $f'(x)$ 连续; (4) 在 $x = 0$ $f(x)$ 处二阶可导;

(5) 在 $x = 0$ $f''(x)$ 连续.

解 (1) 当 $m > 0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0} x^n \cdot \sin(1/x) = 0$,有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.所以 $m > 0$ 时,$f(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(2) 当 $m > 1$ 时,有

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta)^{m-1} \cdot \sin\frac{1}{\Delta x} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$.所以当 $m > 1$ 时,$f(x)$ 在 $x = 0$ 可导.

(3) 当 $m > 2$ 时,由 $x \neq 0$ 有

$$f'(x) = mx^{m-1}\sin(1/x) - x^{m-2}\cos(1/x) \Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) = 0,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$.所以 $m > 2$ 时,$f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

(4) 当 $m > 3$ 时,由 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续,有

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x^{m-3}\left(mx\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

即 $f''(0) = 0$.所以 $m > 3$ 时,$f(x)$ 在 $x = 0$ 二阶可导.

(5) 当 $m > 4$ 时,由 $x \neq 0$ 有

$$f''(x) = x^{m-4}[m(m-1)x^2\sin(1/x) - 2(m-1)x\cos(1/x) - \sin(1/x)],$$

$$\lim_{x\to 0} f''(x) = 0,$$

所以 $m > 4$ 时,$f''(x)$ 在 $x = 0$ 连续.

第四章　微分中值定理与利用导数研究函数

第一节　微分中值定理

主要内容

1. 若函数 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内对一切 $x \in U(x_0)$ 有 $f(x_0) \geqslant f(x)$（或 $f(x_0) \leqslant f(x)$），则称函数 f 在点 x_0 取得极大值（或极小值），点 x_0 为极大值点（或极小值点）. 极大值、极小值统称极值.

2. 费尔马(Fermat)引理　设函数 f 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 可导. 若 x_0 为 f 的一个极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

3. 罗尔(Rolle)定理　设函数 f 满足如下条件：f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f 在开区间 (a,b) 内可导，$f(a) = f(b)$，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = 0$.

4. 拉格朗日(Lagrange)中值定理　若函数 f 满足以下条件：f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f 在开区间 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

推论 1　若函数 f 在区间 I 上可导，且 $f'(x) \equiv 0$，则在 I 上 $f(x) \equiv c$（常数）.

推论 2　若函数 f 和 g 在区间 I 上均可导，且 $f'(x) \equiv g'(x)$，则在 I 上 $f(x) = g(x) + c$（常数）.

5. 柯西(Cauchy)中值定理　若函数 f 和 g 满足以下条件：f

与 g 在闭区间$[a,b]$上均连续，f 与 g 在开区间(a,b)内均可导，且在(a,b)内 f' 与 g' 不同时为零，$g(a)\neq g(b)$，则在(a,b)内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{g'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

疑难解析

1. 罗尔定理的条件是充分的还是必要的？

答　罗尔定理的条件是充分的，但不是必要的. 例如，对

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in(-1,1)\cup(1,2),\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

$f(x)$在$[1,2]$上有间断点 $x=1$，$f(x)$在 $x=1$ 不可导，$f(-1)\neq f(2)$. 罗尔定理的三个条件都不满足，但 $f'(0)=0$，$0\in(-1,2)$. 所以罗尔定理条件是充分的. 但是，三个条件中少了任何一个，结论可能不成立，如

$$f_1(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1;\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1-2x, & x<1/2,\\ 2x-1, & x\geqslant 1/2;\end{cases}$$

$$f_3(x)=x,x\in[0,1].$$

其中 $f_1(x)$ 在$[0,1]$上不连续，$f_2(x)$ 在$(0,1)$内不可导，$f_3(x)$ 不满足 $f(a)=f(b)$，但它们分别满足罗尔定理的其它两个条件，却不存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$. 尽管如此，不能说这三个条件是必要的. 由前一例子，我们只能说，这三个条件都是充分的.

2. 三个中值定理有何联系？它们几何意义的共同点是什么？

答　可以认为：罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例，拉格朗日中值定理又是柯西中值定理的特例. 因为，在柯西中值定理中令 $g(x)=x$，即得到拉格朗日中值定理；在拉格朗日中值定理中增加条件 $f(a)=f(b)$，即得到罗尔定理.

罗尔定理的几何意义是：满足定理条件的函数 $y=f(x)$ 在

(a,b) 内的曲线上至少存在一条水平切线. 拉格朗日中值定理的几何意义是:满足定理条件的函数 $y = f(x)$ 在(a,b) 内的曲线上至少存在一点$(\xi,f(\xi))$,曲线在该点的切线平行曲线两端点的连线. 柯西中值定理的几何意义是:满足定理条件的由 $u = g(x),v = f(x)$ 所确定的曲线上至少有一点,曲线的切线平行两端点连线. 罗尔定理满足 $f(a) = f(b)$,即两端点连线是水平的. 所以,三个中值定理几何意义有一个共同点:满足定理条件的函数曲线上至少有一点的切线平行曲线在区间上两端点的连线.

方法、技巧与典型例题分析

中值定理有很多应用,最重要的应用是证明定理、证明等式与不等式、证明极限、证明零点等等. 做证明题首先要分析题给条件与待证结论,认真的分析:利用什么定理能使我们迅速得到结果?使用什么方法来实施证明?常用的方法有:一是直接证明,这种情况不多见,一般在验证符合某定理条件后,即可引用定理得出结论. 二是引入辅助函数,这种情况比较常见,一般是将待证结论变形(如拼凑重组、移项等),构成一个或两个新的辅助函数,验证它们符合某个中值定理,然后利用定理结论导出待证结论. 这种方法需要一定技巧,而技巧往往又要根据具体问题确定,希望读者很好地体会例题. 三是用反证法,假设待证命题的逆命题成立,然后从推导过程中找出与已知结论(包括极限、连续、可微等概念与法则、性质)的矛盾,从而证明原命题成立.

一、罗尔定理的应用

例 1 如下的函数

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

称为 n 次勒襄德(Legendre) 多项式,证明:$P_n(x)$ 在$(-1,1)$ 内恰有 n 个不同的实根.

证 由高阶导数的莱布尼茨公式知,函数

$$Q_{2n-m}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^{m}}(x^{2}-1)^{m},\quad m=0,1,2,\cdots,n-1$$

中都含有(x^2-1)因式,故当$m<n$时,$Q_{2n-m}(x)$都有实根-1和1.

考虑$Q_{2n}(x)=(x^2-1)^n$,它仅有相异的两个实根-1和1. 由罗尔定理,$Q_{2n-1}(x)=Q'_{2n}(x)$在$(-1,1)$内有一个根x_{11},所以,$Q_{2n-1}(x)$在$[-1,1]$上有三个相异的根$-1,x_{11},1$. 再由罗尔定理,$Q_{2n-2}(x)=Q'_{2n-1}(x)$在$(-1,x_{11})$和$(x_{11},1)$内至少各有一个根,所以,$Q_{2n-2}(x)$在$[-1,1]$上有四个相异的根$-1,x_{21},x_{22},1$.

反复应用罗尔定理,由数学归纳法可证:$Q_{2n-m}(x)$在$[-1,1]$上至少有$m+2$个相异的根$-1,x_{m1},x_{m2},\cdots,x_{mn}$和1 $(m=0,1,\cdots,n-1)$.

令$m=n-1$,则知$Q_{n+1}(x)$在$[-1,1]$上至少有$n+1$个相异的根. 再应用一次罗尔定理,知$Q_n(x)$在$(-1,1)$内至少有n个根(不含$1,-1$).

由于$Q_n(x)$是n次多项式,至多有n个根. 所以$Q_n(x)$在$(-1,1)$内恰有n个相异的根.

因为$P_n(x)$与$Q_n(x)$只相差一个系数,所以可以得出:$P_n(x)$在$[-1,1]$上恰有n个相异的实根.

例2 验证罗尔定理对函数$y=\ln\sin x$在区间$[\pi/6,5\pi/6]$上的正确性.

解 由$y=\ln\sin x$在定义域$2n\pi<x<(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm1,\cdots)$上的连续性知,函数在$[\pi/6,5\pi/6]$上连续.

又$y'=\cot x$在$(\pi/6,5\pi/6)$内处处存在.

$$f(\pi/6)=f(5\pi/6)=-\ln 2.$$

所以函数$y=\ln\sin x$在$[\pi/6,5\pi/6]$上满足罗尔定理条件.

因为$y'=\cot x=0$在$(\pi/6,5\pi/6)$内有解$x=\frac{\pi}{2}$,所以取$\xi=0$,即得$f'(\xi)=0$.

例 3 设 $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x-1 & 2x-1\\ 1 & x-2 & 3x-2\\ 1 & x-3 & 4x-3\end{vmatrix}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导.

$$f(0)=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -2 & -2\\ 1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0,\quad f(1)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{vmatrix}=0$$

符合罗尔定理条件. 故存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

例 4 设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有二阶导数，且 $f(1)=0$，又 $F(x)=x^2f(x)$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $F''(\xi)=0$.

证 显然，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 又 $F(0)=F(1)=0$. 所以 $F(x)$ 符合罗尔定理条件，故存在 $x_0\in(0,1)$，使 $F'(x_0)=0$.

又 $F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)\Rightarrow F'(0)=0$，所以 $F'(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(0,x_0)$，使 $F''(\xi)=0$. 而 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$.

例 5 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负，存在三阶导数，且方程 $f(x)=0$ 有两个相异实根，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'''(\xi)=0$.

证 因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内非负，且有 $f(x_1)=f(x_2)=0$（设 $x_1<x_2$），则 x_1 和 x_2 必为 $f(x)$ 的极小值点. 由费尔马定理，有 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

由上知，$f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，使 $f'(\xi_1)=0$.

又由上知，$f'(x)$ 在 $[x_1,\xi_1]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi_{21}\in(x_1,\xi_1)$ 与 $\xi_{22}\in(\xi_1,x_2)$，使 $f'(\xi_{21})=f'(\xi_{22})=0$.

又由上知，$f''(x)$ 在 $[\xi_{21},\xi_{22}]$ 上符合罗尔定理条件，故存在 $\xi\in(\xi_{21},\xi_{22})$，使 $f'''(\xi)=0$.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在 $n+1$ 阶导数，$f(0)=f'(0)=$

$f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=0$,且 $f(1)=0$. 证明:在$(0,1)$内至少有一点 ξ,使 $f^{(n+1)}(\xi)=0$.

证 用数学归纳法.

当 $n=0$ 时,由 $f(0)=f(1)=0$ 与题设知,$f(x)$ 满足罗尔定理条件,故存在 $\xi_1\in(0,1)$,使 $f'(\xi_1)=0$.

设 $n=k$ 时结论成立. 存在 $\xi_{k+1}\in(0,1)$,使 $f^{(k+1)}(\xi_{k+1})=0$.

当 $n=k+1$ 时,由 $f^{(k+1)}(0)=f^{(k+1)}(\xi_{k+1})=0$ 与题设知,$f^{(k+1)}(x)$ 满足罗尔定理条件. 故存在点 $\xi\in(0,\xi_{k+1})$,使得 $f^{(k+2)}(\xi)=0$.

例 7 设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)\cdot f(b)>0$,$f(a)\cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 证明:在$(a,b)$内至少有一点 ξ,使 $f'(\xi)=f(\xi)$.

证 设 $f(a)>0$,则 $f(b)>0$,$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$.

引入辅助函数 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$,则 $F(a)=\mathrm{e}^{-a}f(a)>0$,$F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\mathrm{e}^{-(a+b)/2}f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$,$f(b)=\mathrm{e}^{-b}f(b)>0$. 依闭区间上连续函数的介值定理,至少有一点 $\xi_1\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$,使 $F(\xi_1)=0$;至少有一点 $\xi_2\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$,使 $F(\xi_2)=0$.

综上所述知,$F(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上满足罗尔定理条件,故存在点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$,使 $F'(\xi)=0$,即

$$\mathrm{e}^{-\xi}f'(\xi)-\mathrm{e}^{-\xi}f(\xi)=0\Rightarrow f'(\xi)=f(\xi).$$

读者可以从证明中看出,之所以选择 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}f(x)$,是因为 $\mathrm{e}^{-x}>0$,且由 $F(x)$ 的导数可以得出 $f'(\xi)=f(\xi)$.

例 8 函数 $f(x)=\begin{cases}x, & -2\leqslant x<0,\\ -x^2+2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$

是否满足罗尔定理条件?定理中的 ξ 是否存在?

解 因为 $f_-(0)=0$，$f_+(0)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续，即 $f(x)$ 在 $[-2,3]$ 上不满足罗尔定理的条件. 又由

$$f'(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<0,\\ \text{不存在}, & x=0,\\ -2x+2, & 0<x\end{cases}$$

知，当 $x=1$ 时，$f'(1)=0$. 故 $\xi=1$.

例 9 设 $a_i\in\mathbf{R}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且满足 $a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$，证明：方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证 作辅助函数

$$F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^n,$$

显然，$F(0)=0$，$F(1)=a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$. 又 $F(x)$ 是多项式函数，在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)$，满足罗尔定理条件. 故存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

故方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根 ξ.

本例构造 $F(x)$ 的依据是，使 $F(x)$ 的导数恰好是所证方程的左边.

例 10 设 $f,g:[a,b]\to\mathbf{R}$，是可导函数，且 $g'\neq 0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 引入辅助函数 $F(x)=f(a)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(b)$，由题设可知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 又 $F(a)=f(a)g(b)$，$F(b)=f(a)g(b)$，符合罗尔定理条件. 故存在

$\xi \in (a,b)$,使 $F'(\xi) = 0$,即

$$F'(\xi) = f(a)g'(\xi) - f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) + f'(\xi)g(b) = 0.$$

经移项整理,即得

$$\frac{f(a) - f(\xi)}{g(\xi) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 11 证明:方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有惟一正根.

证 令 $f(x) = x^5 + x - 1 = 0$,显然 $f(x)$ 是连续函数,取区间$[0,N]$,则 $f(x)$ 在$[0,N]$上连续,在$(0,N)$内可导,且 $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$. 由连续函数的零点定理,知存在 $x_0 \in (0,N)$,使 $f(x_0) = 0$,即方程有正根($N > 0$).

下面用反证法证明正根的惟一性. 设除 x_0 外还有一个 $x_1 > 0$,使 $f(x_1) = 0$. 则 $f(x)$ 在$[x_0,x_1]$上满足罗尔定理条件,于是存在 $\xi \in (x_0,x_1)$,使 $f'(\xi) = 0$,这与上面的 $f'(x) > 0$ 矛盾. 所以,方程 $x^5 + x - 1 = 0$ 有惟一正根(区间也可以是$[x_1,x_0]$).

例 12 设 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明:$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \exists \xi \in (a,b)$,使 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

证 引入辅助函数 $F(x) = e^{-\lambda x} f(x)$,由题设知 $F(a) = F(b) = 0$,$F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,满足罗尔定理条件. 故存在 $\xi \in (a,b)$,使 $F'(\xi) = 0$,即 $e^{-\lambda\xi} f'(\xi) - \lambda e^{-\lambda\xi} f(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = \lambda f(\xi)$.

例 13 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有 n 阶连续导数,且 $f(x)$ 在$[a,b]$上至少有 $n+1$ 个相异实根.

$$P_n(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x_1 + c_0$$

是仅有实根的实系数多项式. 引入记号 $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$,证明:

$$P_n(D)f(x) \equiv (D^n + C_{n-1}D^{n-1} + C_{n-2}D^{n-2} + \cdots + C_1 D + C_0)f(x)$$

在$[a,b]$上至少有一个零点.

分析 设 $P_n(x)$ 的 n 个相异实根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,故

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

将$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\cdots(D - \alpha_n)$展开，得

$$P_n(x)f(x) = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2)\cdots(D - \alpha_n)f(x).$$

由上例结果知，在$f(x)$的两相异实根之间必有

$$(D - \alpha_n)f(x) = f'(x) - \alpha_n f(x)$$

的一个实根. 由于$f(x)$有$n+1$个相异实根，所以$(D-\alpha_n)f(x)$至少有n个相异实根. 依次知，$(D-\alpha_{n-1})(D-\alpha_n)f(x)$至少有$n-1$个相异实根，…，$P_n(D)f(x) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)f(x)$至少有一个实根.

读者可尝试用数学归纳法写出简洁的证明.

例 14（推广的罗尔定理） 设(a,b)为有限或无穷区间，$f(x)$在(a,b)内可导，且$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = A$（有限或$\pm\infty$），证明：$\exists\, \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = 0$.

证 若$f(x) \equiv A$，则结论是明显的.

若$f(x) \not\equiv A$，则$\exists\, x_0 \in (a,b)$，使$f(x_0) \neq A$. 设$f(x_0) > A$（$f(x_0) < A$情形类似可证）. 由题设知，$f(x)$在(a,b)内连续，

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A,$$

故 $\forall\, \mu(A < \mu < f(x_0))$， $\exists\, x_1 \in (a, x_0)$， $x_2 \in (x_0, b)$，使$f(x_1) = f(x_2) = \mu$. 依罗尔定理，$\exists\, \xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$，使

$$f'(\xi) = 0.$$

若$A = \pm\infty$，则在(a,b)内任取一点作x_0，故类似得出$\exists\, \xi \in (a,b)$，使$f'(\xi) = 0$.

例 15 设$f(x)$在$[0, +\infty)$上可导，且$0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$. 证明：$\exists\, \xi > 0$，使$f'(\xi) = \dfrac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

证 引入辅助函数$F(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$. 因为$F(x)$在$[0, +\infty)$上连续，在$(0, +\infty)$内可导，$F(0) = F(+\infty) = 0$. 依

推广的罗尔定理知，$\exists\ \xi > 0$，使 $F'(\xi) = 0$. 即 $\exists\ \xi > 0$，使 $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

例 16 设 $f(x), g(x), h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

证 设 $F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$，

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导. 由行列式的性质，$F(a) = F(b) = 0$. 故依罗尔定理，$\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = 0$. 即

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

(1) 令 $h(x) \equiv x$，即可推出柯西中值定理.

(2) 令 $g(x) \equiv x, h(x) \equiv 1$，即可推出拉格朗日中值定理.

例 17 设抛物线 $y = -x^2 + Bx + C$ 与 x 轴有两个交点 $x = a, x = b\ (a < b)$. 函数 f 在 $[a,b]$ 上二阶可导，$f(a) = f(b) = 0$，且曲线 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在 (a,b) 内有一个交点. 证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f''(\xi) = -2$.

证 设 $y = f(x)$ 与 $y = -x^2 + Bx + C$ 在 (a,b) 内的交点为 x_0，令 $F(x) = f(x) + x^2 - Bx - C$，则 $F(a) = F(b) = F(x_0) = 0$. 于是，对 $F(x)$ 在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 上分别使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi_1 \in (a,x_0), \xi_2 \in (x_0,b)$，使 $f'(\xi_1) = F''(\xi_2) = 0$.

又，$F'(x) = f'(x) + 2x - B$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$，使 $F''(\xi) = 0$. 即

$$f''(\xi) = -2.$$

例 18 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微，$f(a)=f(b)=0$，$f'_{+}(a)\cdot f'_{-}(b)>0$，证明：方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

证 不妨设 $f'_{+}(a)>0$，$f'_{-}(b)>0$. 则

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow\exists\ x_1>a,\text{使 } f(x_1)>f(a)=0,$$

$$\lim_{x\to b^{-}}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0\Rightarrow\exists\ x_2<b,\text{使 } f(x_2)<f(b)=0.$$

因为 f 在 $[a,b]$ 上可微，所以 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，依闭区间上连续函数的零点定理，知 $\exists\ x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f(x_0)=0$. 于是在 $[a,x_0]$ 及 $[x_0,b]$ 上分别使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi_1\in[a,x_0)$，$\xi_2\in(x_0,b)$，使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再次使用罗尔定理，知 $\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使 $f''(\xi)=0$，即方程 $f''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

例 19 设 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 I 上二次可微，$x_0+h\in I$，$\lambda\in(0,1)$，证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使

$$f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)+\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2f''(x_0+\xi h).$$

证 由 $0<\lambda<1$，故可取数 M，使等式

$$f(x_0+\lambda h)-\lambda f(x_0+h)-(1-\lambda)f(x_0)-\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2M=0$$

成立. 再证明：$\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $M=f''(x_0+\xi h)$.

引入辅助函数

$$F(t)=f(x_0+th)-tf(x_0+h)-(1-t)f(x_0)-\frac{t}{2}(t-1)h^2M,$$

则 $F(t)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且有三个零点，即 $F(0)=F(1)=F(\lambda)=0$. 在 $[0,1]$ 上应用罗尔定理，知 $\exists\ \xi\in(0,1)$，使 $F''(\xi)=0$，即 $f''(x_0+\xi h)=M$. 将 M 代回第一个等式，移项即得

$$f(x_0+\lambda h)=\lambda f(x_0+h)+(1-\lambda)f(x_0)+\frac{\lambda}{2}(\lambda-1)h^2f''(x_0+\xi h).$$

例 20 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=f(\xi)+\xi f'(\xi).$$

证 引入辅助函数 $F(x)=xf(x)-\dfrac{bf(b)-af(a)}{b-a}x$，由题设知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)$，满足罗尔定理条件. 故 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}.$$

二、拉格朗日中值定理的应用

拉格朗日中值定理的应用比罗尔定理更广泛，因为它对函数的要求更低. 应用拉格朗日中值定理证明命题的方法与技巧与罗尔定理基本相同，只是变化更加丰富.

例 21 (1) 设函数 f 在 $U_+(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ{}_+(x_0)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$ 存在，则右导数 $f'_+(x_0)$ 也存在，且

$$f'_+(x_0)=f'(x_0+0).$$

(2) 设函数 f 在 $U_-(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ{}_-(x_0)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0-0)$ 存在，则左导数 $f'_-(x_0)$ 也存在. 且

$$f'_-(x_0)=f'(x_0-0).$$

证 (1) 设 $x\in U_+(x_0)$，由拉格朗日中值定理，函数 f 在 (x_0,x) 内存在一点 ξ，使

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi).$$

由于 $x_0<\xi<x$，且当 $x\to x_0^+$ 时，$\xi\to x_0^+$，故

$$\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0).$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}f'(\xi)=f'(x_0+0).$$

(2) 类似可证 $f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0)$.

由本例可得导数极限定理：

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内连续，在 $U^\circ(x_0)$ 内可导. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 $f'(x_0)$ 也存在，且 $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x_0)$.

由例 21 和导数极限定理我们得知：区间 I 上的导函数 f'，在区间 I 上要么是连续点，要么是第二类间断点，不可能有第一类间断点.

例 22 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b) < 0$，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

证 设 $f'_+(a) > 0, f'_-(b) < 0$，由于

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

$$f'_-(a) = \lim_{x\to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} < 0,$$

依函数极限的保号性定理，存在 $x_1 \in U^\circ{}_+(a), x_2 \in U^\circ{}_-(b)$，且 $x_1 < x_2$，使 $f(x_1) < f(a), f(x_2) > f(b)$.

对于闭区间 $[x_1, x_2]$ 上的连续函数 f，由最大值与最小值定理，$\exists\ \xi \in [x_1, x_2] \subset (a,b)$，使 f 在点 ξ 取得最大值，也是极大值. 故由费尔马定理，$f'(\xi) = 0$.

由本例可推出重要的达布(Darboux)定理：

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(a) \neq f'(b)$，k 为介于 $f'(a)$，$f'(b)$ 之间的任一实数，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi) = k$.

定理的证明需引入辅助函数 $F(x) = f(x) - kx$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'_+(a)F'_-(b) < 0$，依例 22 结论，$\exists\ \xi \in (a,b)$，使 $F'(\xi) = f'(\xi) - k = 0$，即 $f'(\xi) = k$.

例 23 证明：对函数 $f(x) = px^2 + qx + 1$ 在某区间上应用拉格朗日中值定理时符合条件的 ξ 恰为区间中点. 其中 p, q, r 为常数.

证 不妨设区间为 $[a,b]$，则有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

因为 $$f(b)-f(a)=p(b^2-a^2)+q(b-a),$$
$$f'(\xi)=2p\xi+q,$$

所以 $$f'(\xi)(b-a)=p(b^2-a^2)+q(b-a)$$
$$\Rightarrow 2p\xi=p(b+a)\Rightarrow\xi=\frac{b+a}{2}.$$

即 ξ 恰为区间中点.

例 24 证明下列不等式:

(1) $|\arctan x-\arctan y|\leqslant|x-y|$;

(2) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\ (a>b>0)$;

(3) $e^x>xe\ (x>1)$.

证 (1) 当 $x=y$ 时,显然有

$$|\arctan x-\arctan y|=|x-y|.$$

当 $x\neq y$ 时,不妨设 $x<y$,令 $f(t)=\arctan t$,在 $[x,y]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\arctan y-\arctan x=\frac{1}{1+\xi^2}(y-x)$$
$$\Rightarrow|\arctan y-\arctan x|=\frac{1}{1+\xi^2}|y-x|\leqslant|y-x|,$$

故 $$|\arctan y-\arctan x|\leqslant|y-x|.$$

(2) 令 $f(x)=\ln x\ (x>0)$,在 $[b,a]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$\frac{\ln a-\ln b}{a-b}=\frac{1}{\xi}\Rightarrow\ln\frac{a}{b}=\frac{1}{\xi}(a-b).$$

因为 $b<\xi<a$,由不等式性质,得

$$\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}\quad(a>b>0).$$

(3) 令 $f(x)=e^x$,在 $[1,x]$ 上应用拉格朗日中值定理,得

$$e^x-e=e^{\xi}(x-1),\ 1<\xi<x,$$

$$\Rightarrow e^x - e > e(x-1) \Rightarrow e^x > ex.$$

取 $x=\pi$，即为常见的数值不等式 $e^\pi > e\pi$.

例 25 证明数值不等式 $1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8$.

证 因为 $\delta = \sqrt{64}$，故令 $f(x) = \sqrt{x}$，在区间[64,66]上应用拉格朗日中值定理，得

$$\frac{f(66)-f(64)}{66-64} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad 64 < \xi < 66,$$

即由 $$\sqrt{66} - 8 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{66}} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{\sqrt{64}},$$

得 $$1/9 < \sqrt{66} - 8 < 1/8.$$

例 26 若 $f'(x) = \lambda f(x)$ (λ 为常数)，$x \in (-\infty, +\infty)$，则 $f(x)$ 为指数函数.

证 $\forall\, x \neq 0 \in (-\infty, +\infty)$，$f(x)e^{-\lambda x}$ 在以 x 和 0 为端点的区间上满足拉格朗日中值定理条件，有

$$f(x)e^{-\lambda x} - f(0)e^{-\lambda 0} = [f'(\xi)e^{-\lambda\xi} - \lambda f(\xi)e^{-\lambda\xi}](x-0).$$

由题设知 $f'(\xi) = \lambda f(\xi)$，所以上式右边等于零，即 $f(x) - f(0)e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow f(x) = f(0)e^{\lambda x}$. 由于 $f(0)$ 是常数，故 $f(x)$ 为指数函数.

因式子在 $x=0$ 时亦成立，从而知对一切 $x \in (-\infty, +\infty)$，$f(x)$ 为指数函数.

例 27 设函数 f 在[0,1]上二阶可微，$f(0) = f(1)$，$f'(1) = 1$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = 2$.

证 引入辅助函数 $F(x) = f(x) - x^2$，则 $F(x)$ 在[0,1]上满足拉格朗日中值定理条件，所以 $\exists\, x_0 \in (0,1)$，使 $F'(x_0) = F(1) - F(0) = -1$.

又 $F'(1) = [f'(x) - 2x]\Big|_{x=1} = f'(1) - 2 = -1$. 所以 $F'(x) = f'(x) - 2x$ 在 $[x_0, 1]$ 上满足罗尔定理条件，故 $\exists\, \xi \in (x_0, 1) \subset (0,1)$，使 $F''(\xi) = 0$. 即存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) = 2$.

例 28 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：存在 $\xi \in (a,b)$，使

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证 引入辅助函数 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a).$$

由行列式性质

$$F'(\xi) = \begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix},\ F(a) = \begin{vmatrix} f(a) & f(a) \\ g(a) & g(a) \end{vmatrix} = 0,$$

所以
$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

例 29 设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二次可微，且 $|f(x)| \leqslant M$，证明：$\exists\ \xi \in (-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

证 若 $f''(x)$ 变号，则由导数的介值性，则 $\exists\ \xi \in (-\infty,+\infty)$，使 $f''(\xi)=0$.

下面用反证法证明 $f''(x)$ 一定变号.

若 $f''(x)$ 不变号，不妨设 $f''(x)>0$ ($f''(x)<0$ 类似可证). 必 $f'(x)>0$(见下节). 取 ξ，使 $f'(\xi)\neq 0$. 若 $f'(\xi)>0$，则当 $x>\xi$ 且 $x\to+\infty$ 时，由拉格朗日中值定理有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty,$$

若 $f'(\xi)<0$，则当 $x<\xi$ 且 $x\to-\infty$ 时，同样有

$$f(x)=f(\xi)+f'(\xi_1)(x-\xi)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)\to+\infty.$$

这与 $f(x)$ 的有界性矛盾. 故 $f''(x)$ 必变号.

例 30 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，并设有实数 A，使 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立，证明：在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$.

证法 1 由题设条件，在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x-0)| = |f'(\xi_1)x| \leqslant A|f(\xi_1)|x.$$

限制 $x \in \left(0, \frac{1}{2A}\right)$ 时,有

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)|,\ 0 < \xi_1 < x.$$

重复使用此式 n 次,得

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{4}|f(\xi_2)| \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|.$$

式中 $0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x \leqslant \frac{1}{2A}$.

由 f 的连续性知,$|f(x)| \leqslant M$,所以在 $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$ 上

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{2^n} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

从而知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$ 上时恒等于零. 用数学归纳法可证:在一切 $\left[\frac{i-1}{2A}, \frac{i}{2A}\right]$ $(i = 1,2,\cdots)$ 上恒有 $f(x) \equiv 0$. 于是得,在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv 0$.

证法 2 用反证法证.

若 $f(x) \neq 0$,则 $\exists\, x_0 \in (0, +\infty)$,使 $f(x_0) \neq 0$. 不妨设 $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$ 类似可证). 记 $x_1 = \inf\{x \mid (x, x_0)$ 内 $f(x) > 0\}$,由连续函数的局部保号性知 $f(x_1) = 0$,在 (x_1, x_0) 内 $f(x) > 0$.

令 $g(x) = \ln f(x)$ $(x \in (x_1, x_0))$,则 $|g'(x)| = \left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right| < A$,故在 (x_1, x_0) 内,$|g(x)| \leqslant M$. 但 $\lim\limits_{x \to x_1^+} f(x) = f(x_1) = 0$,从而 $\lim\limits_{x \to x_1^+} g(x) = -\infty$,与 $f(x) > 0$ 矛盾.

例 31 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:存在常数 $L > 0$,使 $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|$,$x_1, x_2 \in [a,b]$.

证 由 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知,$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值. 设 $L = \max|f'(x)|$ $(x \in [a,b])$. 依拉格朗日中值定理,有

$$f(x_1)-f(x_2)=f'(\xi)(x_1-x_2),\ \xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b).$$

即 $\quad |f(x_1)-f(x_2)|=|f'(\xi)||x_1-x_2|\leqslant L|x_1-x_2|.$

例 32 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，且存在常数 a_1,b_1 和 $a_2,b_2(a_1<a_2)$，使得

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(a_1x+b_1)]=0,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(a_2x+b_2)]=0.$$

证明：$\forall\ c\in(a_1,a_2)$，$\exists\ \xi$，使 $f'(\xi)=c$.

证 由 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a_2$ 知 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a_1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a_2$（由 $f(x)$ 的连续性知，$f(0)$ 为有限数）. 于是，$\forall\ c\in(a_1,a_2)$，$\exists\ X_1<0,X_2>0$，使

$$\frac{f(X_1)-f(0)}{X_1}<c,\quad \frac{f(X_2)-f(0)}{X_2}>c.$$

依拉格朗日中值定理，$\exists\ \xi_1\in(X_1,0)$，$\xi_2\in(0,X_2)$，使

$$\frac{f(X_1)-f(0)}{X_1-0}=f'(\xi_1)<c,\quad \frac{f(X_2)-f(0)}{X_2-0}=f'(\xi_2)>c.$$

由闭区间上连续函数的介值定理，$\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f'(\xi)=c$.

例 33 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证 将上式左边变形，得

$$\begin{aligned}
&f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\\
&=\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]\\
&=\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\
&\quad-\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)-f(a)\right],
\end{aligned}$$

故引入辅助函数 $\varphi(x)=f\left(x+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(x)$，对

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a),$$

在$\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$上应用拉格朗日中值定理，得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\varphi'(\xi_1)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)=\varphi'(\xi_1)\frac{b-a}{2}$$

$$=\left[f'\left(\xi_1+\frac{b-a}{2}\right)-f'(\xi_1)\right]\frac{b-a}{2}\text{（再用拉格朗日中值定理）}$$

$$=f''\left(\xi_1+\theta\frac{b-a}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2}$$

$$=f''(\xi)\frac{(b-a)^2}{4},\ \xi=\xi_1+\theta\frac{b-a}{2}\in(a,b).$$

例 34 设 $a,b>0$，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

证 将等式变形，得

$$\frac{1}{b}e^{1/\frac{1}{b}}-\frac{1}{a}e^{1/\frac{1}{a}}=(1-\xi)e^{1/\frac{1}{\xi}}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),$$

在$\left[\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right]$上引入辅助函数 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$，应用拉格朗日中值定理，即得上式. 再变形（两边同乘以 ab）即得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b),\quad \xi\in(a,b).$$

例 35 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，证明：$\exists\ \xi,\eta\in(a,b)$，使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

证 上式可化为 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=e^{\xi}$，为此，引入辅助函数 $F(x)=e^xf(x)$. 由题设知 $F(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，且 $F(a)=e^af(a)=e^a$，$F(b)=e^bf(b)=e^b$. 因此，$\exists\ \eta\in(a,b)$，使

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}=F'(\eta)=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)].$$

又 $g(x)=e^x$ 在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ \xi\in(a,b)$，使

$$\frac{e^b - e^a}{b - a} = e^{\xi}.$$

综上所述知，$\exists\ \xi,\eta \in (a,b)$，使

$$e^{\eta}[f(\eta) + f'(\eta)] = e^{\xi} \Rightarrow e^{\eta-\xi}[f(\eta) + f'(\eta)] = 0.$$

例 36 设$f(x)$为非线性函数，在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：$\exists\ \eta \in (a,b)$，使

$$|f'\eta| > \left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right|.$$

证 引入辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

由于$f(x)$非线性，$F(x) \not\equiv 0$，故$\exists\ c \in (a,b)$，使$F(c) \neq 0$. 而$F(a) = F(b) = 0$.

设$F(c) > 0$ ($F(c) < 0$类似可证). 在$[a,c]$与$[c,b]$上分别应用拉格朗日中值定理，得

$$F'(\xi_1) = \frac{F(c) - F(a)}{c - a} > 0, \quad \xi_1 \in (a,c),$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(b) - F(c)}{b - c} < 0, \quad \xi_2 \in (c,b),$$

而
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

即
$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + F'(x).$$

所以
$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < f'(\xi_2),$$

从而
$$\left|\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right| < \max\{|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|\} = |f'(\eta)|.$$

例 37 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，已知$f(0) = 0$，$f(1) = 1$，证明：$\forall\ a,b > 0$，$\exists\ \xi,\eta \in (0,1)$，且$\xi \neq \eta$，使

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

证 因为$a,b > 0$，所以$0 < \frac{a}{a+b} < 1$. 又$f(x)$在$[0,1]$上

连续，由介值定理知，$\exists\ t\in(0,1)$，使 $f(t)=\dfrac{a}{a+b}$.

在区间$[0,t]$和$[t,1]$上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，得

$$f(t)-f(0)=f'(\xi)(t-0),\quad \xi\in(0,t),$$
$$f(1)-f(t)=f'(\eta)(1-t),\quad \eta\in(t,1).$$

由于 $f(0)=0$，$f(1)=1$，所以由以上两式可得

$$t=\frac{f(t)}{f'(\xi)}=\frac{a}{a+b}\Big/f'(\xi),\ 1-t=\frac{1-f(t)}{f'(\eta)}=\frac{b}{a+b}\Big/f'(\eta).$$

于是，将前后两式两边分别相加，得

$$1=\frac{a}{(a+b)f'(\xi)}+\frac{b}{(a+b)f'(\eta)},$$

即
$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

例 38 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点的某一邻域内可导，且其导数 $f'(x)$ 在 x_0 连续，而 $\alpha_n<x_0<\beta_n(n=1,2,\cdots)$，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha_n\to x_0,\beta_n\to x_0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x_0).$$

证 设$\{\alpha_n\},\{\beta_n\}\in U^\circ(x_0)$，则依拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(\xi_n),\quad \alpha_n<\xi_n<\beta_n.$$

已知 $\xi_n\to x_0$，又 $f'(x)$ 在 x_0 连续，即 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}f'(\xi_n)=\lim_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0).$$

例 39 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，$f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，证明：$f(x)$ 在 (a,b) 内也有界.

证 因为 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界，所以 $\forall\ x\in(a,b)$，$\exists\ M_0>0$，使 $|f'(x)|\leqslant M_0$.

又由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可微，必在 (a,b) 内连续，则当取定 x_0

时，$f(x_0)$ 为一定值. 不妨设 $x_0 = \frac{a+b}{2}$，则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 是定值.

任取 $x \in (a,b)$，且 $x \neq x_0$，则在 $[x,x_0]$（或 $[x_0,x]$ 上，$f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件，恒有

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),\ \xi \in (x,x_0)\ (\text{或}(x_0,x)).$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)| - |f(x_0)| &\leqslant |f(x) - f(x_0)| \\ &= |f'(\xi)||x - x_0| \leqslant M_0|b-a|.\end{aligned}$$

即

$$|f(x)| \leqslant \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + M_0|b-a| = M.$$

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty]$ 上二阶可微，且 $f(a)>0$，$f'(a)<0$. 当 $x>a$ 时，有 $f''(x)<0$. 证明：方程 $f(x)=0$ 在 $[a,+\infty)$ 内有惟一实根.

证 由 $f''(x)<0$ 知，$f'(x)$ 单调递减，即当 $x>a$ 时，$f'(x)<f'(a)<0$，故 $f(x)$ 单调递减. 从而知 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内至多有一个实根.

因为 $f(a)$，$f'(a)$ 均为定数，所以 $a-\frac{f(a)}{f'(a)}>a$ 且为定数，在 $\left[a,a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$\begin{aligned}f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) - f(a) &= f'\left(a-\theta\frac{f(a)}{f'(a)}\right)\cdot\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) \\ &< f'(a)\left(-\frac{f(a)}{f'(a)}\right) = -f(a),\end{aligned}$$

于是 $f\left(a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)<0$. 因为 $f(a)>0$，故在 $\left(a,a-\frac{f(a)}{f'(a)}\right)$ 内，$f(x)$ 至少有一实根.

综上所述，命题得证.

三、柯西中值定理的应用

由于涉及两个函数的问题，柯西中值定理的应用要比罗尔定理与拉格朗日中值定理的应用来得复杂. 特别要注意的是，在一个命题中如何分离出两个恰当的函数来，使函数既满足柯西定理条件，又使命题的证明（或计算）变得简单易行. 柯西中值定理经常

要与其它定理一起使用，所以分析问题时要注意层次性.

例 41 设函数 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，且 $x_1x_2>0$，证明：$\exists\ \xi \in (x_1,x_2)$，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi).$$

解 引入辅助函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$. 因为 $x_1x_2>0$，所以在 $[x_1,x_2]$ 上不含 $x=0$ 的点. 显然，$f(x)$，$g(x)$ 满足柯西中值定理条件，故 $\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即
$$\frac{\dfrac{\varphi(x_2)}{x_2}-\dfrac{\varphi(x_1)}{x_1}}{1/x_2-1/x_1}=\frac{\dfrac{\xi\varphi'(\xi)-\varphi(\xi)}{\xi^2}}{-1/\xi^2}.$$

于是
$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \varphi(\xi)-\xi\varphi'(\xi).$$

引入辅助函数的方法通常是：将所证结论（等式或不等式）变形，分析变形后的等式或不等式找出恰当的函数. 较简单的情形，可直接选等式或不等式的一部分作为辅助函数，或将式子的一边移到另一边作为辅助函数. 本例就是将欲证等式左边变形为

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \varphi(x_1) & \varphi(x_2) \end{vmatrix} = \left[\frac{\varphi(x_1)}{x_1}-\frac{\varphi(x_2)}{x_2}\right]\Big/\left[\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right],$$

从而找出辅助函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x}$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$.

例 42 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内 n 阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$. 证明：

$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\ \theta\in(0,1).$$

证 令 $g(x)=x^n$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,x]$ 上满足柯西中值定理条件，故

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{g'(\xi_1)-g'(0)}=\frac{f''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=\cdots$$
$$=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{g^{(n-1)}(\xi_{n-1})-g^{(n-1)}(0)}=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!},$$
式中 $\xi_n=\theta x\in(0,x)$，$\theta\in(0,1)$.

即
$$f(x)=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,\quad \theta\in(0,1).$$

例 43 设函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，证明：$\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使
$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

证 因为 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists\ x_1\in(a,b)$，使
$$f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad ①$$

又令 $g(x)=x^2,h(x)=x^3$. 对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 及 $f(x)$ 与 $h(x)$ 分别在$[a,b]$上应用柯西中值定理，得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_2)}{g'(x_2)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(x_2)}{2x_2},\quad x_2\in(a,b),$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{f'(x_3)}{h'(x_3)}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(x_3)}{3x_3^2},\quad x_3\in(a,b),$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b+a)\dfrac{f'(x_2)}{2x_2}, & ②\\[2ex] \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=(b^2+ab+a^2)\dfrac{f'(x_3)}{3x_3^2}. & ③\end{cases}$$
比较式①，式②，式③知，$\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使
$$f'(x_1)=(b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}=(b^2+ab+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

请读者尝试证明类似命题：若函数 f 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $0<a<b$，则 $\exists\ x_1,x_2,x_3\in(a,b)$，使
$$\frac{f'(x_1)}{2x_1}=(b^2+a^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3}=\frac{\ln(b/a)}{b^2-a^2}x^3f'(x_3).$$

例 44 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 a 与 b 同号，证明：$\exists\ \xi \in (a,b)$，使

(1) $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$；

(2) $f(b)-f(a)=\xi\left(\ln\dfrac{b}{a}\right)f'(\xi)$.

证 (1) 将欲证等式变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}$ 知，需引入辅助函数 $g(x)=x^2$. 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上满足柯西中值定理条件，所以 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

即
$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

(2) 将欲证等式变形为 $\dfrac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\dfrac{f'(\xi)}{1/\xi}$，知需引入辅助函数 $g(x)=\ln|x|$. 由于 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上满足柯西中值定理条件，所以 $\exists\ \xi \in (a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln|b|-\ln|a|}=\frac{f'(\xi)}{1/\xi}=\xi f'(\xi),$$

即
$$f(b)-f(a)=\xi\ln\left|\frac{b}{a}\right|f'(\xi)=\xi\ln\left(\frac{b}{a}\right)f'(\xi).$$

例 45 若 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 由式 $[f(x)+f'(x)]e^x=[f(x)e^x]'$ 出发，考虑引入辅助函数 $F(x)=f(x)e^x$，$g(x)=e^x$. 显然，$g'(x)\neq 0$.

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$，知 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ X>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)+f'(x)|<\varepsilon$.

对 $x>X$，在 $[X,x]$ 上应用柯西中值定理，得

$$\frac{F(x)-F(X)}{g(x)-g(X)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(X,x),$$

即
$$\frac{f(x)-f(x)e^{X-x}}{1-e^{X-x}}=\frac{f(x)e^x-f(X)e^X}{e^x-e^X}=f(\xi)+f'(\xi)$$

或 $|f(x)| \leqslant |f(X)|e^{X-x} + |f(\xi) + f'(\xi)|(1 + e^{X-x})$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{X-x} = 0$，所以 $\exists X_1 > X$，当 $x > X_1$ 时，有 $e^{X-x} < \varepsilon$ 和 $e^{X-x} < 1$. 于是，$\forall x > X_1$，使

$$|f(x)| \leqslant |f(X)|\varepsilon + 2\varepsilon = (|f(X)| + 2)\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

例 46 设 $h > 0$，函数 f 在 $[a-h, a+h]$ 上可导. 证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使得

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h} = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$

(2) 设函数 g 在点 a 二阶可微，证明

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2} = g''(a).$$

证 (1) 引入辅助函数 $F(x) = f(a+x) - f(a-x)$，$x \in [a,h]$. 显然，$F(x)$ 在 $[0,h]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，故 $\exists \xi \in (0,1)$，使

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a+h)}{h} = \frac{F(h) - F(0)}{h - 0}$$
$$= F'(\theta h) = f'(a+\theta h) - f'(a-\theta h).$$

(2) 由题设函数 g 在点 a 二阶可导知，在 $U(x_0)$ 内 $g(x)$ 连续并有一阶导数，任取 $h \in (0,\delta)$ 并令

$$\begin{cases} F(x) = g(a+x) - 2g(a) + g(a-x), \\ G(x) = x^2, \end{cases} \quad x \in [0,h],$$

则 $F(x)$ 和 $G(x)$ 满足柯西中值定理条件，故 $\exists \xi \in (0,h)$，使

$$\frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2}$$
$$= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{g'(a+\xi) - g'(a-\xi)}{2\xi}.$$

而 $h \to 0$ 时，$\xi \to 0$，且 g 在 a 二阶可导，故

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{G(h) - G(0)} = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - 2g(a) + g(a-h)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g'(a+\xi) - g'(a-\xi)}{2\xi}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left[\frac{g'(a+\xi) - g'(a)}{\xi} + \frac{g'(a-\xi) - g'(a)}{-\xi} \right]$$

$$= \frac{1}{2} [g''(a) + g''(a)] = g''(a).$$

例 47 设函数 f 在 $(0,1)$ 内连续且可导，有 $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} f'(x) = 0$，证明：$f$ 在 $(0,1]$ 内一致连续.

证 由函数极限的局部有界性知，$\exists M > 0$，和 $0 < c < 1$. 使

$$|\sqrt{x} f'(x)| \leqslant M, \ x \in (0,c].$$

于是 $\forall x_1, x_2 \in (0,c]$，且 $x_1 \neq x_2$，依柯西中值定理，$\exists \xi \in (x_1,x_2)$（或 (x_2,x_1)），有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}} = \frac{f'(\xi)}{1/(2/\sqrt{\xi})} = 2\sqrt{\xi} f'(\xi),$$

即 $|\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}|^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \leqslant |x_1 - x_2|$.

故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \min\left\{ \left(\frac{\varepsilon}{2M} \right)^2, c \right\}$，当 $x_1, x_2 \in (0,c]$，且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时，由上面两式得到

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2M |\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}| \leqslant 2M \sqrt{|x_2 - x_1|} < \varepsilon.$$

于是知 f 在 $(0,c]$ 上一致连续. 由于 f 在 $(0,1]$ 上连续，所以 f 在 $[c,1]$ 上连续，从而在 $[c,1]$ 上一致连续. 于是 f 在 $(0,1]$ 上一致连续.

例 48 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$0 < a < b$，$f(a) \neq f(b)$，证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使

$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

证 将欲证等式变形为 $\dfrac{f'(\xi)}{1}(b-a) = \dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2)$ 知，要引入辅助函数 $g_1(x) = x$ 和 $g_2(x) = x^2$. 在 $[a,b]$ 上分别对

$f(x), g_1(x)$ 和 $f(x), g_2(x)$ 应用柯西中值定理,得

$$\begin{cases} f(b) - f(a) = \dfrac{f'(\xi)}{1}(b-a), & \xi \in (a,b), \\ f(b) - f(a) = \dfrac{f'(\eta)}{2\eta}(b^2 - a^2), & \eta \in (a,b). \end{cases}$$

即
$$f'(\xi) = \frac{a+b}{2\eta} f'(\eta).$$

例 49 证明不等式

$$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2} \ (x > 0).$$

证 令 $f(x) = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}), g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$,则上式转化为 $f(x) > g(x)\ (x > 0)$. 由于 $f(0) = 0, g(0) = 0$,对 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在$[0,x]$上应用柯西中值定理,得

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

于是 $f(x) > g(x)$ 又转化为 $f'(\xi) > g'(\xi)$. 因为

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\ln(\xi + \sqrt{\xi^2+1}) + \xi/\sqrt{1+\xi^2}}{\xi/\sqrt{1+\xi^2}} = 1 + \frac{\sqrt{1+\xi^2}\ln(\xi + \sqrt{1+\xi^2})}{\xi},$$

而当 $x > \xi > 0$ 时,$\frac{1}{\xi}\sqrt{1+\xi^2}\ln(\xi + \sqrt{1+\xi^2}) > 0$,所以

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 1 \Rightarrow f'(\xi) > g'(\xi) \Rightarrow f(x) > g(x),$$

即
$$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2}.$$

请读者尝试证明类似命题:证明不等式

$$\arctan x - \ln(1+x^2) > \pi/4 - \ln 2,\ x \in [1/2, 1],$$

只需设 $f(x) = \ln(1+x^2), g(x) = \arctan x$,在$[x,1]$上应用柯西中值定理,注意到 $x \in [1/2,1]$ 即可.

例 50 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $ab > 0$,证明:$\exists\ \xi \in (a,b)$,使

$$\frac{ab}{b-a}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

证 将欲证等式变形为

$$\frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

知需引入辅助函数 $F(x)=xf(x), G(x)=-\frac{1}{x}$，在 $[a,b]$ 上对 $F(x), G(x)$ 应用柯西中值定理，得

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-F(a)} = \frac{bf(b)-af(a)}{-1/b+1/a} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{f(\xi)+\xi f'(\xi)}{1/\xi^2},$$

即
$$\frac{ab}{a-b}\begin{vmatrix} b & a \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = \xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)].$$

例 51 设函数 f 在 $(-1,1)$ 内可微，$f(0)=0, |f'(x)|=1$，证明：在 $(-1,1)$ 内，$|f(x)|<1$.

证 引入辅助函数 $g(x)=x$，在 $[0,x]$（或 $[x,0]$）上（$x\in(-1,1)$）应用柯西中值定理，得

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(\xi)}{1} = f'(\xi).$$

因为 $f(0)=0, g(0)=0$，且 $|f'(x)|\leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = |f'(\xi)| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |x| \leqslant 1.$$

第二节　洛必达法则

主要内容

洛必达(L'Hospital)法则用于求未定式的极限. 以下七种类型的未定式可以利用洛必达法则来求：

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$$

1. $\frac{0}{0}$ 型未定式　若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$;

(2) f,g 在 $U^\circ(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为实数或 $\pm\infty,\infty$)；则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

定理对极限过程 $x\to x_0^+,x\to x_0^-,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$ 的情形，只要稍加修改条件(2)，也有同样的结论成立.

2. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式　若

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty,\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=\infty$;

(2) f,g 在 $U^\circ{}_+(x_0)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 为实数或 $\pm\infty,\infty$)；则

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

定理对极限过程 $x\to x_0^-,x\to x_0,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$ 的情形，只要稍加修改条件(2)，也有同样的结论成立.

3. $0\cdot\infty$ 型未定式　若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=\infty;$$

化为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)};$$

则为 $\frac{0}{0}$ 型未定式，化为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)};$$

则为$\frac{\infty}{\infty}$型未定式.

可用以上方法分别确定极限.

4. $\infty-\infty$型未定式　若

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty,$$

化为　$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/(f(x)g(x))},$$

则为$\frac{0}{0}$型. 实际运算时，一般均可通过通分实现.

5. $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$型未定式　一般为幂指函数形式，即$f(x)^{g(x)}$形式，通过取对数化为$g(x)\ln f(x)$形式，即为$0\cdot\infty$型. 再依$0\cdot\infty$型未定式情形化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型，即可使用洛必达法则确定极限值.

疑 难 解 析

1. 用洛必达法则确定未定式极限要注意哪些问题?

答　(1) 用洛必达法则计算极限之前要先确定是否$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的未定式，或是否可转化$\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$型. 若不能转化，则不能使用洛比达法则；若能转化，待转化后再使用洛必达法则.

一般定理的第(3)条不进行验证，通过计算可以确定$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$是否存在.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在，但仍是未定式时，可以继续使用洛必达法则. 允许在满足条件时多次使用洛必达法则.

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$不存在，且不是未定式时，并不说明极限不存在，还有可能可用其它方法求出极限. 例如

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\tan x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\tan x}{\sec x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\cdots,$$

用洛必达法则结果反复循环，得不到极限，但

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sec x}{\tan x}\xlongequal{\text{化简}}\lim_{x\to\pi/2}\frac{1}{\sin x}=1.$$

(3) 在使用洛必达法则之前和之中，要不断对函数进行化简，并配合其它求极限方法，使计算过程更为简捷. 例如

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan7x}{\ln\tan2x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)&\xlongequal{L'}\lim_{x\to0^+}\frac{7\sec^2 7x}{\tan7x}\Big/\frac{2\sec^2 2x}{\tan2x}\ (\text{化简})\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{7\sin2x\cos2x}{2\sin7x\cos7x}=\lim_{x\to0^+}\frac{7}{2}\cdot\frac{\sin4x}{\sin14x}\ (\text{等价无穷小})\\&=\lim_{x\to0}\frac{7}{2}\cdot\frac{4x}{14x}=1.\end{aligned}$$

(4) 洛必达法则只是计算未定式极限一种较普遍的方法，它不是惟一的，也不一定是最简捷的，所以在使用中要认真考察. 例如

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)&\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)\\&\xlongequal{L'}\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\cos x+x(-\sin x)}{\cos x}=2,\end{aligned}$$

但 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$(等价无穷小代换) $=\lim\dfrac{x^2}{x^2/2}=2$，则不用洛必达法而更为简单易行.

方法、技巧与典型例题分析

在疑难解析中，我们讲述了使用洛必达法则所应注意的问题. 而更重要的是灵活运用洛必达法则，不要墨守成规.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arccot}x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(x^2-\pi^2)\sin5x}{e^{\sin^2 x}-1}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

解　(1) 是$\frac{0}{0}$型未定式，故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+2x}=1.$$

(2) 是$\frac{0}{0}$型未定式，故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x[-4(\pi-2x)]}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to\pi/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{-\sin x}{-2\sin x+(\pi-2x)\cos x}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}.$$

(3) 是$\frac{0}{0}$型未定式，故

$$原式=\lim_{x\to\pi}\frac{(x+\pi)(x-\pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{2\pi(x-\pi)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{2\sin x\cos x e^{\sin^2 x}}$$

$$\xlongequal{L'}2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{2\sin x\cos x e^{\sin^2 x}}$$

$$=2\pi\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x+5(x-\pi)\cos 5x}{-2\sin x}=-5\pi.$$

(4) 是$\frac{0}{0}$型未定式，故

$$原式\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1/x-1}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}}{-1/x^2}=-2.$$

例 2　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^x - a^a}\ (a > 0, x > 0)$；　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1 + 2x)^{1/2}}{\ln(1 + x^2)}$；　(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$.

解　(1) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim\limits_{x \to a} \dfrac{a x^{a-1} - a^x \ln a}{x^x(\ln x + 1)}$（代入）

$$= \frac{a a^{a-1} - a^a \ln a}{a^a(\ln a + 1)} = \frac{1 - \ln a}{1 + \ln a}.$$

(2) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - \cos x e^{\sin x}}{1 - \cos x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x} + \sin x e^{\sin x}}{\sin x}\text{（化简）}$$

$$= 1 + \lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos^2 x e^{\sin x}}{\sin x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} 1 + \lim_{x \to 0} \frac{e^x + (\sin 2x - \cos^2 x)e^{\sin x}}{\cos x}$$

$$= 1 + 0 = 1.$$

(3) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (1 + 2x)^{-1/2}}{2x/(1 + x^2)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2}{2} \cdot \frac{e^x - (1 + 2x)^{-1/2}}{x}$$

$$\xlongequal{L'} \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} e^x + (1 + 2x)^{-3/2} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(4) 原式$\left(\dfrac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1/\sqrt{1 - x^2} - \cos x}{1/(1 + x^2) - \sec^2 x}$（化简）

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 + x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}\cos x}{\cos^2 x - 1 - x^2}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x/\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin x}{-\sin 2x - 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x + (1 - x^2)\sin x}{\sin 2x + 2x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} -\lim_{x \to 0} \frac{\text{cois}\,x - x\sin x + (1 - x^2)\cos x - 2x\sin x}{2\cos 2x + 2}$$

$$= -\frac{1 + 1}{2 + 2} = -\frac{1}{2}.$$

例 3 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$.

解 (1) 是$\dfrac{0}{0}$型未定式. 先分解因式再求极限，有

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{1}{2\sqrt{x}}\lim_{x\to 1}\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cdots\lim_{x\to 1}\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.$$

(2) $$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(2-4x^3)/(2\sqrt{2x-x^4})-1/(3\sqrt[3]{x^2})}{-3/(4\sqrt[4]{x})}$$

$$=\frac{-2/2-1/3}{-3/4}=\frac{16}{9}.$$

例 4 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2x\arctan x/\pi}{e^x+x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$.

解 (1) $$\text{原式}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{be^x}{a+be^x}\Big/\frac{2bx}{2\sqrt{a+bx^2}}$$

$$=1\Big/\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{b}}.$$

(2) $$\text{原式}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-2\arctan x/\pi-2x[\pi(1+x^2)]}{e^x-1}$$

$$=1.$$

(3) $$\text{原式}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/(\tan 7x)\cdot\sec^2 7x\cdot 7}{1/(\tan 2x)\cdot\sec^2 2x\cdot 2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{7}{2}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{7}{2}\cdot\frac{2x}{7x}=1.$$

例 5 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^{\lambda x}}$ $(\mu>0,\lambda>0)$.

解 (1) 作变量代换 $u=\dfrac{1}{x^2}$，则当 $x\to 0$ 时，$u\to+\infty$，于是

$$\text{原式}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^{50}}{e^u}\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50u^{49}}{e^u}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50\cdot 49u^{48}}{e^u}\overset{L'}{=\!=}\cdots\overset{L'}{=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{50!}{e^u}=0.$$

(2) $\text{原式}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xnx^{n-1}}=0.$

此题说明：当 $x\to+\infty$ 时，幂函数 x^n 是对数函数 $\ln x$ 的高阶无穷大.

(3) 当 μ 为正整数时，有

$$\text{原式}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu(\mu-1)x^{\mu-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\cdots\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu}{\lambda^\mu e^{\lambda x}}=0.$$

当 μ 不是正整数，但$[\mu]<\mu<[\mu]+1$. 易见

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[\mu]}}{e^{\lambda x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{[\mu]+1}}{e^{\lambda x}}=0.$$

由迫敛性，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^{\lambda x}}=0$. 所以，当 $\lambda>0,\mu>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\mu}{e^{\lambda x}}=0$.

此极限说明，当 $x\to+\infty$ 时，指数函数 $e^{\lambda x}(\lambda>0)$ 是幂函数 x^μ $(\mu>0)$ 的高阶无穷大.

例 6 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot^2x-\dfrac{1}{x^2}\right)$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

解 (1) $\text{原式}(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cot^2x-1}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cot^2x-x^22\cot x-\csc x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x\sin x - x\cos x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2 x}{3x^2}$$

$$=-2/3.$$

(2) 原式$(\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{1-1/x}{\ln x + (x-1)/x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1}\left(\frac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 2} = \frac{1}{2}.$$

例 7 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)e^{1/x} - 1\right]$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan 3x^2\right)\cdot x^2$.

解 (1) 原式$(0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+2/x)e^{1/x}-1}{1/x}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{-e^{1/x}(3/x^2 + 2/x^3)}{-1/x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} e^{1/x}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right) = 3e^0 = 3.$$

(2) 原式$(0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi/2 - \arctan 3x^2}{1/x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\xlongequal{L'}\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x/(1+3x^2)^2}{-2/x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4}{1+ax^4} = \frac{1}{3}.$$

例 8 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{1/x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3x^x)^{1/x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x^{\ln(1-x)}$.

解 幂指函数 $f(x)^{\varphi(x)}$ 为 $0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型未定式时，求极限时要用取对数方法，化为 $0\cdot\infty$ 型再化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型，用洛比达法则求出极限. 但是，在书写上有两种形式.

一种是写成$\lim f(x)^{\varphi(x)}=\lim e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\varphi(x)\ln f(x)}$的形式，再将其化为$e^{\lim \ln f(x)/\frac{1}{\varphi(x)}}$，求出极限.

一种是写成$\lim\varphi(x)\ln f(x)=\lim\dfrac{\ln f(x)}{1/\varphi(x)}$后，再写成$\lim f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\varphi(x)\ln f(x)}$的形式.

相比之下，后一种写法看起来简单明了.

(1) 因为
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}(x^x-1)\ln x&=\lim_{x\to0^+}(e^{x\ln x}-1)\ln x\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}x\ln^2x=\lim_{x\to0^+}x\ln^2x\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln^2x}{1/x}\left(\frac{0}{0}\right)\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x\cdot1/x}{-1/x^2}\\&=-2\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{L'}{=\!=}-2\lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=0,\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{x\to0^+}x^{(x^x-1)}=e^0=1.$$

(2) 因为
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\\overset{L'}{=\!=}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\pi/2-\arctan x}\left(\frac{-1}{1+x^2}\right)\\=&\lim_{x\to+\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{\pi/2-\arctan x}\left(\frac{0}{0}\right)\\\overset{L'}{=\!=}&\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x/(1+x^2)^2}{-1/(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0,\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/x}=e^0=1.$$

(3) 因为
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+3^x)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\\overset{L'}{=\!=}&\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+3^x}(1+3^x\ln3)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\\\overset{L'}{=\!=}&\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\ln^23}{1+3^x\ln3}=\ln3,\end{aligned}$$
所以
$$\lim_{x\to+\infty}(x+3^x)^{1/x}=e^{\ln3}=3.$$

(4) 因为
$$\lim_{x\to0^+}\ln(1-x)\ln\tan x\ (0\cdot\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \tan x}{1/\ln(1-x)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=} \lim_{x \to 0^+} \frac{1/\tan x - 1/\cos^2 x}{1/[(1-x)\ln^2(1-x)]}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln^2(1-x)}{\sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{(-1)2\ln(1-x)}{(1-x)\cos x} = 0,$$

所以
$$\lim_{x \to 0^+} \tan x^{\ln(1-x)} = e^0 = 1.$$

例 9 求下列极限：

(1) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x}$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

(2) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots a_n^x}{n}\right)^{n/x}$, $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$.

解 (1) 因为
$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a^x + b^x + c^x) - \ln 3}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=} \lim_{x \to 0} \frac{a^x \ln a + b^x \ln b + c^x \ln c}{a^x + b^x + c^x}$$

$$= \frac{\ln a + \ln b + \ln c}{3} = \ln \sqrt[3]{abc},$$

所以
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)^{1/x} = e^{\ln \sqrt[3]{abc}} = \sqrt[3]{abc}.$$

(2) 因为

$$\lim_{x \to 0} \frac{n}{x} \ln\left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right) \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=} \lim_{x \to 0} \frac{n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \cdot \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{n}$$

$$= \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n = \ln(a_1 a_2 \cdots a_n),$$

所以
$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{n/x} = e^{\ln(a_1 a_2 \cdots a_n)} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

例 10 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{n+1}{n}-\dfrac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot} n}$.

解　对数列$\{x_n\}$的情形，若把x_n看作整标函数$f(n)$，则$f(n)$是$f(x)$的特殊取法. 因此，可先求$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，再令$x=n$，得$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$.

$$(1)\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg/\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1\Big/\left[1+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-x/\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x(2x^2+2x+1)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{3x\sqrt{x^2+1}}{6x^2+4x+1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\arctan\frac{n+1}{n}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{\operatorname{arccot}x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x/(1+x)(-1/x^2)}{-1/(1+x^2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x+x^2}=1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{\operatorname{arccot}n}=1.$$

在以上的例题中，我们在使用洛必达法则的同时，还使用了两个重要极限、等价无穷小代换、变量代换、有理分式函数时∞的次数比等方法，从而迅速得出结果. 这就要求读者熟练掌握求极限的各种方法和综合运用能力.

例 11　设$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+ce^x)}{\sqrt{1+cx^2}}=4$，确定$c$.

解 是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式，依洛必达法则，有

$$\text{原式} \xlongequal{L'} \lim_{x\to+\infty} \frac{ce^x}{1+ce^x} \Big/ \frac{cx}{\sqrt{1+cx^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{ce^x}{1+ce^x} \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+cx^2}}{cx}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{e^{-c}+c} \cdot \frac{\sqrt{c}}{c} = \frac{1}{\sqrt{c}},$$

所以

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = 4 \Rightarrow c = \frac{1}{16}.$$

例 12 设 $f(x) = x^3 + \ln(1-x^3)$，$g(x) = Ax^n$. 若当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是等价无穷小.

解 由题设，得

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x\to0} \frac{x^3+\ln(1-x^3)}{Ax^n} = \lim_{x\to0} \frac{3x^2 - 3x^2/(1-x^3)}{nAx^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-3x^5}{Anx^{n-1}(1-x)} = \lim_{x\to0} \frac{-3}{Anx^{n-6}} = 1.$$

故知

$$n = 6, \quad An = -3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

例 13 设函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的邻域内有连续的二阶导数，且 $f'(a) \neq 0$，证明：

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{1}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)}\right] = -\frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

证 是 $\infty - \infty$ 型的未定式，故

$$\text{原式} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)f'(a) - [f(x)-f(a)]}{[f(x)-f(a)](x-a)f'(a)} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x\to a} \frac{f'(a) - f'(x)}{f'(x)(x-a)f'(a) + [f(x)-f(a)]f'(a)} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x\to a} \frac{-f''(x)}{f''(x)(x-a)f'(a) + 2f'(x) + f'(a)}$$

$$= \frac{f''(a)}{2[f'(a)]^2}.$$

例 14 证明:若函数 $f(x)$ 在点 x 有二阶导数,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x).$$

证 先应用洛必达法则,再依导数定义,有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).$$

例 15 设函数 $y=f(x)$ 的二阶导数连续,且 $f''(x)>0$,$f(0)=0$,$f'(0)=0$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(u)}{uf(x)}$,其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

解 (1) 先求 u 的表达式. 由题设 $f''(x)>0$ 知,$f'(x)$ 是严格单调增加函数. 又由 $f'(0)=0$ 知,$x\neq 0$ 时,$f'(x)\neq 0$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$,当 $Y=0$ 时,即得切线在 x 轴上的截距:$u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

(2) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u}$. 因为利用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f'(x)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=-\frac{f'(0)}{f''(0)}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{f(x)}{xf'(x)}\right)=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=\!=}1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)/x}{f'(x)/x+f''(x)}$$

$$= 1 - \frac{f''(0)}{f''(0) + f''(0)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(3) 求$\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(u)}{f(x)}$. 应用洛必达法则，得

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(u)}{f(x)}\left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x \to 0} \frac{f'(u)(x - f(x)/f'(x))'}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(u)\left\{1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right\}}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(u)f(x)f''(x)}{[f'(x)]^3}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left\{f''(x) \cdot \frac{f(x)}{xf'(x)} \cdot \frac{f'(u)/u}{[f'(x)/x]^2} \cdot \frac{u}{x}\right\}$$

$$= f''(0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(0)}{[f''(0)]^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

综上所述，最后得

$$\lim_{x \to 0} \frac{xf(u)}{uf(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{u} \lim_{x \to 0} \frac{f(u)}{f(x)} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

第三节　泰勒公式

主要内容

1. 泰勒定理　若函数 f 满足下列条件：

(1) 在闭区间$[a,b]$上函数 f 有直到 n 阶的连续导数，

(2) 在开区间(a,b)内函数 f 有 $n+1$ 阶导数，

则对任何 $x, x_0 \in (a,b)$，至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

泰勒定理又称为泰勒中值定理.等式称为函数 f 在 x_0 的泰勒公式.

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

称为 f 在 x_0 的泰勒多项式.

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为 f 在 x_0 处泰勒公式的余项. $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

2. 当 $n=0$ 时,泰勒定理即拉格朗日中值定理.

3. 泰勒公式在 $x_0=0$ 时称麦克劳林(Maclaurin)公式.

4. 带皮亚诺(Peano)型余项的泰勒公式　若函数 f 满足

(1) 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 有直到 $n-1$ 阶的连续导数,

(2) $f^{(n)}(x_0)$ 存在,

则
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),\ x\in U(x_0).$$

5. 常用的初等函数的麦克劳林公式

(1) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

(2) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

(3) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\sin\left(\theta x+\frac{\pi}{2}\right);$$

(4) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+(-1)^{m+1}\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos(\theta x);$$

$$
(5)\ (1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\theta-n-1},
$$

其中 $0<\theta<1$.

疑难解析

1. 怎样理解泰勒公式的意义?

答 泰勒公式的意义是,用一个 n 次多项式来逼近函数 f. 而多项式具有形式简单,易于计算等优点.

泰勒公式由 $f(x)$ 的 n 次泰勒多项式 $P_n(x)$ 和余项 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$ 组成,我们来详细讨论它们.

当 $n=1$ 时,有

$$
P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)
$$

是 $y=f(x)$ 的曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线(方程),称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的一次密切. 显然,切线与曲线的差异是较大的,只是曲线的近似.

当 $n=2$ 时,有

$$
P_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2
$$

是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的"二次切线",也称曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的二次密切. 可以看出,二次切线与曲线的接近程度比切线要好.

当次数越来越高时,接近程度越来越密切,近似程度也越来越高.

2. 泰勒公式的余项有哪些类型?它们各有什么作用?

答 泰勒公式的余项分为两类,一类是定性的,一类是定量的,

它们的本质相同，但性质各异. 定性的余项如皮亚诺型余项 $o((x-x_0)^n)$，仅表示余项是比 $(x-x_0)^n$（当 $x \to x_0$ 时）高阶的无穷小. 如 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. 表示当 $x \to 0$ 时，$\sin x$ 用 $x - \frac{x^3}{6}$ 近似，误差（余项）是比 x^3 高阶的无穷小. 定量的余项如拉格朗日型余项 $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 也可写成 $x_0+\theta(x-x_0)$）、柯西型余项（如在某些函数的幂级数展开时用）. 定量的余项一般用于函数值的计算与函数性态的研究.

方法、技巧与典型例题分析

泰勒公式常用于近似计算、极限计算、不等式与等式证明及某些命题的证明.

一、利用泰勒公式计算极限

利用泰勒公式求极限，一般用麦克劳林公式形式，并采用皮亚诺型余项. 当极限式为分式时，一般要求分子分母展成同一阶的麦克劳林公式，通过比较求出极限.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/2+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\frac{x}{e^x-1}\right)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$.

解 (1) 因为当 $x \to 0$ 时，有

$$e^{-x^2/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4),$$

所以 $e^{-x^2/2} - \cos x = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$,

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{x^4/12+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=\frac{1}{12}.$$

(2) 当 $x\to 0$ 时,有 $\sqrt{1+x^4}=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$,故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+1-\sqrt{1+x^2}}{x^2\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4/8+o(x^4)}{x^2\cdot x^2}=-\frac{1}{8}.$$

(3) $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^3(2x)}\cdot\frac{8\sin^3(2x)}{(2x)^3}\cdot\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}8\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$

因为 $x\to 0$ 时,$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^3(2x)}{x^4}\left(1-\frac{x}{e^x-1}\right)=8\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2+o(x^2)}{x(x+o(x))}=4.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时,有

$$\begin{aligned}\cos(\sin x)&=1-\frac{1}{2}\sin^2x+\frac{1}{24}\sin^4x+o(\sin^4x)\\&=1-\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^2\\&\quad+\frac{1}{24}\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4),\end{aligned}$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4).$$

故 $$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4/24-x^4/24+o(x^5)}{\sin^4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/6+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

例 2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^6}[\cos^2 x\sin^2 x - x^2(1-x^2)^{4/3}]$.

解 (1) 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}\to 0$, 有

$$e^{1/x}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$\sqrt{x^6+1}=x^3\left(1+\frac{1}{x^6}\right)^{1/2}=x^3+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^9}\right),$$

所以 $\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}$

$$=\frac{1}{6}+x^3\cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right)+\frac{5}{12x}+\frac{1}{12x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\cdot o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{8x^9}+o\left(\frac{1}{x^9}\right).$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]=\frac{1}{6}.$$

(2) 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}\to 0$, 有

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

故 $$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x^2}-x^2\cdot o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

(3) 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[3]{1+x+x^2}=1+\dfrac{1}{3}(x+x^2)+o(x)$, $e^x=1+x+o(x)$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2)/3+o(x)}{x+o(x)}=\frac{1}{3}.$$

(4) 当 $x\to 0$ 时, 有

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\frac{1}{6!}(2x)^6+o((2x)^7)\right],$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4-\frac{1}{6!}(2x)^6+o((2x)^7)\right].$$

故 $$\cos^2 x\sin^2 x = x^2-\frac{4}{3}x^4+\frac{32}{45}x^6+o(x^7),$$

$$x^2(1-x^2)^{4/3} = x^2\left[1+\frac{4}{3}(-x^2)+\frac{2}{9}(-x^2)^2+o(x^4)\right]$$

$$= x^2-\frac{4}{3}x^4+\frac{2}{9}x^6+o(x^6).$$

所以 $$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}\left[\left(\frac{32}{45}-\frac{2}{9}\right)x^6+o(x^6)\right]=\frac{22}{45}.$$

例 3 确定常数 λ 和 μ，使

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{1-x^2}-\lambda x-\mu)=0.$$

解 当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{x}\to 0$，有

$$\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}=1-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

故 $$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}x\left[-\sqrt[3]{1-1/x^3}-\lambda-\frac{\mu}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[-1+\frac{1}{3x^3}-\lambda-\frac{\mu}{x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[(-1-\lambda)-\frac{\mu}{x}+\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right].$$

要使左边 = 右边，则 $-1-\lambda=0,\mu=0$，于是 $\lambda=-1,\mu=0$.

例 4 设函数 f 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=e^3,$$

求 $f(0),f'(0),f''(0)$ 及 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$.

解 由题设条件知，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2(0<\theta<1).$$

又由 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(x+\frac{f(x)}{x}\right)\right]^{\frac{1}{x+f(x)/x}\cdot\frac{x+f(x)/x}{x}}=e^3,$$

知 $$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)=1,\quad \lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}=3,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

即 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(0)}{x}+f'(0)+\frac{f''(\theta x)}{2}x^2\right]=0.$$

知 $f(0)=0, f'(0)=0, f(x)=\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0<\theta<1).$

又由 $$\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{f(x)}{x}\right]\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(0)}{x^2}+\frac{f'(0)}{x}+\frac{f''(\theta x)}{2}\right]=3,$$

知 $$\lim_{x\to 0}f''(\theta x)=4\Rightarrow f''(0)=4.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x/f(x)\cdot f(x)/x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{x/f(x)\cdot f''(\theta x)x^2/2x^2}$$

$$=e^{4/2}=e^2.$$

二、函数的泰勒展开式或麦克劳林展开式

求函数的展开式，关键是求出高阶导数并写出余项，这项工作比较麻烦，可以用前面求高阶导数的知识、方法和技巧来完成. 更多的是用间接展开法，利用已知展开式和四则运算、导数等运算来完成，这样就比较简单.

例 5 求在点 $x=4$ 的 $f(x)=x^4-5x^3-x^2-3x+4$ 的泰勒多项式.

解 因为 $$f(4)=-56,$$

$$f'(4)=(4x^3-15x^2-2x-3)\Big|_{x=4}=21,$$

$$f''(4) = (12x^2 - 30x - 2)\Big|_{x=4} = 74,$$

$$f'''(4) = (24x - 30)\Big|_{x=4} = 66, \quad f^{(4)}(4) = 24,$$

所以

$$\begin{aligned} & x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x + 4 \\ = & - 56 + 21(x - 4) + 37(x - 4)^2 \\ & + 11(x - 4)^3 + (x - 4)^4. \end{aligned}$$

例 6 求函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x_0 = -1$ 的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$, $f^n(-1) = -n!$, 所以

$$\frac{1}{x} = -[1 + (x + 1) + (x + 1)^2 + \cdots + (x + 1)^n]$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x + 1)^{n+1}, \ -1 < \xi < x.$$

例 7 求下列函数的 n 阶泰勒公式:

(1) $xe^x, x_0 = 0$; (2) $\sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

(3) $\arctan x, x_0 = 0$; (4) $\arcsin x, x_0 = 0$.

解 (1) 因为 $f^{(n)} = e^x(k + x)$, 所以

$$xe^x = f(0) + f'(0) + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + R_n(x)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{2!}x^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^n + \frac{(n + 1 + \theta x)}{(n + 1)!}e^{\theta x}x^{n+1},$$

$$0 < \theta < 1.$$

(2) 因为 $f^{(n)}(x) = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$, 所以

$$f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} (-1)^k \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n = 2k, \\ (-1)^k \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & n = 2k + 1, \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right.$$

$$-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$$

$$+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)\Bigg].$$

(3) 因为 $y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\sin n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)(y=\arctan x)$,

$$y^{(2n)}(0)=0,\quad y^{(2n+1)}(0)=(-1)^n(2n)!,$$

所以 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$.

(4) 因为 $y^{(2n)}=0,y^{(2n+1)}(0)=[(2n-1)!!]^2$,所以

$$\arcsin x=x+\frac{1}{3}\frac{1}{2!!}x^3+\frac{1}{5}\frac{3!!}{4!!}x^5$$

$$+\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n+1}+o(x^{2n+1}).$$

例 8 给定下列一般项的趋向于零的序列,求出它的一个等价无穷小量.

(1) $\alpha_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$; (2) $\alpha_n=1-n\sin\frac{1}{n}$.

解 (1) 利用泰勒公式.

$$\alpha_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]$$

$$=\left[1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]-1$$

$$=\frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故 $\{\alpha_n\}$ 的等价无穷小量为 $\left\{\frac{1}{12n^2}\right\}$.

(2) $\alpha_n=1-n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{3!n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

故 $\{\alpha_n\}$ 的等价无穷小量为 $\left\{\frac{1}{6n^2}\right\}$.

三、证明不等式或等式及其它

例 9 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin(2\pi en!)=2\pi$.

证 由泰勒公式,有

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n},\ 0<\theta_n<1,$$

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}},\ 0<\theta_{n+1}<1.$$

将上述两式两边相减，得

$$\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}e^{\theta_{n+1}},$$

或

$$e^{\theta_n}=1+\frac{1}{(n+2)}e^{\theta_{n+1}}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}e^{\theta_n}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}e^{\theta_{n+1}}=1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\theta_n=0,$$

故

$$2\pi en!=2\pi\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}e^{\theta_n}\right)n!$$

$$=2\pi k+\frac{2\pi}{(n+1)}e^{\theta_n},\ k=n!\left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right).$$

则

$$n\sin(2\pi en!)=n\sin\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}$$

$$=2\pi\frac{n}{n+1}e^{\theta_n}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)\bigg/\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)=\lim_{n\to\infty}2\pi e^{\theta_n}\frac{n}{n+1}\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)\bigg/\left(\frac{2\pi}{n+1}e^{\theta_n}\right)$$

$$=2\pi.$$

例 10 用泰勒公式证明：

$$\frac{a+b+c}{3}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

证 设 $f(x)=x^2$，则

$$f'(x)=2x,\ f''(x)=2>0,$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

即

$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

取

$$x=a,\quad 得\quad a^2\geqslant x_0^2+2x_0(a-x_0),$$

$$x=b,\quad 得\quad b^2\geqslant x_0^2+2x_0(b-x_0),$$

$$x=c,\quad 得\quad c^2\geqslant x_0^2+2x_0(c-x_0).$$

将不等式两边相加，得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3x_0^2+2x_0(a+b+c)-6x_0^2.$$

取 $x_0=\frac{1}{3}(a+b+c)$，则 x_0 在 a,b,c 之间，故

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3x_0^2=3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2,$$

即
$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

例 11 设 $f(x)$ 有二阶导数，且

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}[f(x-h)+f(x+h)],$$

试证：$f''(x) \geqslant 0$.

证 由泰勒公式，有

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2),$$

$$f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2).$$

将二式相加再除以 h^2，利用题设条件，即得

$$f''(x)+o(1) \geqslant 0.$$

令 $h \to 0$，取极限得 $f''(x) \geqslant 0$.

例 12 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：$\exists\, \xi \in (a,b)$，使

$$|f''\xi| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证 将 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 分别在点 a 和点 b 展成泰勒公式，考虑到 $f'(a)=f'(b)=0$，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2},$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2, \quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

将第二式减去第一式，得

$$f(b)-f(a)+\frac{1}{8}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)](b-a)^2=0,$$

故 $$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leqslant\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)+f''|\xi_2|)\leqslant|f''(\xi)|.$$

$$f''(\xi)=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}.$$

例 13 设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有四阶导数，且 $|f^{(4)}(x)|\leqslant M$，$M>0$. 又 $x_1=x_0-h, x_2=x_0+h$，证明：

$$\left|f''(x_0)-\frac{f(x_1)-2f(x_0)+f(x_2)}{h^2}\right|\leqslant\frac{1}{12}Mh^2.$$

证 将 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 分别在点 x_0 展开，得

$$f(x_i)=f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x_i-x_0)^2$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x_i-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{4!}(x_i-x_0)^4,\quad i=1,2.$$

则 $$f(x_1)=f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$
$$-\frac{1}{6}f'''(x_0)h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}h^4,$$
$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2$$
$$+\frac{1}{6}f'''(x_0)h^3+\frac{f^{(4)}(\xi_2)}{24}h^4,$$
$$x_1<\xi_1<x_0,\ x_0<\xi_2<x_2.$$

将二式相加，得

$$f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+f''(x_0)h^2$$
$$+\frac{h^4}{24}[f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)],$$

所以 $$\left|f''(x_0)-\frac{f(x_1)-2f(x_0)+f(x_2)}{h^2}\right|$$
$$\leqslant\frac{h^2}{24}[|f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)|]\leqslant\frac{1}{12}Mh^2.$$

例 14 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，

$|f''(x)| \leqslant 1$,证明:在$[0,1]$上必有 $|f'(x)| \leqslant 2$.

证　将 $f(2)$,$f(0)$ 在任意点 $x \in [0,2]$ 展开,有

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(2-x)^2,\ \xi_1 \in (x,2),$$

$$f(0) = f(x) + f'(x)(-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(-x)^2,\ \xi_2 \in (0,x).$$

故　$f(2) - f(0) = 2f'(x) - \frac{1}{2}x^2 f''(\xi_2) + \frac{1}{2}(2-x)^2 f''(\xi_1)$.

因为 $|f(x)| \leqslant 1$,$|f''(x)| \leqslant 1$,所以

$$\begin{aligned} 2|f'(x)| &\leqslant |f(2)| + |f(1)| + \frac{x^2}{2}|f''(\xi_2)| \\ &\quad + \frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_1)| \\ &\leqslant 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]. \end{aligned}$$

又,函数 $g(x) = 2 + \frac{1}{2}[x^2 + (2-x)^2]$ 在 $x=0$ 和 $x=2$ 取得最大值 $g(0) = (2) = 4$,故

$$2|f'(x)| \leqslant 4 \Rightarrow |f'(x)| \leqslant 2.$$

例 15　设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有二阶导数,且 $f(0)=f(1)=0$,$\min\{f(x)\,|\,x\in[0,1]\} = -1$,证明:$\exists\ \xi \in (0,1)$,使得 $f''(\xi) \geqslant 8$.

证　设有 $f(x_0) = -1$,$x_0 \in (0,1)$,且 $f'(x_0) = 0$.

将 $f(0)$ 与 $f(1)$ 分别在 x_0 展开,得

$$f(0) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_1)}{2!}x_0^2 \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{x_0^2},\ 0 < \xi_1 < x_0,$$

$$f(1) = 0 = -1 + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2 \Rightarrow f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-x_0)^2},$$

$$x_0 < \xi_2 < 1.$$

显然,当 $x_0 < \frac{1}{2}$ 时,　$f''(\xi_1) \geqslant \frac{2}{(1/2)^2} = 8$;

当 $x_0 > \frac{1}{2}$ 时,　$f''(\xi_2) \geqslant \frac{2}{(1-1/2)^2} = 8$.

从而知，存在 $\xi \in (0,1)$，使 $f''(\xi) \geqslant 8$.

例 16 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上二次可微，且 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $|f(x)| \leqslant M_0$，$|f''(x)| \leqslant M_2$.

(1) 写出 $f(x+h)$，$f(x-h)$ 关于 h 的有拉格朗日余项的泰勒公式；

(2) 证明：$\forall h > 0$，有 $|f(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$；

(3) 证明：$|f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

解 (1) $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dfrac{f''(x+\theta_1 h)}{2}h^2$，

$$0 < \theta_1 < 1,$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x-\theta_2 h)}{2}h^2, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

(2) 将题(1)中的第一式减去第二式，得

$$\begin{aligned} 2f'(x)h &= f(x+h) - f(x-h) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}[f''(x+\theta_1 h) - f''(x-\theta_2 h)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \\ &\quad + \frac{1}{4}[f''(x-\theta_2 h) - f''(x+\theta_1 h)]h. \end{aligned}$$

由题设条件，对上式两边取绝对值，得

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.$$

(3) 设 $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2} = \varphi(h)\ (h > 0)$，则

$$\varphi(h) \geqslant 2\sqrt{\frac{M_0}{h} \cdot \frac{hM_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2} \quad \left(h = \sqrt{\frac{2M_2}{M_2}}\ \text{时相等}\right),$$

所以，代入上式，即得

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

用泰勒公式还可证明其它命题.

例 17　设 $f''(x)$ 连续，且 $f''(x) \neq 0$. 求出在中值定理 $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h)$ 中的 θ 当 $h \to 0$ 时的极限.

证　依泰勒公式，有

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h^2,$$

与题设等式相比较，得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = \frac{1}{2}f''(x+\theta_1 h)h.$$

对 $f'(x)$ 在 $(x, x+\theta h)$ 上应用拉格朗日中值定理，得

$$f'(x+\theta h) - f'(x) = f''(x+\theta_2\theta h)\theta h \ (0 < \theta_2 < 1),$$

故
$$\theta = \frac{f''(x+\theta_1 h)h/2}{f''(x+\theta_2\theta h)h} = \frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2\theta h)}.$$

由 $f''(x)$ 的连续性，得

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{f''(x+\theta_1 h)}{2f''(x+\theta_2\theta h)} = \frac{1}{2}.$$

例 18　设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有连续三阶导数，且 $\forall\, h > 0$，有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'\left(x + \frac{h}{2}\right),$$

证明：$f(x)$ 是二次多项式.

证　对任意 $x \in \mathbf{R}$，将函数 $f(x+h)$ 和 $f'(x+h)$ 分别展为泰勒公式，有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{6}h^3,\ x < \xi < x+h,$$

$$f'\left(x+\frac{h}{2}\right) = f'(x) + f''(x)\frac{h}{2} + \frac{f'''(\eta)}{2}\frac{h^2}{4},\ x < \eta < x + \frac{h}{2}.$$

将上述二式代入题给等式，得

$$f'(x)+\frac{f''(x)}{2}h+\frac{f'''(\xi)}{6}h^2=f'(x)+f''(x)\frac{h}{2}+\frac{f'''(\eta)}{8}h^2,$$

即
$$f'''(\xi)=\frac{3}{4}f'''(\eta).$$

当 $h\to 0$ 时，$\xi\to x,\eta\to x$. 由 $f'''(x)$ 的连续性，得

$$\lim_{h\to 0}f'''(\xi)=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}f'''(\eta)\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}f'''(x),$$

即等式成立 $\Longleftrightarrow f'''(x)=0$.

由 $f'''(x)=0$ 知，$\forall\, x\in\mathbf{R}$，$f(x)$ 是二次多项式.

例 19 证明：函数 $f(x)$ 是 n 次多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

证 **必要性** 若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,$$

$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是常数. 显然，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

充分性 将 $f(x)$ 在 $x=0$ 展成麦克劳林公式，则 $\forall\, x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 若 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，则上式为

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

显然，$f(x)$ 是 n 次多项式.

例 20 设 $f(x)$ 是 n 次多项式，且 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^m(x_0)=0$，$f^{(m+1)}(x_0)\neq 0\ (m\leqslant n-1)$，证明：$x=x_0$ 是方程 $f(x)=0$ 的 $m+1$ 重根.

证 将 $f(x)$ 在 x_0 展为泰勒展开式，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= (x - x_0)^{m+1}\left[\frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \frac{f^{(m+2)}(x_0)}{(m+2)!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n-m-1}\right].$$

记 $$g(x) = \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!} + \cdots + \frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x - x_0)^{n-m-1},$$

则 $$g(x_0) \neq 0.$$

由 $f(x) = (x - x_0)^{m+1}g(x)$ 知，x_0 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根.

例 21 设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有二阶连续导数，且 $f''(x) \neq 0$，证明：

(1) $\forall\, x \in (-1,1)$ 且 $x \neq 0$，$\exists$ 惟一的 $\theta(x) \in (0,1)$，使

$$f(x) = f(0) + xf'[\theta(x)x];$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}$.

证 (1) 对任 $x \neq 0$，且 $x \in (-1,1)$，由拉格朗日中值定理，有

$$f(x) = f(0) + f'(\theta(x)x)\cdot(x - 0) \quad (0 < \theta(x) < 1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续，且 $f''(x) \neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不改变符号. 不妨设 $f''(x) > 0$（$f''(x) < 0$ 类似可证），则 $f'(x)$ 严格递增，故 $\theta(x)$ 惟一.

(2) 由泰勒公式，有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi\text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}),$$

故 $$xf'(\theta(x)x) = f(x) - f(0) = f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

即 $$f'(\theta(x)x) - f'(0) = \frac{1}{2}f''(\xi)x.$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0),\ \lim_{x\to 0}f''(\xi) = f''(0),$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{2}.$$

(由 $\theta(x)\dfrac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\dfrac{1}{2}f''(\xi)$,两边取 $x\to 0$ 的极限即得).

例 22 证明:若

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

证 因为 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,由泰勒公式,有

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots$$
$$+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)+o(h^{n+1}).$$

于是,将题给等式减去泰勒公式并整理,得

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a)+\frac{n!}{h^{n+1}}o(h^{n+1}).$$

令 $h\to 0$,对上式两边取极限,得

$$\lim_{h\to 0}\theta\frac{f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)}{h\theta}=\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(a)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(a),$$

所以
$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

例 23 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内 $f''(x)>0$,证明:$\forall\ x_1,x_2\in[x_1,x_2]$,且 $x_1<x_2$,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

证 满足上述不等式的函数是凸函数.一般利用拉格朗日中值定理证明(读者不妨一试).在这里,我们利用泰勒公式来证明.

将 $f(x)$ 在 $x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 处泰勒展开,得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2,$$

ξ 在 x 与 x_0 之间.又

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(x - x_0)^2,\ \xi_1 \in (x_1, x_0),$$

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2 - x_0)^2,\ \xi_2 \in (x_0, x_2).$$

将上述两式相加后除以 2,考虑 $x_1 - x_0 = -(x_2 - x_0)$,得

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f(x_0) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{4}\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2.$$

因为 $f''(x) > 0$,所以上式右边第二项大于零,故

$$f(x_0) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

第四节　函数的单调性与极值

主要内容

1. 设函数 f 在 (a,b) 内可导.

(1) f 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少)的充要条件是

$$f'(x) \geqslant 0\ (\text{或 } f'(x) \leqslant 0),\ x \in (a,b);$$

(2) f 在 (a,b) 内严格单调增加的充要条件是,对一切 $x \in (a,b)$,有 $f'(x) \geqslant 0$ (或 $f'(x) \leqslant 0$),且在 (a,b) 内的任何子区间上 $f'(x) \not\equiv 0$.

推论　若函数 f 在 (a,b) 内可导,且 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$),则 f 在 (a,b) 内严格单调增加(或严格单调减少).

注意　推论是严格单调的充分条件,不是充要条件.

2. 若函数 f 在 x_0 可导,且在 x_0 取得极值,则称 x_0 为 f 的稳定

点(或驻点、静止点),且将 $f'(x_0)=0$ 称为极值的必要条件.

3. 极值的第一充分条件　设 f 在 $U(x_0)$ 内连续,在 $U^\circ(x_0)$ 内可导.

(1) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,则 f 在 x_0 取得极大值;

(2) 若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f'(x)\leqslant 0$,当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,则 f 在 x_0 取得极小值.

4. 极值的第二充分条件　设 f 在 $U(x_0)$ 内一阶可导,在 $x=x_0$ 二阶可导,且 $f'(x_0)=0$,$f''(x_0)\neq 0$,则

(1) 若 $f''(x_0)<0$,f 在 x_0 取得极大值;

(2) 若 $f''(x_0)>0$,f 在 x_0 取得极小值.

5. 极值的第三充分条件　f 在 $U(x_0)$ 内存在直到 $n-1$ 阶导数,在 $x=x_0n$ 阶可导,且 $f^{(n)}(x_0)=0$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$,$f^{(n)}(x_0)\neq 0$,则

(1) 当 n 为偶数时,f 在 $x=x_0$ 有极值.且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时,$f(x_0)$ 为极大值;当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时,$f(x_0)$ 为极小值.

(2) 当 n 为奇数时,f 在 $x=x_0$ 无极值.

6. 若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则 f 在 $[a,b]$ 上必有最大值 M 与最小值 m.

(1) 对以解析式表达的函数,可以通过比较所有稳定点,不可导点和区间端点的函数值大小来确定函数 f 的最大值与最小值.

(2) 对应用问题,一般不考虑区间端点.也可以通过比较稳定点、不可导点函数值大小确定 f 的最大值与最小值.

若问题只有一个稳定点,可以根据问题的实际意义确定是最大值还是最小值.

疑难解析

1. 若 $f'(x_0)>0$,能否说函数 f 在 $U(x_0)$ 内单调增加?

答 若$f'(x_0)>0$，则$f(x)$在点x_0严格单调增加. 即$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$f(x)<f(x_0)$；$\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$，有$f(x_0)<f(x)$. 但两个不等式之间的关系不一定能传递，即$f$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内不一定严格单调增加. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当$x\neq 0$时，有 $$f'(x)=1+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x+\Delta x^2\sin(1/\Delta x)-0}{\Delta x}=1>0$$

所以，$f(x)$在$x=0$严格单调增加. 但当$x\neq 0$时，有

$$f''(x)=2\sin\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right)=-4n\pi\begin{cases}<0, & n\text{ 为正整数},\\ >0, & n\text{ 为负整数}.\end{cases}$$

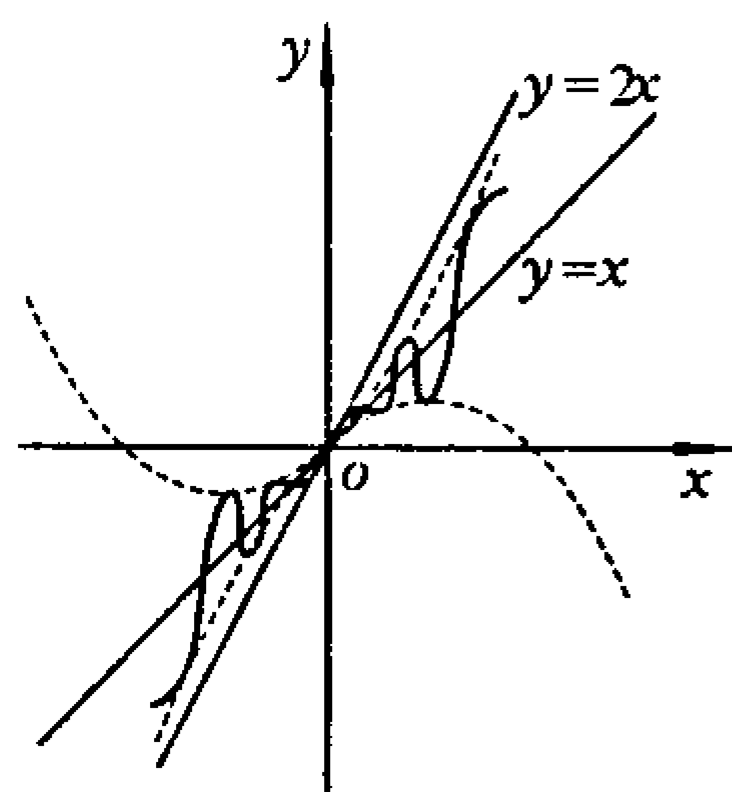


图 4.1

而$f'\left(\dfrac{1}{2n\pi}\right)=0$. 故$f(x)$在点$\dfrac{1}{2n\pi}$都有极大值. 由于$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to 0$，所以，在任何$(-\varepsilon,\varepsilon)$内，$f$都不是严格单调增加的，而是作无穷次的振荡.

2. 怎样理解函数的极值与最值？

答 极值与最值的问题是一个局部与整体的问题. 极值是函数的局部性质，即函数f在某个$U(x_0)$内所具有的$f(x_0)<f(x)$(或$f(x_0)>f(x)$)的性质. 因此，从图 4.1 可以看出，一个函数f在区间$[a,b]$上可以有多个极大值与极小值，此极大值可能小于彼极小值. 而最值是函数的整体性质，在$[a,b]$上连续的函数必有最大值与最小值，最大值与最小值都是惟一的. 最大值与最小值可能是极值，也可能不是极值.

方法、技巧与典型例题分析

一、函数的单调性问题

函数的单调性问题包括确定函数的单调区间、证明不等式、确定方程根的个数和证明某些命题.其中对方法和技巧要求较高的是证明不等式,证明不等式的关键是要引入一个函数.引入函数的方法有多种:最简单的是将不等式的一边移到另一边构成辅助函数;较复杂的则需根据对不等式特征的观察加以确定,因而有一定的技巧,需要通过多练习才能掌握.

例 1 讨论下列函数的单调性:

(1) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\ x>0$;

(2) $y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^{2}},\ a>0$;

(3) $y=x+|\sin x|$; (4) $y=x^{n}\cdot \mathrm{e}^{-x},\ n>0,x>0$.

解 (1) 因为 $\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=x[\ln(1+x)-\ln x]$,两边求导,得

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$
$$=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}.$$

因为,由拉格朗日中值定理,在 $[x,1+x]$ 上有

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}(1+x-x)=\frac{1}{\xi},\ \xi\in(x,1+x),$$

所以
$$\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi},$$

即
$$\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}=\frac{1}{\xi}-\frac{1}{1+x}>0.$$

又 $y>0$,所以

$$y'=y\left[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}\right]>0.$$

即 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

(2) 因为 $y'=-6(x-2a/3)\Big/\left[3\sqrt[3]{(2x-a)^2(a-x)}\right]$,稳定点为$\dfrac{2}{3}a$,导数不存在的点为$\dfrac{a}{2}$ 和 a.

在$(-\infty,a/2)$内,$y'>0$,函数单调增加;

在$(a/2,2a/3)$内,$y'>0$,函数单调增加;

在$(2a/3,a)$内,$y'<0$,函数单调减少;

在$(a,+\infty)$内,$y'>0$,函数单调增加.

(3) 因为函数含绝对值记号,要分区间讨论.

当 $2n\pi\leqslant 2x\leqslant(2n+1)\pi$ 时,$\sin 2x\geqslant 0$;

当$(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi$ 时,$\sin 2x\leqslant 0$.

所以,当 $2n\pi\leqslant 2x\leqslant(2n+1)\pi$,即 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ 时,有

$$y=x+\sin 2x,\quad y'=1+2\cos 2x,$$

$$y'\geqslant 0\Longleftrightarrow\cos 2x\geqslant-1/2\Longleftrightarrow 2n\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi+2\pi/3,$$

即 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/3$. 故

当 $n\pi\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/3$ 时,$y'\geqslant 0$,y 单调增加;

当 $n\pi+\pi/3\leqslant x\leqslant n\pi+\pi/2$ 时,$y'\leqslant 0$,y 单调减少.

类似地,当$(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi$,即 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi$ 时,

$$y=x-\sin 2x,\quad y'=1-2\cos 2x,$$

$$y'\geqslant 0\Longleftrightarrow\cos 2x\leqslant 1/2\Longleftrightarrow(2n-1)\pi\leqslant 2x\leqslant 2n\pi-\pi/3,$$

即 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi-\pi/6$,故

当 $n\pi-\pi/2\leqslant x\leqslant n\pi-\pi/6$ 时,$y'\geqslant 0$,y 单调增加;

当 $n\pi-\pi/6\leqslant x\leqslant n\pi$ 时,$y'\leqslant 0$,y 单调减少.

(4) 因为 $y'=nx^{n-1}e^{-x}+x^ne^{-x}=(n-x)e^{-x}\cdot x^n$,稳定点为 $x=n$.

在$(0,n)$内,$y'>0$,y 单调增加;

在(n,∞)内,$y'<0$,y 单调减少.

例 2　判断下列命题的真伪：

(1) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单增且可导，则 $f'(x)>0$.

(2) 单调函数的导函数必单调.

(3) 一个函数的导函数单调，则函数必单调.

(4) $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，在 $[a,b]$ 上单调减少，则 $f'(x)\leqslant 0$.

解　(1) 伪. 例如 $y=x^3$ 在 $(-2,2)$ 内单调增加且可导，但

$$f'(0)=3x^2\Big|_{x=0}=0.$$

应改为 $f'(x)\geqslant 0$，命题才成立.

(2) 伪. 例如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，但 $y'=3x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

(3) 伪. 例如 $y=x^2$ 的导函数 $y'=2x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调，但 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不单调.

(4) 真. 因为 $\forall\ x_0\in(a,b)$，取 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$，且 $x_0\in(x_1,x_2)$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1),\ \xi\in(x_1,x_2).$$

而 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少，于是

$$f'(\xi)(x_2-x_1)\leqslant 0,\quad f'(\xi)\leqslant 0.$$

显然，上式当 $x_2-x_1\to 0^+$ 时均成立.

当 $x_2-x_1\to 0^+$ 时，由 $f'(x)$ 的连续性，$\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)=f'(x_0)$.

又由有极限函数的局部保号性知，由 $\lim\limits_{\xi\to x_0}f'(\xi)\leqslant 0\Rightarrow f'(x_0)\leqslant 0$.

再由 x_0 的任意性，确定在 (a,b) 内恒有 $f'(x_0)\leqslant 0$.

例 3　证明下列不等式：

(1) $e^{\pi}>\pi^{e}$；

(2) $2^x>x^2(x>4)$，并说明，当 $0<x<1$ 或 $x=e$ 时，只有 $y=x$ 才满足 $x^y=y^x$；当 $x>1$ 且 $x\neq e$ 时，对一切 x，都能找到惟一的 $y\neq x$，使 $y^x=x^y$.

证　考虑一般情形：$a^b>b^a$（设 $a>1,b>1$），则两边取对数

后可得等价不等式：$\dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{a}$.

于是引入辅助函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\begin{cases}<0, & x>e,\\ >0, & x<e.\end{cases}$$

也可以引入辅助函数 $f(x)=x-e\ln x$ 来讨论 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

(1) 由 $f'(x)$ 在 $(e,+\infty)<0$ 知，$f(x)$ 严格单调减少，因此 $\dfrac{\ln e}{e}>\dfrac{\ln\pi}{\pi}$，即 $\pi\ln e>e\ln\pi$，得 $e^{\pi}>\pi^{e}$.

(2) 因为 $x=4>e$，所以由 $f'(x)$ 在 $(x,+\infty)<0$ 知，$f(x)$ 严格单调减少，因此 $\dfrac{\ln 2}{2}>\dfrac{\ln x}{x}$，即 $x\ln 2>2\ln x$，得 $2^{x}>x^{2}$.

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 严格单调增加. 当 $y,x\in(0,1)$ 且 $y\neq x$ 时，$f(x)\neq f(y)$. 所以仅当 $x=y$ 时，才有 $y^{x}=x^{y}$；当 $x=e$ 时，$f(x)$ 取得极大值，对任何 $y\neq e$，都有 $f(y)<f(e)$，故仅当 $y=x=e$ 时，有 $x^{y}=y^{x}$.

对 $x>1$ 且 $x\neq e$，因为在 $(1,e)$ 内 $f(x)$ 严格单调增加，在 $(e,+\infty)$ 内严格单调减少，所以直线 $y=\dfrac{\ln x_0}{x_0}$ 与曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 有且只有两个交点 $\left(x_0,\dfrac{\ln x_0}{x_0}\right)$，$\left(y_0,\dfrac{\ln x_0}{x_0}\right)$. 即

$$\frac{\ln y_0}{y_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}\Rightarrow x_0^{y_0}=y_0^{x_0}.$$

这表明，当 $x>1$ 且 $x\neq e$ 时，有惟一的 $y\neq x$，使 $y^{x}=x^{y}$.

实际上，要证 $a^{b}>b^{a}$，可转化为：(1) 证 $a^{b}-b^{a}>0$；(2) 证 $b\ln a-a\ln b>0$；(3) 证 $a^{b}/b^{a}>1$. 从而可以选择一种最易确定 $f'(x)$ 符号的方法.

例 4 证明下列不等式：

(1) $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$, $x>0$；

(2) $\dfrac{|a+b|}{\pi+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{\pi+|a|}+\dfrac{|b|}{\pi+|b|}$ $(a,b\in\mathbf{R})$；

(3) $\frac{2}{e} < x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} < 1,\ 0 < x < 1$;

(4) $0 < \frac{x\ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2},\ x > 0, x \neq 1$.

证 (1) 设 $f(x) = 1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$,则

$$f'(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) > 0,\ x > 0.$$

所以在$(0, +\infty)$内,$f(x)$严格单调增加.而$f(0) = 0$,故

$$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} > 0,$$

即 $$1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) > \sqrt{1+x^2},\ x > 0.$$

(2) 设 $f(x) = \frac{x}{\pi + x}$,则 $f'(x) = \frac{\pi}{(\pi + x)^2} > 0$.所以 $f(x)$ 单调增加.

又 $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,令 $x_1 = |a+b|, x_2 = |a| + |b|$,则 $f(x_1) < f(x_2)$,即

$$\frac{|a+b|}{\pi + |a+b|} \leqslant \frac{|a| + |b|}{\pi + |a| + |b|} \leqslant \frac{|a|}{\pi + |a|} + \frac{|b|}{\pi + |b|}.$$

(3) 令 $f(x) = x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1-x}} = (1+x)x^{\frac{x}{1-x}}$,则 $f(x) > 0$.对等式两边取对数可得

$$\ln f(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1-x}\ln x,\ x > 0,$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\frac{\ln x + 2(1-x)/(1+x)}{(1-x)^2}.$$

因为 $$g'(x) = \left[\ln x + 2\frac{1-x}{1+x}\right]' = \frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 > 0,\ x > 0,$$

所以 $$g(x) = \ln x + 2\frac{1-x}{1+x} < g(1) = 0,\ 0 < x < 1.$$

故 $f'(x) < 0$,$f(x)$ 严格单调减少,故

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) < f(x) < \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

即
$$\frac{2}{e} < x^{\frac{x}{1-x}} + x^{\frac{1}{1+x}} < 1.$$

(4) $\dfrac{x\ln x}{x^2-1} > 0$ 是显然的，只需证$\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$.

当 $0 < x < 1$ 时，$\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2} \sim 2\ln x > \dfrac{x^2-1}{x}$，令

$$f(x) = 2\ln x - \frac{x^2-1}{x} = 2\ln x - x + \frac{1}{x},$$

则
$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 < 0.$$

所以 $f(x)$ 在(0,1) 内严格单调减少，$f(x) > \lim\limits_{t\to 1^-} f(t) = 0$. 故有 $\dfrac{x\ln x}{x^2-1} < \dfrac{1}{2}$. 于是欲证不等式成立.

例 5 证明下列不等式：

(1) $pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leqslant e^{x^2/(8p^2q^2)}$, $p,q > 0, p + q = 1$;

(2) $(1 + x)^\lambda - (1 - x)^\lambda \leqslant 2^\lambda$, $\lambda \geqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant 1$;

(3) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$, $x,y > 0, \beta > \alpha > 0$;

(4) $xe^{-x} > \dfrac{1}{x}e^{-x}$, $0 < x < 1$.

证 (1) 将不等式变形为 $pe^{x/pq} + q \leqslant e^{x/q + x^2/(8p^2q^2)}$，令 $x = 2pqy$ 得，$pe^{2y} + q \leqslant e^{2py + y^2/2}$.

令 $f(y) = e^{2py+y^2/2} - pe^{2y}$，则

$$f'(y) = e^{2y}\left[(2p + y)e^{y^2/2-2qy} - 2p\right] = e^{2y}g(y),$$

$$g'(y) = (y + p - q)^2 e^{y^2/2-2qy} \geqslant 0,\ y \in (-\infty, +\infty).$$

所以当 $y \geqslant 0$ 时，$g(y) \geqslant 0$；当 $y \leqslant 0$ 时，$g(y) \leqslant 0$. 于是对 $y \in (-\infty, +\infty)$，恒有 $f(y) \geqslant f(0) = q$. 故

$$pe^{2y} + q \leqslant e^{2py+y^2/2} \Rightarrow pe^{x/p} + qe^{-x/q} \leqslant e^{x^2/(8p^2q^2)}.$$

(2) 令 $f(x) = (1 + x)^\lambda - (1 - x)^\lambda$, $0 \leqslant x \leqslant 1$，则

$$f'(x)=\lambda[(1+x)^{\lambda-1}-(1-x)^{\lambda-1}]\geqslant 0\ (\lambda>1).$$

所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上严格单调增加，又 $f(1)=2^{\lambda}$，故

$$f(x)=(1+x)^{\lambda}-(1-x)^{\lambda}\leqslant 2^{\lambda},\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

(3) 将等式变形为$[1+(x/y)^{\alpha}]^{1/\alpha}>[1+(x/y)^{\beta}]^{1/\beta}$，令 $f(\alpha)=(1+t^{\alpha})^{1/\alpha}$，$t>0$，$0<\alpha<+\infty$，则由证变形后不等式转化为证 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内的单调性.

因为 $$\ln f(x)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+t^{\alpha}),$$

$$\begin{aligned}\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}&=\frac{1}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha t^{\alpha}\ln t}{1+t^{\alpha}}-\ln(1+t^{\alpha})\right]\\&=\frac{t^{\alpha}\ln t^{\alpha}-(1+t^{\alpha})\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}\\&<\frac{t^{\alpha}\ln(1+t^{\alpha})-(1+t^{\alpha})\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}\\&=-\frac{\ln(1+t^{\alpha})}{\alpha^2(1+t^{\alpha})}<0\ (\alpha>0),\end{aligned}$$

所以由 $f'(\alpha)<0$，$\alpha>0$，$f(\alpha)$ 在$(0,+\infty)$内单调减少. 即当 $\beta>\alpha$ 时，$(1+t^{\alpha})^{1/\alpha}>(1+t^{\beta})^{1/\beta}$. 令 $t=\dfrac{x}{y}$，即为

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}\right]^{1/\alpha}>\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{\beta}\right]^{1/\beta}\Rightarrow[x^{\alpha}+y^{\alpha}]^{1/\alpha}<[x^{\beta}+y^{\beta}]^{1/\beta}.$$

(4) 将欲证不等式两边取对数，得

$$\ln x-x>-\ln x-1/x,$$

即 $$2\ln x-x+1/x>0,\ 0<x<1.$$

令 $f(x)=2\ln x-x+1/x$，则 $f(1)=0$，且

$$f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=-\frac{(x-1)^2}{x^2}<0,\ 0<x<1.$$

故 $f(x)$ 严格单调减少，有 $f(x)>f(1)=0$，$0<x<1$. 即有

$$\begin{aligned}&2\ln x-x+1/x>0\Rightarrow x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{1/x}>1\\&\qquad\Rightarrow x\mathrm{e}^{-x}>\mathrm{e}^{-1/x}/x,\quad 0<x<1.\end{aligned}$$

例 6 证明下列不等式：

(1) $e^{-t}-\left(1-\frac{t}{x}\right)^{x}\geqslant 0,\quad x>0,t\leqslant x;$

(2) $\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x},\quad x\geqslant 0.$

证 (1) 当 $t=0$ 或 $t=x$ 时，不等式显然成立. 当 $x>0,t<x$ 且 $t\neq 0$ 时，有

$$[\ln f(x)]'=\left[\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)^{x}\right]'=\left[x\ln\left(1-\frac{t}{x}\right)\right]'$$
$$=\ln(x-t)-\ln x+\frac{t}{x-t}.$$

由拉格朗日中值定理，有

$$\ln(x-t)-\ln x=-\frac{t}{\xi}\begin{pmatrix}\text{当}0<t<x\text{ 时}, & 0<x-t<\xi<x\\ \text{当}t<0\text{ 时}, & 0<x<\xi<x-t\end{pmatrix},$$

$$[\ln f(x)]'=-\frac{t}{\xi}\geqslant\frac{-t}{x-t}+\frac{t}{x-t}=0.$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\frac{x}{t}}\right]^{-t}=e^{-t},$

所以，当 $x\to+\infty$ 时，$\left(1-\frac{t}{x}\right)^{x}$ 严格单调增加且趋向 e^{-t}，即

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{x}\right)^{x}\geqslant 0.$$

(2) 令 $F(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x,x\geqslant 0$，则

$$F'(x)=\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^{2}}=\ln(1+x)+\frac{x^{2}}{1+x^{2}}\geqslant 0.$$

故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 严格单调增加. 又 $F(0)=0$，即 $F(x)\geqslant 0$.

$$\ln(1+x)\geqslant\frac{\arctan x}{1+x}.$$

例 7 讨论 $k>0$，k 为何值时，方程

$$\arctan x-kx=0$$

存在正根.

解 令 $f(x)=\arctan x-kx,x\geqslant 0$，则

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{1}{1+x^{2}}-k,$$

$$f'(0) = 1 - k, \quad f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0.$$

所以 $f'(x)$ 严格单调减少，且

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f'(x) = -k.$$

当 $k \geqslant 1$ 时，$f'(x) < 0$，于是

$$f(x) < f(0) = 0, \; x > 0.$$

即 $k \geqslant 1$ 时，方程没有正根.

当 $0 < k < 1$ 时，有

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x \in [0, \sqrt{(1-k)/k}], \\ < 0, & x \in [\sqrt{(1-k)/k}, +\infty]. \end{cases}$$

即 f 在$[0, \sqrt{(1-k)/k}]$上严格单调增加，在$[\sqrt{(1-k)/k}, +\infty]$上严格单调减少. 有

$$f(\sqrt{(1-k)/k}) > f(0) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

由连续函数的介值定理和f的单调性知，方程在$(\sqrt{(1-k)/k}, +\infty)$内有惟一正根.

例 8 设 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上连续，在$[a, +\infty)$内可导，且 $f'(x) > k > 0$ (k 为常数). 又 $f(a) < 0$. 证明：$f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内有惟一实根.

证 令 $b = a - \frac{f(a)}{k} > a$，则由拉格朗日中值定理，有

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a) = f(a) + f'(\xi)\left(-\frac{f(a)}{k}\right)$$

$$= -f(a)\left(\frac{f'(\xi)}{k} - 1\right) > 0, \quad a < \xi < b.$$

即$f(x)$在$[a,b]$两端点异号，依连续函数的介值定理，$f(x)$在(a,b)内至少有一个实根.

例 9 设 $f(x)$ 为定义在$(-a,a)$内的偶函数，且在$(-a,0]$内严格单调减少，证明：$f(x)$ 在$[0,a)$内严格单调增加.

证　任取 $x_1, x_2 \in [0,a)$，且 $x_1 < x_2$，即 $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 < a$，则 $-a < -x_2 < -x_1 \leqslant 0$. 由于 $f(x)$ 在 $(-a,0]$ 内严格单调减少，即 $f(-x_2) > f(-x_1)$，但 $f(x)$ 为偶函数，有

$$f(x_2) = f(-x_2) > f(-x_1) = f(x_1),$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,a)$ 内严格单调增加.

二、函数的极值与最值问题

确定函数的极值可以用第一充分条件，也可以用第二充分条件，具体使用时一定要根据实际问题决定，使问题简洁明了.

例 10　根据题给条件，讨论指定点是否函数的极限点，是极大值点还是极小值点.

(1) 已知 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$，讨论 $x = a$；

(2) 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，$x_0 \neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，对 $-f(-x)$ 讨论 $-x_0$；

(3) 已知 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f'(0) = 0$，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f''(x)}{|x|} = 1$，讨论 $x = 0$.

解　(1) 因 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = -1$，依极限的保号性知，在某 $U(a)$ 内，$\dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} < 0$，即 $f(x) - f(a) < 0 \ (x \neq a)$. 所以，$f(a)$ 是 $f(x)$ 的极大值，$x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

将极限式改为 $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{(x-a)^n} = k$，$n$ 为正整数，$k \neq 0$，可以证明：

若 n 为偶数. 当 $k > 0$ 时，$f(a)$ 为极小值；若 $k < 0$，$f(a)$ 为极大值.

若 n 为奇数，则在 $U(a)$ 内，有

$$f(x) - f(a) = (k + \alpha(x))(x-a)^n$$

在 $x = a$ 两侧异号，所以 $f(a)$ 不是极值.

(2) $x_0\neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点,但不一定是 $f(x)$ 的稳定点.

$y=-f(-x)$ 的图形与 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称,故 $x_0\neq 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点时,$-x_0$ 是 $-f(-x)$ 的极小值点.

(3)因为 $f'(0)=0$,所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的稳定点. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 知,$f''(x)$ 与 $|x|$ 是等价无穷小. 因为在 $U(0)$ 内,$|x|>0$,故 $f''(x)>0$. 依极值的第二充分条件,$f(x)$ 在 $x=0$ 取得极小值 ,所以 $x=0$ 为极小值点.

例 11 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内恒满足方程

$$(x-1)f''(x)+2(x-1)[f'(x)]^3=1-e^{1-x}.$$

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=a$ $(a\neq 1)$ 处取得极值,则必为极小值;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 取得极值,是否为极小值?

证 (1) 由题设知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内二阶可导,故若在 $x=a$ 取得极值,必有 $f'(a)=0$,则有

$$f''(a)=\frac{1}{a-1}(1-e^{1-a}),\quad a\neq 1.$$

当 $a<1$ 时,$f''(a)>0$;当 $a>1$ 时,也有 $f''(a)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 取得极小值.

(2) 是. 因为 $f'(1)=0$,而

$$f''(x)=\frac{1}{x-1}[1-e^{1-x}-2(x-1)(f'(x))^3].$$

由 $f'(x)$ 的连续性知,$f''(x)$ 连续,故

$$f''(1)=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}-2(x-1)(f'(x))^3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{(x-1)}=1.$$

由 $f''(1)>0$ 知,$f(x)$ 在 $x=1$ 取得极小值.

例 12 设正值序列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证 因为对 $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x,\ x>0$，有 $f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，所以，$x=1$ 是稳定点. 由 $f''(1)=\left.\frac{2-x}{x^3}\right|_{x=1}=1>0$ 知，$f(1)=1$ 为极小值，即最小值.

由上知 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}\leqslant \ln x_n+\frac{1}{x_n}$，即 $x_n\leqslant x_{n+1}$，所以 $\{x_n\}$ 严格单调增加. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在，且 $a>0$.

设 $a=+\infty$，则对 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 取 $n\to\infty$ 的极限，得 $+\infty<1$，这是不可能的. 故 $a<+\infty$.

对不等式 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1<\ln x_n+\frac{1}{x_n}$ 取极限，得 $\ln a+\frac{1}{a}=1$. 由第一段知 $a=1$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 13 证明：$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1, p>1$.

证 引入辅助函数 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则

$$f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]\Rightarrow \text{稳定点 } x=\frac{1}{2}.$$

又
$$f''(x)=p(p-1)[x^{p-2}+(1-x)^{p-2}]>0.$$

故 $x=\frac{1}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的惟一极值点，且有极小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$. 而 $f(0)=f(1)=1$ 为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值，于是

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1.$$

例 14 (1) 求函数 $f(x)=x^3-px+q\ (p>0)$ 的极值点与极值；(2) 求方程 $x^3-px+q=0\ (p>0)$ 的三个实根的条件.

解 (1) 因为 $f'(x)=3x^2-p$，所以稳定点为 $x=\pm\sqrt{p/3}$. 又 $f''(x)=6x$，知 $f''(\sqrt{p/3})>0, f''(-\sqrt{p/3})<0$，则 $f(x)$ 在 $x=\sqrt{p/3}$ 有极小值 $f(\sqrt{p/3})=-2\left(\frac{p}{3}\right)^{3/2}+q$；在 $x=-\sqrt{p/3}$

有极大值 $f(-\sqrt{p/3})=2\left(\dfrac{p}{3}\right)^{3/2}+q$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$,所以若极小值 $f(\sqrt{p/3})<0$,极大值 $f(-\sqrt{p/3})>0$,则 $f(x)=0$ 有三个根,分别在区间

$$(-\infty,-\sqrt{p/3}),\ (-\sqrt{p/3},\sqrt{p/3}),\ (\sqrt{p/3},+\infty),$$

要满足条件 $-2\left(\dfrac{p}{3}\right)^{3/2}<q<2\left(\dfrac{p}{3}\right)^{3/2}$,可简化为 $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2<\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$.

例 15 设在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f'(x)$ 在 $(0,a)$ 内有极大值,证明:$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma$.

证 设 $f(x)$ 在点 $c\in(0,a)$ 有极大值,则 $f'(c)=0$. 对 $f'(x)$ 在 $[0,c]$,$[c,a)$ 上分别应用拉格朗日中值定理,有

$$f'(c)-f'(0)=cf''(\xi_1),\ \xi_1\in(0,c),$$

$$f'(a)-f'(c)=(a-c)f''(\xi_2),\ \xi_2\in(c,a).$$

由 $f'(c)=0$ 知,$f'(0)=-cf''(\xi_1)$,$f'(a)=(a-c)f''(\xi_2)$. 故

$$|f'(0)|+|f'(a)|=c|f''(\xi_1)+(a-c)|f''(\xi_2)|$$
$$\leqslant cM+(a-c)M=aM.$$

例 16 设 $x_1x_2=a$(常数),且 $x_1>0$,$x_2>0$,求 $x_1^m+x_2^n$ 的最小值($m>0$,$n>0$).

解 因为 $x_1x_2=a$,所以

$$f(x_1)=x_1^m+(a/x_1)^n,$$

$$f'(x_1)=mx_1^{m-1}-na^nx_1^{-n-1}=(mx_1^{m+n}-na^n)/x_1^{n+1}.$$

令 $f'(x_1)=0$,有惟一驻点 $x_{10}=(na^n/m)^{1/(m+n)}$.

当 $0<x_1<(na^n/m)^{1/(m+n)}$ 时 ,$f'(x_1)<0$; 当 $x_1>(na^n/m)^{1/(m+n)}$ 时,$f'(x_1)>0$,故 x_{10} 为 $f(x_1)$ 的极小值点,即最小值点. 最小值为

$$f(x_{10})=f\left[\left(\frac{na^n}{m}\right)^{1/(m+n)}\right]=\left(\frac{n}{m}a^n\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left[\frac{a}{(na^n/m)^{1/(m/n)}}\right]^n$$

$$=\left(\frac{n}{m}a^{n}\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}(a^{n})^{\frac{m}{m+n}}\right]$$

$$=\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m+n}}+\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m+n}}\right]a^{\frac{mn}{m+n}}.$$

例 17 证明不等式 $ab\leqslant\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{p}$，其中 $a\geqslant0, b\geqslant0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

证 令 $f(x)=x^{1/p}-\frac{x}{p}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{p}-1}\right)=\frac{1}{p}\left(x^{\frac{1}{q}}-1\right)=0,$$

有惟一稳定点 $x=1$. 当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(1)=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ 是极大值，即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值. 故

$$x^{\frac{1}{p}}-\frac{x}{p}\leqslant\frac{1}{q}.$$

令 $x=\frac{a^{p}}{b^{q}}$ 代入($b=0$ 时显然成立)，得

$$\frac{a}{b^{q/p}}-\frac{1}{p}\frac{a^{p}}{b^{q}}\leqslant\frac{1}{q}\Rightarrow a-\frac{1}{p}a^{p}b^{\frac{q}{p}-q}\leqslant\frac{1}{q}b^{\frac{q}{p}},$$

即
$$ab\leqslant\frac{1}{p}a^{p}+\frac{1}{q}b^{q}.$$

(1) 利用本例可以证明赫尔德不等式

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{q}\right)^{1/q},$$

其中 $a_k>0, b_k>0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, k=1,2,\cdots,n$.

只需设 $a=a_k\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^{p}\right)^{1/p}, b=b_k\Big/\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^{q}\right)^{1/q}$，代入例中不等式，再将两边对 k 求和，即可证得.

当 $p=q=2$ 时，称柯西 - 施瓦兹公式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right).$$

(2) 应用赫尔德不等式可以证明闵可夫斯基(Minkowski)不等式,有

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{1/p}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/q},$$

其中 $a_k\geqslant 0,b_k\geqslant 0,p>1,k=1,2,\cdots,n$.

由
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{p-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{p-1}+\sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{p-1},$$

注意到$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1,q(p-1)=p$,应用赫尔德不等式,有

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q}$$
$$+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^{q(p-1)}\right]^{1/q}$$
$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^p\right)^{1/p}\right]\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^p\right]^{1/q}$$

变形即得闵可夫斯基不等式.

第五节 函数的凸性与拐点

主要内容

1. 设 f 是区间 I 上的函数,$\forall\ x_1,x_2\in I$. 和 $\lambda\in(0,1)$. 恒有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

(取"<"称严格凸)则称 f 为 I 上的凸函数. 若恒有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

(取“>”称严格凹)则称 f 为 I 上的凹函数.

2. f 为 I 上凸函数 $\Leftrightarrow I$ 上任意三点 $x_1<x_2<x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

3. 设 f 在区间 I 上可导,则下述论述等价:

(1) f 为 I 上凸函数; (2) f' 为 I 上递增函数;

(3) f 定义在区间 I 上,$\forall\ x_1,x_2\in I$.

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1).$$

4. 设 f 在 I 上二阶可导,f 为 I 上凸函数 $\Leftrightarrow$ 在 I 上 $f''(x)\geqslant 0$.

5. 詹森(Jensen)不等式 若 f 为 $[a,b]$ 上凸函数,对任意 $x_i\in[a,b]$,$\lambda_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,且 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1\right)$,有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)\right).$$

6. 若 $y=f(x)$ 的曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线穿过,且在切点两侧的曲线分别是严格凸和严格凹的,则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线的拐点.

7. 若 f 在 x_0 二阶可导,则 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的曲线拐点的必要条件是 $f''(x_0)=0$.

8. 若 f 在 x_0 可导,在 $U^\circ(x_0)$ 内二阶可导,且在 $U^\circ_+(x_0)$ 和 $U^\circ_-(x_0)$ 上 $f''(x)$ 的符号相反,则 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 曲线的拐点.

疑难解析

1. 叙述 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数的等价命题.

答 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数的定义共有三种形式:

(1) $f(x)$ 在区间 I 上可导,曲线 $f(x)$ 位于曲线上任意点

$(x, f(x))$ 的切线上方. 即 $\forall\ x_1, x_2 \in I$, 有

$$f(x_2) \geqslant f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1).$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, $\forall\ x_1, x_2 \in I$, 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall\ x_1, x_2 \in I$ 与 $\lambda \in (0,1)$, 有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

将上式中的"$\leqslant$"改为"$<$",则为严格凸的定义.

其它等价命题还有:

(4) 主要内容之 2.

(5) $f(x)$ 在 I 上可导(或二阶可导), $f'(x)$ 在 I 上单调增加(或 $\forall\ x \in I, f''(x) > 0$).

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $f(x), g(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数, 证明:

$$h(x) \triangleq \max\{f(x), g(x)\}$$

也是 (a,b) 上的凸函数.

证 利用凸函数定义. 设 $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, 则 $\forall\ x_1, x_2 \in (a,b)$, 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &\leqslant \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2), \\ g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &\leqslant \lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2) \\ &\leqslant \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2), \end{aligned}$$

从而 $$\begin{aligned} h(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \max\{f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\} \\ &\leqslant \lambda_1 h(x_1) + \lambda_2 h(x_2). \end{aligned}$$

所以 $h(x)$ 为凸函数.

例 2 设 $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \pi$, 证明:

$$\sin\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n).$$

证 令 $f(x)=-\sin x, x\in(0,\pi)$，则

$$f'(x)=-\cos x,\quad f''(x)=\sin x>0,$$

故 $f(x)$ 是 $(0,\pi)$ 上的严格凸函数，由詹森不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)],$$

即得欲证等式.

例 3 利用 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$ 是凸函数，证明：

(1) $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n$，其中 $x_i>0,\lambda_i\geqslant 0,\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$；

(2) 当 $x_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$ 时，有

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

证 (1) 因为 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$ 是凸函数，所以詹森不等式 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)$ 成立. 即

$$\begin{aligned}&-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\\&\leqslant-[\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n]\\&\Rightarrow-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant-\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n})\\&\Rightarrow\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}),\end{aligned}$$

从而 $$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$$

(2) 在题(1)中令 $\lambda_i=\frac{1}{n}$，则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

又对 $f(x)=-\ln x\ (x>0)$，取 $x_i>0$，则 $\frac{1}{x_i}>0,\ i=1,2,\cdots,n$. 由詹森不等式

$$f\left(\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{x_1}\right)+f\left(\frac{1}{x_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}\right)\right]$$

得
$$-\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}$$

$$\leqslant-\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{x_1}+\ln\frac{1}{x_2}+\cdots+\ln\frac{1}{x_n}\right],$$

$$\ln\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\ln\left(\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^{1/n},$$

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\left(\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}\right)^{1/n},$$

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

综合题(1)、题(2),即得欲证不等式.

例4(詹森不等式) 证明:若f为$[a,b]$上凸函数,$\forall\ x_i\in[a,b]$,$\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,且$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$,则

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i).$$

证 用数学归纳法.

当$n=2$时,由定义(主要内容1)知命题成立.

设$n=k$时,命题成立.即

$$f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_if(x_i),\quad\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1.$$

当$n=k+1$时,$\sum\limits_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$,则

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_ix_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_ix_i+\lambda_kx_k+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)$$

$$= f\Big[\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i x_i + (\lambda_k + \lambda_{k+1})\Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_{k+1}\Big)\Big]$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1})f\Big(\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_k + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}x_{k+1}\Big)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + (\lambda_k + \lambda_{k+1})\Big[\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}f(x_k) + \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}f(x_{k+1})\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f(x_i) + \lambda_k f(x_k) + \lambda_{k+1}f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i).$$

所以，对任意的 n，都有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i), \quad \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1.$$

例 5 证明：

(1) 若 f,g 都是 I 上的凸函数，则 $\alpha f + \beta g$ 也是凸函数，其中 α,β 是正实数.

(2) 若 f,g 是 I 上非负凸函数，且 f 与 g 在 I 上都是严格单调增加(或单调减少)的，则 $f\cdot g$ 是 I 上的凸函数.

(3) 设 $f:I_1\to I_2$ 与 $g:I_2\to \mathbf{R}$ 都是凸函数，且 g 严格单调增加，则 $g\circ f$ 是 I_1 上的凸函数.

证 (1) 因为 f,g 都是 I 上的凸函数，则 $\forall\ x_1,x_2\in I$ 和 $\forall\ \lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2),$$

故
$$\alpha f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + \beta g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$
$$\leqslant \lambda(\alpha f(x_1) + \beta g(x_1)) + (1-\lambda)(f(x_2) + g(x_2)).$$

其中 α,β 为正常数，故 $\alpha f + \beta g$ 也是凸函数.

(2) 设 f,g 在 I 上严格单调增加(单调减少类似可证)，$f'(x)>0$，$g'(x)>0$. 并有 $f(x)>0$，$g(x)>0$. 则 $\forall\ x_1,x_2\in I$，不妨设 $x_2>x_1$，有

$$f(x_2) \geqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$g(x_2) \geqslant g(x_1) + g'(x_1)(x_2 - x_1).$$

因为$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$，所以

$$\begin{aligned}f(x_2)g(x_2) \geqslant & f(x_1)g(x_1) + f'(x_1)g(x_1)(x_2 - x_1) \\ & + f(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_1)g'(x_1)(x_2 - x_1)^2 \\ \geqslant & f(x_1)g(x_1) \\ & + [f'(x_1)g(x_1) + f(x_1)g'(x_1)](x_2 - x_1).\end{aligned}$$

所以，按等价定义（主要内容 3 中的(3)）知，$f \cdot g$ 是凸函数.

(3) 因为 f 是凸函数，则 $\forall\, x_1, x_2 \in I$ 和 $\lambda \in (0,1)$，有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

又由 $g(x)$ 严格单调增加，有

$$g[f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)] \leqslant g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)], \quad ①$$

而 g 为 $I_2 \to \mathbf{R}$ 上凸函数，有

$$\begin{aligned}& g[\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)] \\ & \leqslant \lambda g[f(x_1)] + (1-\lambda)g[f(x_2)].\end{aligned} \quad ②$$

由式 ①、式 ② 可得

$$g \circ f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda g \circ f(x_1) + (1-\lambda)g \circ f(x_2).$$

所以 $f \circ g$ 是 I_1 上的凸函数.

例 6 设 $f(x)$ 在(a,b) 内可导，$\forall\, x, y \in (a,b)$，且 $x < y$，$\exists$ 惟一的 $z \in (x,y)$，使 $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$，证明：$f(x)$ 在(a,b) 内是严格凸或严格凹的.

证 用反证法. 设函数 $f(x)$ 在(a,b) 内不是严格凸或严格凹的，则 $\exists\, x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，且 $x_1 < x_2 < x_3$，对曲线 $y = f(x)$ 上的三点$(x_1, f(x_1))$，$(x_2, f(x_2))$，$(x_3, f(x_3))$，有

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1) + f(x_1),$$

$$f(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_3) + f(x_3),$$

或 $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{f(x_1) - f(x_3)}{x_1 - x_3}.$$

即三个点$(x_1,f(x_1))$,$(x_2,f(x_2)$,$(x_3,f(x_3))$位于一条直线上.依拉格朗日中值定理,有

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi_1),\ \xi_1\in(x_1,x_2),$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=f'(\xi_2),\ \xi_2\in(x_2,x_3).$$

显然$\xi_1\neq\xi_2$,这与只存在一个η,使$\dfrac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3}=f'(\eta)$矛盾.所以$f(x)$在$(a,b)$内是严格凸或严格凹的.

例 7 设$a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$不全相等,证明:

(1) $x\dfrac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}-\ln\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}>0$;

(2) $f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{1/x}$在$(-\infty,+\infty)$严格单调增加;

(3) $\arctan(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\cdots+\lambda_na_n)\geqslant\lambda_1\arctan a_1+\lambda_2\arctan a_2+\cdots+\lambda_n\arctan a_n$.

证 (1) 考虑函数$f(x)=x\ln x$,则$f'(x)=1+\ln x,f''(x)=1/x>0\ (x<0)$,所以$f(x)=x$是$(0,+\infty)$上的凸函数,又$a_i^x(i=1,2,\cdots,n)$不全相等,所以由詹森不等式,有

$$f\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)<\frac{1}{n}f(a_1^x)+\cdots+\frac{1}{n}f(a_n^x).$$

将$f(x)$代入,即得所证等式.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$(类似第二节例 9),再补充定义$f(0)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,则函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.当$x\neq0$时,有

$$[\ln f(x)]'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[x\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}-\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right].$$

由 $f(x)>0$ 及上例知，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

(3) 考虑函数 $f(x)=-\arctan x, x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$，$f''(x)=\frac{2x}{1+x^2}>0(x>0)$. 即 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. 由詹森不等式(即将 $f(x)$ 代入)，得

$$\arctan(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n)$$
$$\geqslant \lambda_1\arctan a_1+\lambda_2\arctan a_2+\cdots+\lambda_n\arctan a_n.$$

例 8 设 a,b,x,y 都是正数，证明：

$$x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}\geqslant(x+y)\ln\frac{x-y}{a+b}.$$

证 设 $f(x)=x\ln x\ (x>0)$，则 $f'(x)=1+\ln x$，$f''(x)=\frac{1}{x}>0$，所以 $f(x)$ 为凸函数，有

$$\frac{x+y}{a+b}\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant\frac{x}{a+b}\ln\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a+b}\ln\frac{y}{a+b}.$$

故 $(x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a+b}+y\ln\frac{y}{a+b}\leqslant x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}.$

例 9 利用函数的凸性，证明：

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\frac{x^n+y^n}{2}$，$\quad x>0,y>0,x\neq y,n>1$；

(2) $\frac{1}{2}(e^x+e^y)>e^{(x+y)/2}$，$\quad x\neq y$.

证 (1) 设 $f(x)=t^n$，则 $f'(t)=nt^{n-1}$，$f''(t)=n(n-1)t^{n-2}$. 当 $n>1$ 时，$f''(t)>0(t>0)$，所以 $f(t)$ 为凸函数，依定义，有

$$f(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)<\lambda f(t_1)+(1-\lambda)f(t_2).$$

令 $t_1=x,t_2=y,\lambda=1/2$，即得

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\frac{x^n+y^n}{2}.$$

(2) 设 $f(t)=e^t$，则 $f'(t)=e^t$，$f''(t)=e^t>0$，所以 $f(t)$ 为凸函数，同题(1)，取 $t_1=x,t_2=y,y=1/2$，即得

$$(e^x + e^y)/2 > e^{(x+y)/2},\ x \neq y.$$

例10 设概率曲线 $y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$ 在点 $x = \pm\sigma$ 处有拐点 $(\sigma > 0, h > 0)$，h 和 σ 有何关系？

解 因 $y' = \frac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}$，$y'' = \frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(2h^2x^2 - 1)e^{-h^2x^2}$，令 $y'' = 0$，可得 $x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2h}$. 讨论 x_0 与 x 的值，知：

当 $|x| < |x_0|$ 时，$y'' < 0$；当 $|x| > |x_0|$ 时，$y'' > 0$. 所以，当 $x_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2h} = \pm\sigma$ 时，y 的曲线有拐点，即 $h = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma}$.

例 11 确定 $y = k(x^2 - 3)^2$ 中 k 的值，使曲线在拐点处的法线通过原点.

解 因为

$$y' = 2k(x^2 - 3) = 4kx^3 - 12kx,\ y'' = 12k(x + 1)(x - 1),$$

所以 $x_{1,2} = \pm 1$ 可能是拐点. 讨论 y'' 的表达式，知 y'' 在 $x_{1,2} = \pm 1$ 两侧异号，所以 $x_{1,2} = \pm 1$ 确为拐点横坐标. 拐点为 $(1, 4k)$ 和 $(-1, 4k)$.

在点 $(1,4k)$ 处切线斜率 $k_1 = -8k$，法线方程是 $y - 4k = \frac{1}{8k}(x - 1)$. 将原点坐标 $(0,0)$ 代入，得

$$-4k = -\frac{1}{8k} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

在点 $(-1,4k)$ 处，类似可得相同结果.

故当 $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{8}$ 时，曲线 $y = k(x^2 - 3)^2$ 在拐点处的法线通过原点.

例 12 确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中的 a,b,c,d 的值，使 $x = -2$ 为稳定点，$(1, -10)$ 为拐点，且 $(-2, 44)$ 在曲线上.

解 由题给条件列出方程组求解.

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=44,\\ a+b+c+d=-10,\\ 12a-4b+c=0\ (y'=0),\\ 6a+2b=0\ (y''=0),\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=-3,\\ c=-24,\\ d=16.\end{cases}$$

例 13 证明:曲线 $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ 的三个拐点在同一直线上.

证 因为 $$y'=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''=\frac{2(x+1)[x-(2-\sqrt{3})][x-(2+\sqrt{3})]}{(x^2+1)^3},$$

所以 $x_1=-1,x_2=2-\sqrt{3},x_3=2+\sqrt{3}$ 时,$y''=0$.

经考察,在 $(-\infty,-1)$ 内,$y''<0$;在 $(-1,2-\sqrt{3})$ 内,$y''>0$;在 $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$ 内,$y''<0$;在 $(2+\sqrt{3},+\infty)$ 内,$y''>0$. 故点 $A(-1,-1)$,$B\left(2-\sqrt{3},\dfrac{1-\sqrt{3}}{4(2-\sqrt{3})}\right)$,$C\left(2+\sqrt{3},\dfrac{1+\sqrt{3}}{4(2+\sqrt{3})}\right)$ 是曲线的拐点.

可以算得直线 AB 与 BC 的斜率为

$$k_{AB}=\frac{(1-\sqrt{3})/[4(2-\sqrt{3})]-(-1)}{(2-\sqrt{3})-(-1)}=\frac{(9-5\sqrt{3})(9+5\sqrt{3})}{24}=\frac{1}{4},$$

$$k_{BC}=\frac{(1+\sqrt{3})/[4(2+\sqrt{3})]-(-1)}{(2+\sqrt{3})-(-1)}=\frac{(9+5\sqrt{3})(9-5\sqrt{3})}{24}=\frac{1}{4}.$$

两直线斜率相同,且都经过 B 点,所以 A,B,C 三个拐点在一条直线上.

第五章　不定积分

第一节　不定积分的概念与基本公式

主要内容

1. 设函数 F 与 f 在区间 I 上都有定义，且在 I 上 $F'(x)=f(x)$，则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

2. （原函数存在定理）　若函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上存在原函数 F.

3. 设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，则

(1) $F+c$ 也是 f 的一个原函数，其中 c 为任意常数；

(2) f 的任意两个原函数至多相差一个任意常数.

4. 函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$.

不定积分的几何意义是：若 F 是 f 的一个原函数，则 $y=F(x)$ 的图像称为 f 的一条积分曲线，任一条积分曲线在横坐标相同点处的切线都是互相平行的.

5. 不定积分的基本公式：

(1) $\int 0\mathrm{d}x=c$；　　(2) $\int \mathrm{d}x=x+c$；

(3) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c\ (\alpha\neq-1,x>0)$；

(4) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln|x|+c$；　　(5) $\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{x}+c$；

(6) $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$； (7) $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + c$；

(8) $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + c$； (9) $\int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x + c$；

(10) $\int \csc^2 x \mathrm{d}x = -\cot x + c$；

(11) $\int \sec x \tan x \mathrm{d}x = \sec x + c$；

(12) $\int \csc x \cot x \mathrm{d}x = -\csc x + c$；

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$；

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + c$；

(15) $\int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + c$；

(16) $\int \tan x \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$；

(17) $\int \sec x \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + c$.

公式(17)还有其它形式，不再一一列出.

6. 不定积分的运算法则

(1) $\int (f \pm g)\mathrm{d}x = \int f\mathrm{d}x \pm \int g\mathrm{d}x$； (2) $\int kf\mathrm{d}x = k\int f\mathrm{d}x$.

疑 难 解 析

1. 为什么说微分运算"d"与不定积分运算构成一对逆运算?

答 从原函数和不定积分定义可以看到：$F(x)$是$f(x)$一个原函数，则$F'(x) = f(x)$. $f(x)$的不定积分$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + c$. 所以，有

$$\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right] = f(x)\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{d}F(x) = F(x) + c.$$

即"先积后微，作用抵消；先微后积，抵消加c"，故知微分与不定积

分构成一对逆运算.

方法、技巧与典型例题分析

在计算不定积分时，要注意任意常数 c. 当积分结果中含有 c 时，结果表示全体原函数；不含 c 时，只表示一个原函数. 一般地，若一个不定积分可化为几个积分时，在积分号全部去掉后添加一个 c 即可.

一、不定积分的基本概念

读者必须十分清楚函数、原函数、不定积分之间的联系与区别，在辨析问题时能够熟练地运用. 对于涉及基本概念的问题，只能利用定义和以前学过的连续与导数概念来考察和研究. 对分段函数和绝对值函数尤应注意.

例 1 判断下列 $F(x)$ 是否 $f(x)$ 的原函数，并说明为什么.

(1) $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

(2) $F(x)=\begin{cases} x^3+x+1, & x>0, \\ x^2, & x\leqslant 0. \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+1, & x>0, \\ 2x, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

解 (1) $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数. 因为当 $x\neq 0$ 时，有

$$F'(x)=f(x),$$

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0=f(0),$$

所以恒有 $F'(x)=f(x)$. 但 $f(x)$ 却不是连续函数，$f(x)$ 在 $x=0$

处有一个第二类间断点.

(2) $F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数. 因为 $F(x)$ 不连续，所以在不连续点 $x=0$ 必不可导，不存在 $F'(0)=f(0)$.

但当 $x\neq 0$ 时，恒有 $F'(x)=f(x)$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上是 $f(x)$ 的原函数.

例 2 一曲线通过点 $(e^2,3)$，且在曲线上任一点处切线的斜率都等于该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$，则依题设有 $y'=\dfrac{1}{x}$，于是

$$y=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c=\ln x+c,$$

且

$$3=\ln e^2+c=2+c\Longrightarrow c=1.$$

所以，曲线方程为 $y=\ln x+1$.

例 3 证明：

$$\int\left[\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f^2(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+c.$$

证 因为

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2+c\right\}'=\frac{f(x)}{f'(x)}\cdot\frac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$=\frac{f(x)}{f'(x)}-\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

所以，命题成立.

例 4 设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定的隐函数，计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $y=tx$，则由参数方程得

$$t^2x^2(x-tx)=x^2\Longrightarrow x=\frac{1}{t^2(1-t)},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t,\ y=\frac{1}{t(1-t)}.$$

故

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\int[t(1-t)]^2\cdot\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 3t - 2\ln t + c = \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + c.$$

例 5 设 $f(x)$ 的原函数 $F(x) > 0$，且 $F(0) = 1$. 当 $x \geqslant 0$ 时，有 $f(x)F(x) = \sin^2 2x$，求 $f(x)$.

解 $$\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int \sin^2 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + c.$$

又 $$\int f(x)F(x)\mathrm{d}x = \int F(x)\mathrm{d}F(x) = \frac{1}{2}F^2(x) + c,$$

故 $$F^2(x) = x - \frac{1}{4}\sin 4x + c.$$

即 $F(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + c}$，由 $F(0) = 1 \Longrightarrow c = 1$. 所以

$$f(x) = \left(\sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + 1}\right)'$$

$$= (1 - \cos 4x)\Big/\left[2 - \sqrt{x - \frac{1}{4}\sin 4x + c}\right].$$

例 6 设单调的连续函数 $y = f(x)$ 和 $x = \varphi(y)$ 互为反函数，且 $\varphi'(y) > 0$，证明：

$$\int \sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x = \int \sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y.$$

证 由反函数求导法则知 $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$，$\mathrm{d}x = \varphi'(y)\mathrm{d}y$，故

$$\int \sqrt{f'(x)}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1/\varphi'(y)}\,\varphi'(y)\mathrm{d}y = \int \sqrt{\varphi'(y)}\mathrm{d}y.$$

例 7 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{1 + x\sin x}$，计算 $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}f(x) = \frac{1}{2}f^2(x) + c$，而

$$f(x) = \left[\frac{\sin x}{1 + \sin x}\right]' = \frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + x\sin x)^2},$$

所以 $$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x - \sin^2 x}{(1 + x\sin x)^2}\right]^2 + c.$$

例 8 已知$\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + c$,计算$\int xf(1 - x^2)\mathrm{d}x$.

解 由题设知,$f(x) = (x^2 + c)' = 2x$,故
$$f(1 - x^2) = 2(1 - x^2).$$

于是 $$\int xf(1 - x^2)\mathrm{d}x = \int x \cdot 2(1 - x^2)\mathrm{d}x$$
$$= \int (2x - 2x^3)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + c.$$

例 9 已知 $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x$,求 $f(x)$,$0 < x < 1$.

解 $$f'(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}$$
$$\Longrightarrow f'(x) = 1 - 2x + \frac{x}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - 2x.$$

故 $$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{1 - x} - 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\ln(1 - x) - x^2 + c,\ 0 < x < 1.$$

例 10 设 $f'(x) = \mathrm{c}^{-x}$,计算$\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 由 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ 知,$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$,得
$$f'(\ln x) = -\mathrm{e}^{-\ln x} = -\frac{1}{x},$$

则 $$\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{-1/x}{x}\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + c.$$

例 11 计算$\int |x|\mathrm{d}x$.

解 先分别讨论,再加以综合.

当 $x > 0$ 时, $\int |x|\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + c_1$;

当 $x < 0$ 时, $\int |x|\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2} + c_2$.

因为 $|x|$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续,所以 $|x|$ 的原函数$\int |x|\mathrm{d}x$ 也在$(-\infty, +\infty)$上连续. 故

$$\lim_{x\to 0^+}(x_2/2+c_1)=\lim_{x\to 0^-}(-x_2/2+c_2)\Rightarrow c_1=c_2,$$

于是
$$\int|x|\mathrm{d}x=\frac{|x|x}{2}+c.$$

例 12 已知 $F(x)=f(x)-\dfrac{1}{f(x)}, G(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$，若 $f'(x)=[G(x)]^2$，且 $f(\pi/4)=1$，求 $f(x)$.

解 先求 $f'(x)$ 的表达式. 由题设得

$$F'(x)=f'(x)+\frac{f'(x)}{f^2(x)}=f'(x)\left(\frac{f^2(x)+1}{f^2(x)}\right),$$

又 $$F'(x)=[G(x)]^2=\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]^2=\left[\frac{f^2(x)+1}{f(x)}\right]^2,$$

故 $$f'(x)\left(\frac{1+f^2(x)}{f^2(x)}\right)=\frac{(f^2(x)+1)^2}{f^2(x)}\Rightarrow f'(x)=1+f^2(x).$$

即
$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}=1.$$

将等式两边对 x 积分，得

$$\int\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1+f^2(x)}\mathrm{d}f(x)=\arctan f(x)=x+c.$$

所以
$$f(x)=\tan(x+c).$$

由 $f(\pi/4)=1\Rightarrow\pi/4+c=\pi/4\Rightarrow c=0$. 故

$$f(x)=\tan x.$$

二、用基本公式与性质计算不定积分

例 13 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int\tan^2x\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^2 2x}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int(\cos^4x+\sin^4x)\mathrm{d}x$； (4) $\displaystyle\int(\cos^4x-\sin^4x)\mathrm{d}x$.

解 要善于利用三角函数恒等式将函数变形，使积分计算变得简单易行.

(1) 原式 $\displaystyle=\int(\sec^2x-1)\mathrm{d}x=\int\sec^2x\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x$
$=\tan x-x+c.$

(2) 原式$=\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\dfrac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx$

$$=\frac{1}{4}\left[\int\frac{dx}{\cos^2x}-\int\frac{dx}{\sin^2x}\right]=\frac{1}{4}(\tan x-\cot x)+c.$$

(3) 原式$=\displaystyle\int[(\cos^2x+\sin^2x)^2-2\cos^2x\sin^2x]dx$

$$=\int(1-2\sin^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int(3+\cos4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(3x+\frac{1}{4}\sin4x\right)+c.$$

(4) 原式$=\displaystyle\int(\cos^2x+\sin^2x)(\cos^2x-\sin^2x)dx$

$$=\int\cos2x\,dx=\frac{1}{2}\sin2x+c.$$

显然,将题(3) 积分式与题(4) 积分式的和再乘以 1/2,得

$$\int\cos^4x\,dx=\frac{1}{32}(12x+\sin4x+8\sin2x)+c_1,$$

将题(3) 积分式与题(4) 积分式的差再乘以 1/2,得

$$\int\sin^4x\,dx=\frac{1}{32}(12x+\sin4x-8\sin2x)+c_2.$$

例 14 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int a^x e^x dx$; (2) $\displaystyle\int(2^x-3^x)^2dx$;

(3) $\displaystyle\int e^x\left(a^x-\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$; (4) $\displaystyle\int\frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.

解 (1) 原式$=\displaystyle\int(ae^x)dx=\frac{(ae)^x}{\ln(ae)}+c=\frac{(ae)^x}{1+\ln a}+c.$

(2) 原式 $=\displaystyle\int(4^x-2\cdot6^x+9^x)dx=\frac{4^x}{\ln4}-\frac{2\cdot6^x}{\ln6}+\frac{9^x}{\ln9}+c.$

(3) 原式$=\displaystyle\int\left[(ae)^x-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx$

$$=\frac{(ae)^x}{1+\ln a}-\arcsin x+c.$$

(4) 原式$=\displaystyle\int\frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx=\int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^{x} + x + c.$$

例 15 计算下列积分：

(1) $\int \frac{dx}{(x+3)(x+7)}$；　　(2) $\int \frac{3x^4+2x^2+1}{x^2+1}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$；　　(4) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2}dx$.

解 拆项、拼项是将复杂函数化为简单函数的常用手段，拆得巧妙，拼得合理，可以极大地简化积分计算，故分项积分是一种基本方法.

(1) $$\frac{1}{(x+3)(x+7)} = \frac{1}{4}\frac{(x+7)-(x+3)}{(x+3)(x+7)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right),$$

故 $$原式 = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right)dx = \frac{1}{4}[\ln|x+3| - \ln|x+7|] + c = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+3}{x+7}\right| + c.$$

(2) $$\frac{3x^4+2x^2+1}{x^2+1} = \frac{3x^2(x^2+1)-(x^2+1)+2}{x^2+1} = 3x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1},$$

故 $$原式 = \int\left(3x^2 - 1 + \frac{2}{1+x^2}\right)dx = x^3 - x + 2\arctan x + c.$$

(3) $$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right),$$

故 $$原式 = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$$

(4) $$\frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2} = \frac{(x^2+1)+(x-2)}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2+1},$$

故 $$原式 = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln|x-2| + \arctan x + c.$$

例 16 计算下列积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax}}$;　　　(2) $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x^3}-1)\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;　　　(4) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解　遇到根式函数，将式中根式化为分数指数幂，再利用幂函数积分公式计算积分.

(1) 原式 $=\frac{1}{\sqrt{2a}}\int x^{-1/2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{-1/2+1}\right)x^{-1/2+1}+c$

$=\sqrt{2x/a}+c$.

(2) 原式 $=\int(x^2+x^{3/2}-x^{1/2}-1)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^{5/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}-x+c$.

(3) 原式 $=\int(x^{-1/2}-2x^{1/2}+x^{3/2})\mathrm{d}x$

$=2x^{1/2}-\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+c$.

(4) 原式 $=\int(1-x^{-2})x^{3/4}\mathrm{d}x=\int(x^{3/4}-x^{-5/4})\mathrm{d}x$

$=\frac{4}{7}x^{7/4}+4x^{-1/4}+c$.

例 17　计算下列积分：

(1) $\int\frac{x^3}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x$;　　　(2) $\int\sin x\sin(x+a)\mathrm{d}x$.

解　(1) $x^3=[(x-1)+1]^3$

$=(x-1)^3+3(x-1)^2+3(x-1)+1$.

故

$$原式=\int\left[\frac{1}{(x-1)^{97}}+\frac{3}{(x-1)^{98}}+\frac{3}{(x-1)^{99}}+\frac{1}{(x-1)^{100}}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\left[\frac{1}{96(x-1)^{96}}+\frac{3}{97(x-1)^{97}}+\frac{3}{98(x-1)^{98}}+\frac{1}{99(x-1)^{99}}\right]+c.$$

(2) $\sin x\sin(x+a)=\frac{1}{2}[\cos a-\cos(2x+a)]$,故

$$原式=\frac{1}{2}\int[\cos a-\cos(2x+a)]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}x\cos a-\frac{1}{4}\sin(2x+a)+c.$$

例 18 已知$y'=f'(x)$的图形是一条开口向着y轴正向的二次抛物线,与x轴交于$x=0$和$x=2$两点.设$f(x)$有极大值4和极小值0,求$f(x)$.

解 由题设,知$f'(x)=ax(x-2)\ (a>0)$,则

$$f(x)=\int ax(x-2)\mathrm{d}x=ax^3/3-ax^2+c.$$

又当$f'(x)=0$时,有稳定点$x=0$和$x=2$,则

$$f(0)=c,\quad f(2)=-4a/3+c.$$

而$f''(x)=2a(x+1)$,有$f''(0)=-2a<0,f''(2)=2a>0$.故$f(0)$为极大,$f(2)$为极小,即

$$\begin{cases}c=4,\\-4a/3+c=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=4,\\a=3.\end{cases}$$

所以
$$f(x)=x^3-3x^2+4.$$

第二节　换元积分法与分部积分法

主要内容

1. 换元积分法　设$u=\varphi(x)$在$[a,b]$上可导,且$\alpha<\varphi(x)<\beta$,$g(u)$在$[\alpha,\beta]$上有定义,记

$$f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x),\ x\in[a,b].$$

(1) 第一换元法(也称凑微分法)　若g在$[\alpha,\beta]$上有原函数

G,则 f 在$[a,b]$上也有原函数 F,且 $F(x)=G(\varphi(x))+c$ 或

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int g(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}$$
$$=G(\varphi(x))+c.$$

(2) 第二换元法　若 $\varphi'(x)\neq 0$,则当 f 在$[a,b]$上有原函数时,g 在$[\alpha,\beta]$上也有原函数 G,且 $G(u)=F(\varphi^{-1}(u))+c$ 或

$$\int g(u)\mathrm{d}u=\int g(\varphi(x))\varphi(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]_{x=\varphi^{-1}(u)}$$
$$=F[\varphi^{-1}(u)]+c.$$

2. 分部积分法　若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导,且不定积分 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在,则$\int u(c)v'(x)\mathrm{d}x$ 也存在,且有

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

上式称为分部积分公式,简记为$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

疑 难 解 析

1. 使用换元法应注意哪些问题?

答　换元积分法也称变量替换法,是计算不定积分的重要方法.换元积分公式是复合函数求导公式的逆转,可以解决一大类函数的不定积分问题.

(1) 第一换元法又称凑微分法,它是将不定积分公式中被积函数分离,用分离出的一部分与自变量的微分凑成一个新变量的微分,而使被积函数中的余下部分化为新变量的函数,于是原不定积分化为新变量的函数对新变量的不定积分.即,将不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 中 $f(x)$ 分离为 $f[\varphi(x)]\varphi'(x)$,使 $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$ 成为新变量的微分,余下部分化为新变量的函数 $f[\varphi(x)]=g(u)$,故

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int g(u)\mathrm{d}u$$

$$= G(u) + c = G[\varphi(x)] + c.$$

要掌握第一换元法，读者必须牢记常用的求导数公式并能熟练运用复合函数的求导法则.

(2) 在第二换元法中引入一个新变量，使原不定积分中的自变量的微分化为一个新变量函数与新变量微分之积，而原被积函数也化为新变量的函数，于是两个新变量函数之积成为新的被积函数，得到一个新的不定积分. 即，对不定积分$\int g(u)\mathrm{d}u$，令 $u = \varphi(x)$，则 $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\mathrm{d}x, g(u) = g[\varphi(x)]$. 得到新的被积函数 $g[\varphi(x)]\varphi'(x) = f(x)$. 故

$$\int g(u)\mathrm{d}u = \int g[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(x) + c = F[\varphi^{-1}(u)] + c.$$

要掌握第二换元法也必须能熟练运用复合函数的求导法则，能引入恰当的新变量.

总之，换元法的关键是变量替换，技巧在于凑微分和引入新变量，目的是使新的不定积分比原不定积分易于求出.

2. 使用分部积分法的原则是什么？

答　分部积分法是两个函数乘积的导数公式的逆转，在认识公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$

时要认识到：等式的意义是等号两边的全体原函数相等，而不是某一个原函数相等.

使用分部积分法的原则是：将$\int f(x)\mathrm{d}x$ 中的 $f(x)\mathrm{d}x$ 化为 $u\mathrm{d}v$，要求 $v = \int \mathrm{d}v$ 易于求得（最好是一眼即能看出），要求$\int v\mathrm{d}u$ 要比$\int u\mathrm{d}v$ 易于积出. 将 $f(x)\mathrm{d}x$ 化为恰当的 $u\mathrm{d}v$ 是分部积分的关键，也是技巧的体现. 一般地，当 $f(x)$ 可以分解为两个函数的乘积时，

我们选择其中一个为u,另一个与$\mathrm{d}x$组成$\mathrm{d}v$,选择“u”的优先次序是“反(三角函数)、对(数函数)、幂(函数)、三(角函数)、指(数函数)”.次序选对了,不定积分易于求出;次序选错了,则不定积分不能求出.如

$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c,$$

而
$$\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}\,\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x - \int \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

积分反而越来越复杂了.

方法、技巧与典型例题分析

一、换元积分法的应用

换元积分法分第一换元法与第二换元法,第一换元法的关键在于凑微分.凑得巧妙,不定积分就易于求出;否则求积分就比较困难.但一般地,使用第一换元法时不写出中间的替换变量,做题者心中有数就可以了.常用的凑微分形式有:

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b),$$

$$\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n,$$

$$\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x,$$

$$\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\mathrm{d}\cos x,$$

$$\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x,$$

$$\int f(\ln x)\,\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x,$$

$$\int f(\tan x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x,$$

$$\int f(\cot x)\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int f(\cot x)d\cot x,$$

$$\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int f(\arcsin x)d\arcsin x,$$

$$\int f(\arccos x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int f(\arccos x)d\arccos x,$$

$$\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}dx=\int f(\arctan x)d\arctan x,$$

$$\int f\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int f\left(x+\frac{1}{x}\right)d\left(x+\frac{1}{x}\right),$$

$$\int f\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=\int f\left(x-\frac{1}{x}\right)d\left(x-\frac{1}{x}\right).$$

一些较复杂的问题，有时要凑几次微分.

第二换元法一般是根据被积函数的特点和形式来选定代换形的，常用的有三角代换、双曲代换、根式代换、指数代数、倒代换等. 具法的方法和技巧，我们将在例题中讲述.

事实上，较复杂的不定积分一般都不能用单一的方法求得，而需要使用多种方法积分. 这种例子我们将在后面逐步引入.

例 1 用不同方法计算不定积分$\int \sin 2x dx$，解释不同结果的合理性.

解 有三种解法：

$$I=2\int \sin x\cos x dx=2\int \sin x d\sin x=\sin^2 x+c_1,$$

$$I=2\int \sin x\cos x dx=-2\int \cos x d\cos x=-\cos^2 x+c_2,$$

$$I=\frac{1}{2}\int \sin 2x d(2x)=-\cos 2x+c_3.$$

因为 $-\cos^2 x+c_2=\sin^2 x-1+c_2$，所以，当 $c_1=c_2-1$ 时，前两式就相等了，即前两结果只相差一个常数，故在全体原函数的意义上是相等的.

又 $$-\frac{1}{2}\cos 2x+c_3=-\frac{1}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)+c_3$$

$$= -\cos^2 x + \frac{1}{2} + c_3,$$

所以后两式也只相差一个常数，它们在全体原函数的意义上是相等的.

例 2 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^n}$； (2) $\int \sqrt{a-bx}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

解 利用 $\int x^\mu \mathrm{d}x = \frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1} + c$.

$$(1)\ I = \frac{1}{a}\int (ax+b)^{-n}\mathrm{d}(ax+b)$$

$$= -\frac{1}{a(n-1)}(ax+b)^{1-n} + c.$$

$$(2)\ I = \frac{-1}{b}\int (a-bx)^{1/2}\mathrm{d}(a-bx) = -\frac{2}{3b}(a-bx)^{3/2} + c.$$

利用 $\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln u + c$，特别是分子的分子恰好是分母的导数时，非常简便.

$$(3)\ I = \int \frac{\mathrm{d}(x^2-3x+8)}{x^2-3x+8} = \ln|x^2-3x+8| + c.$$

$$(4)\ I = \int \frac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x\ln(\ln x)} = \int \frac{\mathrm{d}\ln(\ln x)}{\ln(\ln x)} = \ln[\ln(\ln x)] + c.$$

例 3 计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{x^4+x^2-6}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$； (4) $\int \frac{1}{x(x^6+4)}\mathrm{d}x$.

解 有时需要先将被积函数变形，再进行恰当的变量替换.

$$(1)\ I = \int (a+x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = a\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= a\cdot \arcsin\frac{x}{a} + \left(-\frac{1}{2}\right)\int (a^2-x^2)^{-1/2}\mathrm{d}(a^2-x^2)$$

$$= a \cdot \arcsin\frac{x}{a} - (a^2 - x^2)^{1/2} + c.$$

(2) $I = \int \frac{1}{(x^2-2)(x^2+3)}dx = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3}\right)dx$

$$= \frac{1}{5}\int\left[\frac{1}{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} - \frac{1}{3}\frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2}\right]dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{20}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{15}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$$

(3)

$$I = \int\frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}\frac{dx^2}{2\sqrt{1+x^2}} = \int\frac{\sin\sqrt{1+x^2}}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\sqrt{1+x^2}$$

$$= \int\frac{1}{\cos\sqrt{1+x^2}}d\cos\sqrt{1+x^2} = \ln|\cos\sqrt{1+x^2}| + c.$$

(4) $I = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\int\frac{d(x^6+4)}{x^6+4}$

$$= \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{24}\ln|x^6+4| + c = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^6}{x^6+4}\right| + c.$$

例 4 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}dx$；　　(2) $\int\frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx$；

(3) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；　　(4) $\int e^x\frac{1+\sin x}{1+\cos x}dx$.

解 (1) 观察到分母两个因式与分子中两个因式相同，所以分解分母的因式，得

$$I = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)[\ln(1+x) - \ln x]dx$$

$$= -\int[\ln(1+x) - \ln x]d[\ln(1+x) - \ln x]$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln x]^2 + c = -\frac{1}{2}\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right) + c.$$

(2) 观察到分母中因式 xe^x 无法分解，因此设法将含 x 的项都凑成 xe^x 形式，得

$$I = \int\frac{e^x(x+1)}{xe^x(1+xe^x)}dx = \int\frac{dxe^x}{xe^x(1+xe^x)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{xe^x}-\frac{1}{1+xe^x}\right)d(xe^x)=\ln\frac{xe^x}{1+xe^x}+c$$
$$=x+\ln\frac{x}{1+xe^x}+c.$$

一般地，有凑微分形式

$$e^{ax}[\varphi(bx)+b\varphi'(bx)]=d[e^{ax}\varphi(bx)],$$

如 $$\int e^x\left[\frac{1}{x}+\ln x\right]dx=\int d(e^x\ln x)=e^x\ln x+c.$$

(3) 当函数 $v(x)=xu'(x)$ 时，有公式

$$\int[u(x)+v(x)]dx=\int d[xu(x)]=xu(x)+c.$$

在本例中令 $u(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$，则 $xu'(x)=\dfrac{x}{1+\cos x}$，

故 $$I=\int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{x}{1+\cos x}\right)dx=\int d\left(x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{x\sin x}{1+\cos x}+c.$$

(4) 因为 $$\frac{1+\sin x}{1+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\cos x},$$

而 $$\frac{1}{1+\cos x}=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)',$$

所以由题(2)中凑微分形式得

$$I=\int e^x\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\right)dx=\int d\left(\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$=\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}+c.$$

例 5 计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}dx$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{x^{2n-1}}{1+x^n}dx$；

(3) $\displaystyle\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}dx$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$.

解 认真观察被积函数，找出特点，进行变形，使积分易于计算.

(1) 进行变形，去掉根号再积分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+\cos(\pi/2 - x)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2\cos^2(\pi/4 - x/2)}} = -\sqrt{2}\int \frac{d(\pi/4 - x/2)}{\cos(\pi/4 - x/2)}$$

$$= -\sqrt{2}\ln\left|\sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| + c.$$

(2) 由于分母含因式 x^n,进行变形,化为对 x^n 的积分.

$$\int \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}dx = \int \frac{x^n \cdot x^{n-1}}{1+x^n}dx = \frac{1}{n}\int \frac{x^n + 1 - 1}{1+x^n}dx^n$$

$$= \frac{1}{n}\int dx^n - \int \frac{d(x^n+1)}{1+x^n} = \frac{x^n}{n} - \ln|x^n + 1| + c.$$

(3) 利用三角函数之间的关系和 $d(\cos x + \sin x) = (\cos x - \sin x)dx$ 积分. 即变形后,考察分子是否为某函数的导数.

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x\cos x}dx = \int \frac{2(\cos x + \sin x)}{1 + (\cos x + \sin x)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{d(\cos x + \sin x)}{1 + (\cos x + \sin x)^2} = \arctan(\cos x + \sin x) + c.$$

(4) 将被积函数变形重组,巧妙地凑成微分.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} = \int \frac{2d\sqrt{x-a}}{\sqrt{b-x}}$$

$$= 2\int \frac{d\sqrt{x-a}}{\sqrt{(\sqrt{b-a})^2 - (\sqrt{x-a})^2}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c.$$

从题(4)可以看出,要想凑微分"凑"得巧妙,使积分变得简单,必须对复合函数求导方法和常用公式烂熟于心.

例 6 计算下列不定积分:

(1) $\int \cos(\ln x)dx$; (2) $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx$; (3) $\int e^{2x}\sin^2 x dx$.

解 利用三角函数间的关系,将不定积分"配对"然后解方程求出不定积分,还可以得到一个配对的不定积分结果.

(1) 令 $I_1 = \int \cos(\ln x)dx, I_2 = \int \sin(\ln x)dx$. 则

$$I_1 + I_2 = \int [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]dx$$

$$= \int [x(\sin(\ln x))' + \sin(\ln x)]\mathrm{d}x \text{（由例 4(3) 中公式）}$$

$$= \int \mathrm{d}[x\sin(\ln x)] = x\sin(\ln x) + c_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int [\cos(\ln x) + x(\cos(\ln x))']\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}[x\cos(\ln x)]$$

$$= x\cos(\ln x) + c.$$

解方程组，即得 I_1 和 I_2

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = x\sin(\ln x) + c_1, \\ I_1 - I_2 = x\sin(\ln x) + c_2, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + c, \\[2ex] I_2 = \dfrac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + c_0. \end{cases}$$

(2) 令 $I_1 = \int \dfrac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}, I_2 = \int \dfrac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$，则

$$I_1 + I_2 = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x = x + c_1,$$

$$-I_1 + I_2 = \int \frac{-\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x}$$

$$= \ln|\sin x - \cos x| + c_2.$$

解方程组，即得 c_1 和 I_2.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = x + c_1 \\ -I_1 + I_2 = \ln|\sin x + \cos x| + c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + c, \\[2ex] I_1 = \dfrac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + c_0. \end{cases}$$

(3) 令 $I_1 = \int e^{2x}\sin^2 x\mathrm{d}x, I_2 = \int e^{2x}\cos^2 x\mathrm{d}x$，则

$$I_1 + I_2 = \int e^{2x}(\sin^2 x + \cos^2 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{2x} + c_1,$$

$$I_1 - I_2 = \int e^{2x}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos 2x dx.$$

又令 $I_3 = \int e^t \cos t dt, I_4 = \int e^t \sin t dt$，则

$$I_3 + I_4 = \int e^t[\cos t + \sin t]dt = \int e^t[(\sin t)' + \cos t]dt$$

$$= \int d(e^t \sin t) = e^t \sin t + c_3 \text{（依例 4(3) 中公式）},$$

$$I_3 - I_4 = \int e^t[\cos t - \sin t]dt = \int e^t[\cos t + (\cos t)']dt$$

$$= \int d(e^t \cos t) = e^t \cos t + c_4 \text{（依例 4(3) 中公式）}.$$

解方程组
$$\begin{cases} I_3 + I_4 = e^t \sin t + c_3, \\ I_3 - I_4 = e^t \cos t + c_4, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_3 = \dfrac{e^t}{2}(\sin t + \cos t) + c_3', \\ I_4 = \dfrac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + c_4', \end{cases}$$

$$\Longrightarrow I_2 - I_1 = \frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x) + c_2;$$

解方程组
$$\begin{cases} I_1 + I_2 = \dfrac{1}{2}e^{2x} + c_1, \\ I_2 - I_1 = \dfrac{e^{2x}}{4}(\sin 2x + \cos 2x) + c_2, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} I_1 = \dfrac{e^{2x}}{4}\left[1 - \dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)\right] + c, \\ I_2 = \dfrac{e^{2x}}{4}\left[1 + \dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)\right] + c_0. \end{cases}$$

例 7 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$；　　(2) $\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}dx$；

(3) $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}dx$；　　(4) $\int \frac{e^{\arctan x} + x\ln x(1 + x^2)}{1 + x^2}dx$.

解　(1) $I=\int\frac{-\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-x})^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{1-(\mathrm{e}^{-x})^2}}$

$=\arcsin\mathrm{e}^{-x}+c.$

(2) $I=\int\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}=\int\frac{\mathrm{e}^x+1-1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int\mathrm{d}\mathrm{e}^x-\int\frac{(\mathrm{d}\mathrm{e}^x+1)}{1+\mathrm{e}^x}$

$=\mathrm{e}^x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+c.$

(3) $I=\int\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big/\sqrt{2}\right]+c$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}.$

(4) $I=\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$

$=\int\mathrm{e}^{\arctan x}\mathrm{d}\arctan x+\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}[\ln(1+x^2)]$

$=\mathrm{e}^{\arctan x}+\frac{1}{4}\ln^2(1+x^2)+c.$

例 8　用三角代换计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+a^2}}$；

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$；　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

解　(1) 含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 时，令 $x=a\sin t$（或 $a\cos t$），则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$（或 $-a\sin t\mathrm{d}t$），且当 $|t|<\frac{\pi}{2}$ 时，$t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\cos t=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.（在使用熟练的情况下，以上内容在解题时均不再指出）从而有

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{a^2\sin^2t}{a\cos t}a\cos t\mathrm{d}t$$

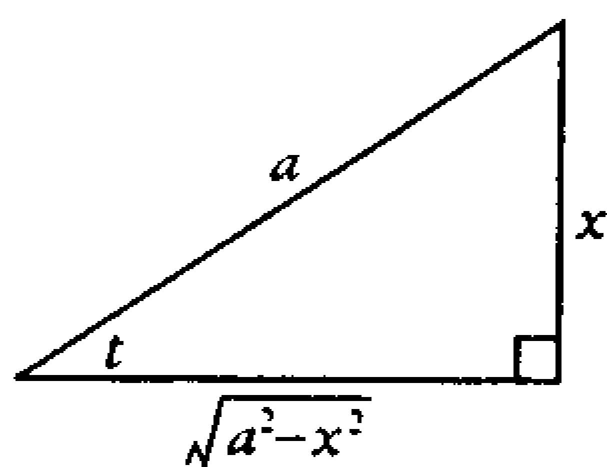


图 5.1

$$=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c$$

$$=\frac{a^2}{2}(t-\sin t\cos t)+c$$

$$=\frac{a^2}{c}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+c.$$

求反函数可借助图 5.1 所示的直角三角形，即结果要化为原变量的函数.

(2) 含 $\sqrt{a^2+x^2}$ 时，令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{1}{a\tan t a\sec t}a\sec^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int\csc t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a}[-\ln|\csc t+\cot t|]+c$$

$$=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+\frac{a}{x}\right|+c$$

$$=\frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{a^2+x^2}}+c\ (\text{见图 5.2}).$$

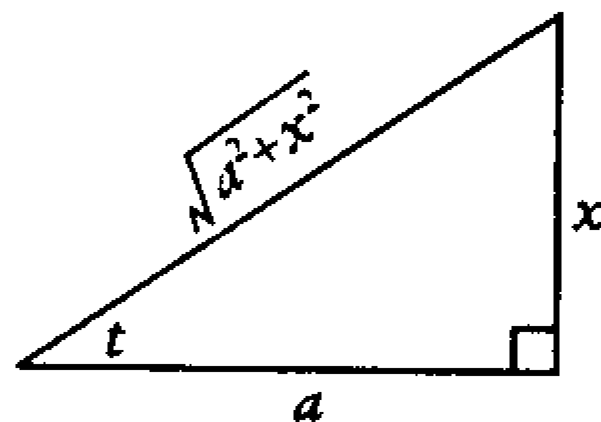


图 5.2

(3) 令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}=\int\frac{a\sec^2 t+t\mathrm{d}t}{(a^2\tan^2 t+a^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int\frac{\sec^2 t}{\sec^4 t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^3}\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2a^3}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+c=\frac{1}{2a^3}\left(\arctan\frac{x}{a}+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+c.$$

(4) 含 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，令 $x=a\sec t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec t\tan t}{a^2\sec^2 t a\tan t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t\mathrm{d}t+c$$

$$=\frac{1}{a^2x^2}\sqrt{x^2-a^2}+c(\text{见图 5.3}).$$

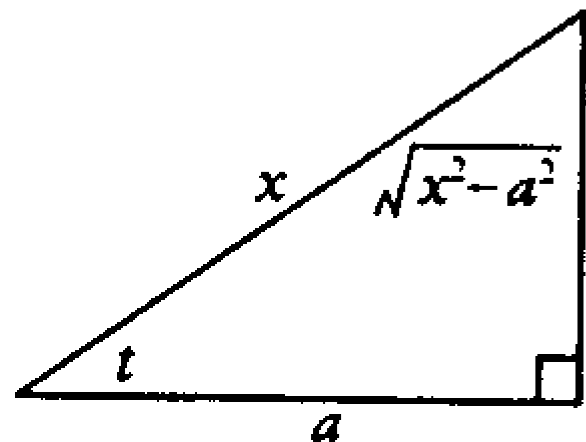


图 5.3

例 9 用根式代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$；　　(2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$；

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}dx$；　　(4) $\int \sqrt{1-e^{2x}}dx$.

解　(1) 被积函数中含根式 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，取根次数的最小公倍数 6，令 $u=\sqrt[6]{x}$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int \frac{6u^5du}{u^3+u^2}=6\int\left(u^2-u+1-\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=6\left(\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u-\ln|1+u|\right)+c$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|1+\sqrt[6]{x}|+c.$$

(2) 令 $\sqrt{1+x}=t$，有 $dx=2tdt$，则

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}=\int \frac{2tdt}{1+t}=\int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)dt$$

$$=2t-2\ln|1+t|+c=2\sqrt{1+x}-2\ln|1+\sqrt{1+x}|+c.$$

(3) 令 $\sqrt{e^x+1}=t$，有 $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}=\int \frac{2tdt}{t(t^2-1)}=2\int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+c.$$

(4) 令 $\sqrt{1-e^{2x}}=t$，有 $dx=\frac{-tdt}{1-t^2}$，则

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}dx=\int t\frac{-t}{1-t^2}dt=\int \frac{1-t^2-1}{1-t^2}dt$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=\sqrt{1-e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+c.$$

例 10　用指数代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$；　　(2) $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$；

(3) $\int \frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}$；　　(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}$.

解　当被积函数中含因式 a^x 时，可令 $a^x=t$，化去指数因式.

(1) 令 $e^x=t$，有 $dx=\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int \frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)dt$$
$$=\ln|t|-2\ln|1+t|+c=x-2\ln|1+e^x|+c.$$

(2) 令 $e^{x/2}=t$，有 $dx=\frac{2dt}{t}$，则

$$\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}=\int \frac{2}{t+t^2}\frac{dt}{t}=2\int \frac{t+1-t}{t^2(t+1)}dt$$
$$=2\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=\frac{-2}{t}-2\ln|t|+2\ln|1+t|+c$$
$$=-2e^{-x/2}-x+2\ln|1+e^{x/2}|+c.$$

(3) 令 $2^x=t$，有 $dx=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{2^x dx}{1+2^x+4^x}=\int \frac{t}{1+t+t^2}\frac{dt}{t\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{(t+1/2)^2+3/4}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\int \frac{d(t+1/2)}{(t+1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+c$$
$$=\frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan[(2^{x+1}+1)/\sqrt{3}]+c.$$

(4) 令 $e^x=t$，有 $dx=\frac{dt}{t}$，则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1-e^x}}=\int \frac{1}{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}}\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t} - \sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

再令 $\sqrt{1+t} = u$，有 $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{u}{(u^2-1)^2}2u\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2-1+1}{(u^2-1)}\mathrm{d}u$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} + \frac{1}{2}\int\left[\frac{-1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2}\right]\mathrm{d}u$$

$$= -\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2(u-1)}$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|u+1| - \frac{1}{2(u+1)} + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right| - \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c_1.$$

再令 $\sqrt{1-t} = v$，有 $\mathrm{d}t = -2v\mathrm{d}v$，则

$$\int \frac{\sqrt{1-t}}{t^2}\mathrm{d}t = -2\int \frac{v^2-1+1}{(v^2-1)}\mathrm{d}v$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right| + \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c_2.$$

所以 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x} - \sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}\right| + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}+1}\right|$$

$$- \frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} - \frac{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}{2\mathrm{e}^x} + c.$$

例 11 用对数代换计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.

解 当被积函数含因式 $\ln x$ 时，可令 $\ln x = t$，化简积分计算.

(1) 令 $\ln x = t$，有 $dx = e^t dt$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{\ln x}d\ln x = \int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt.$$

再令 $\sqrt{1+t} = u$，有 $dt = 2udu$，则

$$\int \frac{\sqrt{1+t}}{t}dt = \int \frac{u}{u^2-1}2udu = 2\int\left(1-\frac{1}{u^2-1}\right)du$$

$$= 2\left(u+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right)+c$$

$$= 2\sqrt{1+t}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1}\right|+c.$$

故 $$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx = 2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+c.$$

(2) 令 $\ln x = t$，有 $dx = e^t dt$，则

$$\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \frac{\ln x}{\sqrt{1+\ln x}}dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t}}dt.$$

再令 $\sqrt{1+u} = u$，有 $dt = 2udu$，则

$$\int \frac{t}{\sqrt{1+u}}dt = \int \frac{u^2-1}{u}2udu = 2\int(u^2-1)du$$

$$=\frac{2}{3}u^3-2u+c=\frac{2}{3}\sqrt{(1+t)^3}-2\sqrt{1+t}+c.$$

故 $$\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \frac{2}{3}(\ln x-2)\sqrt{1+\ln x}+c.$$

例 12 用倒代换计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx$； (2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$；

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^8(1+x^2)}$； (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x+x^2)^{3/2}}$.

解 当被积函数为分式，且分母中变量次数高于分子中变量次数时，可用倒代换，即 $x = \dfrac{1}{t}$，化简积分计算.

(1) 令 $x=\frac{1}{t}$,有 $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$,则

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\ln(1/t)}{[1/t-\ln(1/t)]^2}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int\frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}=\frac{1}{1+t\ln t}+c=\frac{x}{x-\ln x}+c.$$

(2) 令 $x^2=\frac{1}{t}$,有 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{4-1/t}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4t^2-t}}$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{(t-1/8)^2-(1/8)^2}}\mathrm{d}(t-1/8)$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|t-\frac{1}{8}+\sqrt{t^2-t/4}\right|+c.$$

其中用了公式$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}|+c.$

故 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\sqrt{1/x^4-1/4x^2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2+\sqrt{4-x^2}}\right|+c.$$

(3) 令 $x=\frac{1}{t}$,有 $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^8(1+x^2)}=-\int\frac{t^8}{t^2+1}\cdot\frac{t^2}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\frac{t^8}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int(t^2-1)(t^4+1)\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$=\int(-t^6+t^4-t^2+1)\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

$$==\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+t-\arctan t+c$$

$$=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+c.$$

(4) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^{3/2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{[(x+1/2)^2+3/4]^{3/2}}.$$

令$(x+1/2)=\frac{1}{t}$，有 $\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，则原式化为

$$\int\frac{1}{(1/t^2+3/4)^{3/2}}\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+3t^2/4)}$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3t^2/4+1)}{(1+3t^2/4)^{3/2}}=\frac{4}{3}(1+3t^2/4)^{-1/2}+c.$$

故
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^{3/2}}=\frac{2}{3}\frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}}+c.$$

例 13 用双曲代换计算下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

解 双曲代换的功效与三角代换相似，但演算较为复杂，一般令 $x=a\mathrm{sh}t$ 或 $x=a\mathrm{ch}t$，可以化简积分计算.

(1) 令 $x=a\mathrm{sh}t$，有 $\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$，则

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{ch}^2t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2t+1)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}2t+\frac{a^2}{2}t+c_1.$$

因为
$$x+\sqrt{a^2+x^2}=a(\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t)=a\mathrm{e}^t,$$

则
$$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

又
$$\mathrm{sh}2t=2\mathrm{sh}t+\mathrm{ch}t=\frac{2x\sqrt{a^2+x^2}}{a^2},$$

故
$$\int\sqrt{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+c.$$

(2) 令 $x=a\mathrm{sh}t$，有 $\mathrm{d}x=a\mathrm{ch}t\mathrm{d}t$，则

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=a^2\int\mathrm{sh}^2t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{\mathrm{ch}2t-1}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}2t-\frac{a^2}{2}t+c$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+c.$$

(3) 因为函数定义域为 $x \geqslant a$ 和 $x < -a$,所以:

1° $x > a$ 时,令 $x = a\text{ch}t$ $(t > 0)$,有 $\mathrm{d}x = a\text{sh}t\mathrm{d}t$.

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x = \int a(\text{ch}t - 1)\mathrm{d}t = a\text{sh}t - at + c_1$$

$$= a\sqrt{\text{ch}^2 t - 1} - at + c_1$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - a\ln(\sqrt{x^2-a^2}+x) + c_2$$

$$= \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}) + c.$$

2° 当 $x < -a$ 时,令 $x = -a\text{ch}t$,有 $\mathrm{d}x = -a\text{sh}t\mathrm{d}t$,

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = -a\int(\text{ch}t+1)\mathrm{d}t = -a\text{sh}t - at + c_1$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - a\ln(\sqrt{x^2-a^2}-x) + c_2$$

$$= -\sqrt{x^2-a^2} - 2\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}) + c.$$

即,当 $|x| > a$ 时,有

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$$

$$= \text{sgn}x\cdot\sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|}) + c$$

(式中 $2\ln(\sqrt{|x-a|}+\sqrt{|x+a|})$

$$= 2\ln\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{2}a} + 2\ln\sqrt{2}a$$

$$= \ln\frac{(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})^2}{2a^2} + \ln 2a^2 = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}).$$

(4) 令 $x = a\text{ch}t$,有 $\mathrm{d}x = a\text{sh}t\mathrm{d}t$,则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int\frac{a\text{ch}t}{a\text{ch}t}\mathrm{d}t = \int\mathrm{d}t = t + c_1 = \text{arch}\frac{x}{a} + c_1$$

$$= \ln\left[\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right]c_1 = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + c.$$

在上面的例题中，我们对每一个题只用一种指定的方法求解．需要指出的是，这并不说明这种解是惟一的，或者是最优的．实际上，大多数题都有多种解法，技巧各有不同，结果有时也迥然相异，但对结果求导，总能得到被积函数．

下面的例题，我们不规定方法，读者可试用其它方法求解．

例 14　计算下列不定积分：

(1) $\int \sqrt{1-e^{2x}}dx$；　　(2) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；　　(4) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$；

(5) $\int \frac{1-x^n}{x(1+x^n)}dx$；　　(6) $\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}dx\ (n\in \mathbf{N})$．

解　(1) 令 $e^x=\sin t$，有 $dx=\frac{\cos t}{\sin t}dt$，则

$$\int \sqrt{1-e^{2x}}dx=\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}dt=\int \frac{1-\sin^2 t}{\sin t}dt$$

$$=\int (\csc t-\sin t)dt=\cos t+\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+c$$

$$=\cos t-\ln\left|\frac{\sqrt{1-\cos t}}{\sqrt{1+\cos t}}\right|+c$$

$$=\sqrt{1-e^{2x}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-e^{2x}}-1}{\sqrt{1-e^{2x}}+1}\right|+c.$$

(2) 令 $x=2a\sin^2 t$，有 $dx=4a\sin t\cos t dt$，则

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx=8a^2\int \sin^4 t dt=2a^2\int (1-\cos 2t)^2 dt$$

$$=2a^2\int (1-2a\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4t)dt$$

$$=3a^2 t-2a^2\sin 2t+\frac{a^2}{4}\sin 4t+c.$$

由 $\sin t=\sqrt{\frac{x}{2a}}$，$\cos t=\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}$，$\sin 2t=\sqrt{\frac{x(2a-x)}{a}}$，$\sin 4t=$

$\dfrac{2(a-x)\sqrt{x(2a-x)}}{a^2}$,得

$$I = 3a^2\arcsin\sqrt{x/2a} - 2a\sqrt{x(2a-x)} + \frac{a-x}{2}\sqrt{x(2a-x)} + c.$$

(3) 令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$,有 $\mathrm{d}x = 2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t$,则

$$\begin{aligned}
&\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\\
&=\int\frac{1}{(b-a)\sin^2 t}\sqrt{\frac{(b-a)\sin^2 t}{(b-a)\cos^2 t}}\cdot 2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t\\
&=2\int\mathrm{d}t = 2t + c.
\end{aligned}$$

由 $x-a=(b-a)\sin^2 t, b-x=(b-a)\cos^2 t \Longrightarrow \tan^2 t = \dfrac{x-a}{b-x}$,

故 $\tan t = \sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + c.$$

(4) $$\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\mathrm{d}x\\
&=\int\frac{\tan^2 x\sec^2 x+\sec^2 x}{\tan^4 x+1}\mathrm{d}x = \int\frac{\tan^2 x+1}{\tan^4 x+1}\mathrm{d}\tan x\\
&=\int\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t = \int\frac{1+1/t^2}{t^2+1/t^2}\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}(t-1/t)}{(t-1/t)^2+2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t-1/t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan^2 x-1}{\sqrt{2}\tan x} + c.
\end{aligned}$$

(5) 令 $x^n = t$,有 $\mathrm{d}x = \dfrac{x\mathrm{d}t}{nt}$,则

$$\begin{aligned}
&\int\frac{1-x^n}{x(1+x^n)}\mathrm{d}x = \int\frac{1-t}{x(1+t)}\cdot\frac{x\mathrm{d}t}{nt} = \frac{1}{n}\int\frac{1-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}[\ln t - 2\ln(1+t)] + c
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}[\ln x^n - 2\ln(1 + x^n)] + c.$$

(6) 将 $\sin 2nx$ 变形为

$$\begin{aligned}\sin 2nx &= \sin 2nx - \sin 2(n-1)x + \sin 2(n-1)x \\ &\quad - \sin 2(n-2)x + \cdots + \sin 2x - \sin 0x \\ &= \sum_{k=1}^{n}[\sin 2kx - \sin(2k-2)x] \\ &= 2\sin x \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x,\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\mathrm{d}x &= 2\int \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)x\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1}\sin(2k-1)x + c.\end{aligned}$$

对于初学者来说，用常规方法解题比较可靠，但不一定最简单. 非常规方法如剑走偏锋，有时有很好的效果，但不易掌握.

二、分部积分法的应用

当被积函数为两类不同函数乘积时，可采用分部积分法计算不定积分. 如疑难解析中所指出的，选 u 的优先次序为"反、对、幂、三、指"，不按次序，不定积分则难以计算出.

例 15 下面的运算错在哪里?说明为什么.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \sin x \mathrm{d}\,\frac{1}{\sin x} \\ &= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

从而得 $0 = 1$.

解 整个运算过程是正确的，恰恰是结论"$0 = 1$"下错了. 因为，不定积分的等式不同于数值等式，等式 $\int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 表示等式两边原函数在全体意义上的相等，即在等式左边的原函数中任取一个原函数 $f(x)$ 时，等式右边的原函数中必有

一个原函数 $1+g(x)$ 与之相等，而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$ 的原函数. 事实上

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+c_1,$$

$$1+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x=1+\ln|\sin x|+c_2=\ln|\sin x|+c_1,$$

即当给定 c_1 时，总有 $c_2=c_1-1$ 与之对应. 故不能用数值等式方法得出“$0=1$”.

例 16 已知 $f(x)$ 的一个原函数是$\frac{\sin x}{x}$，证明：

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+c.$$

证 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x,$

因为 $$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

所以 $$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\frac{x\cos x-\sin x}{x}-\frac{\sin x}{x}+c$$
$$=\cos x-\frac{2\sin x}{x}+c.$$

例 17 设$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+c$，$f(x)$ 可微，且 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在，证明：

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+c.$$

证 $\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int x\mathrm{d}[f^{-1}(x)],$

令 $t=f^{-1}(x)$，则 $x=f(t)$，于是

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-\int f(t)\mathrm{d}t=xf^{-1}(x)-F(t)+c$$
$$=xf^{-1}(x)-F[f^{-1}(x)]+c.$$

例 18 计算下列不定积分：

(1) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \mathrm{arcsh}x\,\mathrm{d}x$.

解　利用例 17 的结果.

(1) 令 $f^{-1}(x)=\arctan\sqrt{x}$，则 $x=\tan^2 t$，于是

$$\begin{aligned}\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= x\arctan\sqrt{x}-\int \tan^2 t\,\mathrm{d}t\\&= x\arctan\sqrt{x}-\int(\sec^2 t-1)\mathrm{d}t\\&= x\arctan\sqrt{x}-\tan^2 t+t+c\\&= x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c\\&=(x+1)\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+c.\end{aligned}$$

(2) 令 $f^{-1}(x)=\mathrm{arcsh}x$，则 $x=\mathrm{sh}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \mathrm{arcsh}x\,\mathrm{d}x &= x\,\mathrm{arcsh}x-\int \mathrm{sh}t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{arcsh}x-\mathrm{ch}t+c\\&= x\,\mathrm{arcsh}x-\sqrt{1+x^2}+c.\end{aligned}$$

例 19　计算不定积分

$$\int[\ln f(x)+\ln f'(x)][f'^2(x)+f(x)f''(x)]\mathrm{d}x.$$

解　原式$=\int \ln[f(x)f'(x)]\mathrm{d}[f(x)f'(x)]$

$$\begin{aligned}&= f(x)f'(x)\ln[f(x)f'(x)]\\&\quad-\int\frac{f(x)f'(x)}{f(x)f'(x)}\mathrm{d}[f(x)f'(x)]\\&= f(x)f'(x)[\ln[f(x)f'(x)]-1]+c.\end{aligned}$$

例 20(工科硕士研究生入学试题)　计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int\frac{\ln\sin x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int \ln\sin x\,\mathrm{d}\cot x$

$$= -\cot x \ln \sin x + \int \cot^2 x \mathrm{d}x$$

$$= -\cot x \ln \sin x + \int (\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\cot x \ln \sin x - \cot x - x + c.$$

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \arctan e^x \mathrm{d}e^{-2x}$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x - \int \frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x - \int\left(\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}}\right)\mathrm{d}e^x\right]$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + c.$$

(3) $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x\mathrm{d}(e^x - 1)}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\int x\mathrm{d}\sqrt{e^x - 1}$

$$= 2\left[x\sqrt{e^x - 1} - \int \sqrt{e^x - 1}\mathrm{d}x\right].$$

令 $u = \sqrt{e^x - 1}$，有 $\mathrm{d}x = \frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$，则

$$\int \sqrt{e^x - 1}\mathrm{d}x = \int \frac{2u}{1+u^2}\cdot u\mathrm{d}u = 2\int \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$= 2u - 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = 2u - \arctan u + c.$$

故 $$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}}\mathrm{d}x = 2x\sqrt{e^x - 1} - 4\sqrt{e^x - 1} + 4\arctan\sqrt{e^x - 1} + c.$$

(4) $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x = \int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x - \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，

其中 $$\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \arctan x \mathrm{d}\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x^2$$

$$=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+c_1.$$

故 $$\int\frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+c.$$

例 21（工学硕士研究生入学试题）

(1) 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，计算 $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 需要先求出 $f(x)$，再用分部积分法计算.

(1) 设 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，$f(t)=[\ln(1+\mathrm{e}^t)]/\mathrm{e}^t$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1+\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+c.$$

(2) 设 $u=\sin^2 x$，有 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，$f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，则

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}(1-x)=-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{1-x}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+c.$$

例 22 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 这两个题的共同点是分母为某函数 $\varphi(x)$ 的平方式，可以设法将分子化为 $\varphi(x)$ 的导数形式，然后将积分变量凑成 $\varphi(x)$，再去分母. 最后用分部积分法计算.

(1) $\varphi(x)=x-\ln x, \varphi'(x)=\frac{x-1}{x}$，于是

$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x-\ln x-(x-1)}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int \frac{(x-1)}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int \frac{x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}(x-\ln x)$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-\ln x}\right)$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}-\frac{x}{x-\ln x}-\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\ln x}=\frac{x}{x-\ln x}+c.$$

(2) $\varphi(x)=x\sin x+\cos x, \varphi'(x)=x\cos x$，于是

$$\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{\cos x}\frac{x\cos x\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\int \frac{x}{\cos x}\frac{\mathrm{d}(x\sin x+\cos x)}{(x\sin x+\cos x)^2}=-\int \frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$$

$$=-\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x\sin x+\cos x}+\int \frac{(\cos x+x\sin x)\mathrm{d}x}{(x\sin x+\cos x)\cos^2 x}$$

$$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+c.$$

例 23 用分部积分法计算下列积分：

(1) $\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(3) $\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x$； (4) $\int x^2\arcsin x\mathrm{d}x$；

(5) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{1}{x}\ln(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 事实上，在解题过程中换元积分法与分部积分法是混合

在一起使用的，使用次数和顺序都没有限制，由读者自行确定.

(1) $\int \frac{\arctan(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\arctan(1/x)}{x^2(1+1/x^2)}\mathrm{d}x$

$= -\int \frac{\arctan(1/x)}{1+(1/x)^2}\mathrm{d}\,\frac{1}{x} = -\int \arctan\frac{1}{x}\mathrm{d}\arctan\frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{2}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)^2 + c.$

(2) $\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}(-\mathrm{e}^x) = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + 2\int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$= (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{-x} + c.$

(3) $\int (2x-1)\ln x\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}(x^2 - x)$

$= (x^2 - x)\ln x - \int (x^2 - x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$= (x^2 - x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + x + c.$

(4) $\int x^2\arcsin x = \int \arcsin x\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right)$

$= \frac{x^3}{3}\arcsin x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$

$= \frac{x^3}{3}\arcsin x + \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + c.$

(5) $\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \int \sec x\mathrm{d}\tan x = \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\mathrm{d}x$

$= \sec x\tan x + \int \sec x(1 - \sec^2 x)\mathrm{d}x$

$= \sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec^3 x\mathrm{d}x,$

移项后除以 2，得

$$\int \sec^3 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + c.$$

$$(6)\int\frac{1}{x}\ln(\ln x)\mathrm{d}x=\ln x\cdot\ln(\ln x)-\int\ln x\cdot\frac{1/x}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(\ln x)\cdot\ln x-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\cdot\ln(\ln x)-\ln x+c$$

$$=\ln x[\ln(\ln x)-1]+c.$$

例 24 计算下列不定积分：

(1) $\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$.

解 此题见例 6 题(1)，是用换元积分法的“配对”法解的. 现在我们用传统的分部积分法来计算，比较哪种方法更简单.

$$(1)\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)-\int x\cos(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]-\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x$$

出现循环，移项、除以 2，可得

$$\int\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+c.$$

(2) 完全类似地，可得

$$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{x}{2}[\cos(\ln x+\sin(\ln x)]+c.$$

例 25 建立以下不定积分的递推公式：

(1) $I_n=\int x^n\cos x\mathrm{d}x$；　　(2) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$；

(3) $I_n=\int\tan^n\mathrm{d}x$；　　(4) $I_n=\int\frac{1}{\sin^n x}\mathrm{d}x$；

(5) $I_{n,m}=\int x^n(\ln x)^m\mathrm{d}x$；　　(6) $I_n=\int(\arcsin x)^n\mathrm{d}x$.

解 证明递推公式，常用分部积分法. 分部积分法又可分为降幂法与升幂法，依 $\mathrm{d}v$ 的幂次降升而命名，方式是相同的.

(1) $I_n = \int x^n \mathrm{d}\sin x = x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x \mathrm{d}x$

$= x^n \sin x + n\left[x^{n-1}\cos x - (n-1)\int x^{n-2}\cos x \mathrm{d}x\right]$

$= x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1)I_{n-1},\ n = 2,3,\cdots,$

$I_0 = \sin x + c,\qquad I_1 = x\sin x + \cos x + c.$

(2) $I_n = \frac{1}{a^2}\int \frac{(x^2+a^2)-x^2}{(x^2+a^2)^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}I_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n},$

而 $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)}\int x\mathrm{d}\,\frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

$= \frac{-1}{2(n-1)}\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - I_{n-1}\right],$

故 $I_n = \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right]I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}},$

$n = 2,3,\cdots,$

$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c.$

(3) $I_n = \int \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$

$= \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}\tan x - \int \tan^{n-2}x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - I_{n-2},\quad n = 3,4,\cdots,$

$I_1 = -\ln\cos x + c,\quad I_2 = \tan x - x + c.$

(4) $I_n = -\int \frac{\mathrm{d}\cot x}{\sin^{n-2}x} = -\frac{\cot x}{\sin^{n-2}x} - \int \frac{\cot x\cdot(n-2)\cos x}{\sin^{n-1}x}\mathrm{d}x$

$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)\int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\mathrm{d}x$

$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)I_n + (n-2)I_{n-2},$

移项即得 $\quad I_n = \frac{1}{1-n}\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}I_{n-2}.$

用下面方法同样可以得出

$$I_n=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^nx}dx=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\int\cos x d\frac{1}{\sin^{n-1}x}$$

$$=I_{n-2}-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}-\frac{1}{n-1}I_{n-2}$$

$$=\frac{\cos x}{(1-n)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2},$$

$$I_1=\ln\left|\tan+\frac{x}{2}\right|+c,\quad I_2=-\cot x+c.$$

(5) $$I_{n,m}=\int(\ln x)^m d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[x^{n+1}(\ln x)^m-m\int(\ln x)^{m-1}x^n dx\right]$$

$$=\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^m-\frac{m}{n+1}I_{n,m-1},$$

$$I_{n,0}=\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c.$$

(6) $$I_n=x(\arcsin x)^n-n\int(\arcsin x)^{n-1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\int(\arcsin x)^{n-1}d\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$-n\int(n-1)\arcsin^{n-2}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}dx$$

$$=n(\arcsin x)^n+n\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^{n-1}$$

$$-n(n-1)I_{n-2}.$$

例 26 用多种方法计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$； (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

解 同一个积分，求积的方法有很多，只要多动脑筋，定能找出一种简便的方法.

(1) **解法 1**　令 $\cot x = t, \mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{d}t}{1+t^2}$，则

$$I = -\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t-1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\ln|1+t^2| - \frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{2}\ln|1+t| + c.$$

解法 2　分子分母同乘以 $\cos x - \sin x$，得

$$I = \int \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\sin 2x}{2\cos 2x} - \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1 + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{1}{\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| - \frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + c.$$

解法 3　$$I = \int \frac{\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int\left(\frac{\sin x\cos x}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1-\cos 2x}{2\cos 2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(2\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|2\cos^2 x - 1| - \frac{1}{4}\ln|\sec 2x + \tan 2x|$$

$$+ \frac{x}{2} + c.$$

解法 4　$$I = \int \frac{\sin x - \cos x + \cos x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{-\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}$$

$$+ \int \frac{(\cos x + \sin x) - \sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + x - I,$$

移项即得.

解法 5　$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\left(令\ x - \frac{\pi}{4} = t\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\sin(t+\pi/4)}{\cos t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int\frac{\sin t+\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|\cos t|+\frac{t}{2}+c.$$

解法 6 $I=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\sin(x+\pi/4-\pi/4)\mathrm{d}x}{\sin x\cos(\pi/4)+\cos x\sin(\pi/4)}$

$$=\int\frac{\sin(x+\pi/4)-\cos(x+\pi/4)}{2\sin(x+\pi/4)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[1-\frac{\cos(x+\pi/4)}{\sin(x+\pi/4)}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln|\sin(x+\pi/4)|+c.$$

解法 7 令 $\tan\frac{x}{2}=t,\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$,则

$$I=\int\left(\frac{1+t}{1+t^2}-\frac{1-t}{1+2t-t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

解法 8 令 $\tan x=t,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$,则

$$I=\int\frac{\tan x}{\tan x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{t+1}{t^2+1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t.$$

(2) **解法 1** 令 $x=2\sin t,\mathrm{d}x=2\cos t\mathrm{d}t$,则

$$I=\int\frac{2\cos t\mathrm{d}t}{2\sin t\cdot 2\cos t}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{2}\right)\right|+c.$$

解法 2 令 $\sqrt{4-x^2}=t,\mathrm{d}x=\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\mathrm{d}t$,则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+c=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+c.$$

解法 3 令 $\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}=t,\mathrm{d}x=\frac{8t\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$,则

$$I=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}\right|+c.$$

解法 4 令 $x^2=\frac{1}{t},\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}$,则

$$I=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{4\sqrt{4-1/t}}=-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-t/4}}$$
$$=\frac{-1}{4}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-1/8)^2-(1/8)^2}}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\left(t-\frac{1}{8}\right)+\sqrt{t^2-1/4}\right|+c$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{4-x^2}}{2x^2}\right|+c.$$

解法 5 令 $\sqrt{4-x^2}=tx,2\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则

$$I=-\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)2t/\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}|+c$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+c.$$

解法 6 令 $x=\frac{1}{t}$,见例 12 题(2).

以上两个例题各有多种解法,它们的形式虽然各不相同,但可验证,其结果是同一函数的原函数.有的解法没有完整写出,请读者自行补全.

下面介绍分段函数求不定积分的例子.

例 27 计算下列不定积分:

(1) $\int|x|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int\max\{1,x^2\}\mathrm{d}x$.

解 由于被积函数为分段函数,应分段计算.再利用连续性确定任意常数与分段函数分界点的原函数.

(1) 当 $x \geqslant 0$ 时，$I = \int x e^x \mathrm{d}x = (x-1)e^x + c_1$，

当 $x < 0$ 时，$I = \int - x e^x \mathrm{d}x = (1-x)e^x + c_2$.

因为 $|x|e^x$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，其原函数在$(-\infty, +\infty)$上存在且连续，所以

$$\lim_{x \to 0^+} [(x-1)e^x + c_1] = \lim_{x \to 0^-} [(1-x)e^x + c_2],$$

即
$$-1 + c_1 = 1 + c_2 \Longrightarrow c_1 = 2 + c_2.$$

于是
$$\int |x| e^x \mathrm{d}x = \begin{cases} (x-1)e^x + 2 + c, & x \geqslant 0, \\ (1-x)e^x + c, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 当 $|x| \leqslant 1$ 时，$I = \int \mathrm{d}x = x + c_1$，

当 $x > 1$ 时，$I = \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c_2$，

当 $x < -1$ 时，$I = \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c_3$.

因为 $\max\{1, x^2\}$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续，其原函数在$(-\infty, +\infty)$上存在且连续，所以

$$\lim_{x \to -1^-} \left(-\frac{1}{3}x^2 + c_3\right) = \lim_{x \to -1^+} (x + c_1),$$

$$\lim_{x \to 1^-} (x + c_1) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{3}x^3 + c_2\right).$$

得
$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + c_3 = -1 + c_1, \\ \frac{1}{3} + c_2 = 1 + c_1, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{2}{3} + c_1, \\ c_3 = -\frac{2}{3} + c_1. \end{cases}$$

所以
$$\int \max\{1, x^2\} \mathrm{d}x = \begin{cases} x + c, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3} + c, & x < -1, \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3} + c, & x > 1. \end{cases}$$

例 28 利用化二次三项式为正则型来计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2}\ (ab \neq 0)$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-x+2}}$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1}$；　　(4) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$；

(5) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos a+1}$；

(6) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x-8\sin x\cos x+5\cos^2 x}$.

解 (1) 当 $ab>0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a\, \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2+(\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a\, \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+c;$$

当 $ab<0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \operatorname{sgn}a\int \frac{\mathrm{d}x}{|a|-|b|x^2}$$

$$= \operatorname{sgn}a\, \frac{1}{\sqrt{|b|}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{|b|}x)}{(\sqrt{|a|})^2-(\sqrt{|b|}x)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}a}{\sqrt{-ab}}\ln\left|\frac{\sqrt{|a|}+x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|}-x\sqrt{|b|}}\right|+c.$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2-x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1/4)^2+(\sqrt{15}/4)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-x/2+1}\right)+c.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x/3-1/3}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x-1/3)}{(x-1/3)^2-(2/3)^2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\ln\left|\frac{2/3+(x-1/3)}{2/3-(x-1/3)}\right|+c_1$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right| + c.$$

(4) $$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4 - 2x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{(x^2-1)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}-1)}\right| + c.$$

(5) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x\cos a + 1} = \int \frac{x - \cos a + \cos a}{(x-\cos a)^2 + \sin^2 a}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}[(x-\cos a)^2 + \sin^2 a]}{(x-\cos a)^2 + \sin^2 a}$$

$$+ \cos a\int \frac{\mathrm{d}(x-\cos a)}{(x-\cos a)^2 + \sin^2 a}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 - 2x\cos a + 1) + \cot a\arctan\left(\frac{x-\cos a}{\sin a}\right) + c,$$

$$a \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

(6) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin^2 x - 8\sin x\cos x + 5\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{3\tan^2 x - 8\tan x + 5}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x - 4/3)}{(\tan x - 4/3)^2 - (1/3)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1/3 - (\tan x - 4/3)}{1/3 + (\tan x - 4/3)}\right| + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x}\right| + c.$$

第三节　有理函数与无理函数的不定积分

主 要 内 容

1. 由两个多项式函数的商所表示的函数称为有理函数，其一般表示形式为

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m},$$

其中 n,m 为正整数，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_0,b_1,\cdots,b_m$ 为常数，$a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

可以用待定系数法或赋值法将有理真分式分解为部分分式. 有理真分式的积分可归结为两种形式的积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n}=\begin{cases}\ln|x-a|+c, & n=1,\\ \dfrac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+c, & n>1;\end{cases}$

(2) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=A\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}+B\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n},$

其中 $t=x+\dfrac{p}{2}$.

当 $n=1$ 时，有

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{t}{t^2+r^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+c,\\ \displaystyle\int\frac{1}{t^2+r^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+c.\end{cases}$$

当 $n>1$ 时，有

$$\begin{cases}\displaystyle\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)(t^2+r^2)^{n-1}}+c,\\ \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2+r^2)^n}=\frac{2n-3}{2r^2(n-1)}I_{n-1}+\frac{t}{2r^2(n-1)(t^2+r^2)^{n-1}}.\end{cases}$$

2. 关于 $\sin x,\cos x$ 的有理式的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x$ 称为三角函数有理式的不定积分.

(1) 常用代换有万能代换(半角代换). 令 $\tan\dfrac{x}{2}=t$，则

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

(2) 若等式 $R(-\sin x,\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$

或 $\qquad R(\sin x,-\cos x)\equiv -R(\sin x,\cos x)$

成立，可利用代换 $\cos x=t$ 或 $\sin x=t$ 计算积分.

(3) 若等式 $R(-\sin x,\ -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ 成立，可利用代换 $\tan x = t$ 计算积分.

但有时利用三角函数关系式和换元积分法过程可能更加简捷. 因此，在选择解题方法时，务须认真思考.

3. 无理函数的积分

(1) $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ 型积分，其中 $n > 1, ad - bc \neq 0$. 一般令 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ 即可化为 t 的有理函数的积分，利用有理函数积分法计算积分.

(2) $\int R(x,\ \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ 型积分，其中 a, b, c 满足条件：$a > 0$ 时，$b^2 - 4ac \neq 0$；$a < 0$ 时，$b^2 - 4ac > 0$. 一般令 $u = x + \frac{b}{2a}$，$k = \sqrt{|(4ac - b^2)/(4a^2)|}$，则二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 化为 $|a|(u^2 + k^2)$，$|a|(u^2 - k^2)$，$|a|(k^2 - u^2)$. 积分化为

$$\int R(u,\ \sqrt{u^2 + k^2}) du, \quad \int R(u,\ \sqrt{u^2 - k^2}) du,$$

$$\int R(u,\ \sqrt{k^2 - u^2}) du,$$

分别令 $u = k\tan t, u = k\sec t, u = k\sin t$，代换后化为三角函数有理式的积分来计算.

(3) 欧拉代换　对二次三项式 $ax^2 + bx + c$，有三种类型的欧拉代换.

第一种类型：若 $a > 0$，令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}\,x + z$；

第二种类型：若 $c > 0$，令 $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$；

第三种类型：$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = z(x - x_1)$.

4. 二项微分式 $\int x^m (a + bx^n)^p dx$，在以下三种情形可化为有理函数的积分（契比雪夫定理）：

(1) p 为整数，令 $x = z^N$，其中 N 为分数 m 和 n 的公分母；

(2) $\frac{m+1}{n}$ 为整数，令 $a + bx^n = z^N$，其中 N 为分数 p 的分母；

(3) $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数，令 $ax^{-n} + b = z^N$，其中 N 为分数 p 的分母.

还有其它一些代换，依具体情形确定.

疑 难 解 析

1. 在分解真分式为部分分式时，如何选择分解的方法？

答　分解真分式为部分分式常用待定系数法和赋值法. 一般来说，待定系数法比较麻烦，费时间，又容易出错，但适合一切形式的真分式. 如

$$R(x) = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}.$$

其中 A,B,C,D,E 为待定常数.

将上式右边通分后，得一恒等式

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$
$$= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A$$

比较同次幂系数建立方程组，解方程组得

$$A = 1,\quad B = 2,\quad C = 1,\quad D = 0,\quad E = -1,$$

于是
$$R(x) = \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{(x^2 + 1)^2}.$$

赋值法比较简单，但有一定条件限制. 当有理分式分母有实根或者分母有虚根(但是为重根)时，可用赋值法.

上例的分母有实根 $x = 0$，有二重虚根 $\pm i$，恒等式可写为

$$3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1$$
$$= A(x^2+1)^2 + x(Bx+C)(x^2+1) + x(Dx+E).$$

令 $x = 0$,得 $1 = A$;

令 $x = \mathrm{i}$,得 $-\mathrm{i} = -D + E\mathrm{i} \Rightarrow D = 0, E = -1$;

令 $x = 1$,得 $9 = 2(B+C) - 3 \Rightarrow B + C = 3$;

令 $x = -1$,得 $7 = 2(B-C) + 5 \Rightarrow B - C = 1$.

解得
$$\begin{cases} B + C = 3, \\ B - C = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2, \\ C = 1, \end{cases}$$
与待定系数法有相同结果,但运算相对简单.

2. 初等函数的原函数是否还是初等函数?

答　否.初等函数的原函数不一定是初等函数.如$\int e^{-x^2}dx$,$\int \frac{dx}{\ln x}$,$\int \frac{\sin x}{x}dx$ 等都不表示初等函数,不能用有限形式写出.

方法、技巧与典型例题分析

一、有理函数的不定积分

形如 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_m x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} + \cdots + b_0}$ 的函数称为有理函数,其中 m,n 为正整数或零,$a_i,b_j(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m)$ 为常数,且 a_m,b_m 不等于零.有理函数为真分式时,直接用待定系数法或赋值法(见疑难解析 1)分解为部分分式,然后用前面讲过的方法计算不定积分;有理函数为假分式时,要先变形为一个多项式和一个真分式之和,再进行分解与积分.有理真分式的积分可归结为两种形式的积分(见主要内容 1),读者应熟悉并记住它们的计算公式.

有理函数积分中的某些情形,采用换元积分法或分部积分法可能会更简便,这要由具体情形确定,请读者通过例题细细体会.

例 1　计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2} dx$;　(2) $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$;

(3) $\int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 3x^3 + x} dx$;　(4) $\int \frac{x^2}{(x^2 - 3x + 2)^2} dx$.

解　在分解真分式为部分分式时，能用赋值法分解的就不要用待定系数法. 为节省篇幅，我们将不写出分解过程.

(1) $\int \frac{4x^3 - 13x^2 + 3x + 8}{(x+1)(x-2)(x-1)^2} dx$（用赋值法，令 $x = -1, 2, 1, 0$）

$$= \int \left[\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{5}{x-1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx$$

$$= \ln \left| \frac{(x+1)(x-1)^5}{(x-2)^2} \right| + \frac{1}{x-1} + c.$$

(2) 被积函数为假分式，需先变形为

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x},$$

$$\frac{4x^2 - 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2}$$（赋值法，令 $x = 0, 2, -2$）.

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln|x| + 5\ln|x-2|$$

$$- 3\ln|x+2| + c.$$

(3) 因为 $\frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2}$.

先令 $x = 0 \Longrightarrow A = 1$，再用待定系数法计算，得

$$\int \frac{3x^4 + x^3 + 4x^2 + 1}{x^5 + 2x^2 + x} dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} \right] dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x^2 + 1| + \arctan x - \int \frac{x^2 + 1 - x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \ln|x(x^2+1)| + \arctan x - \left[\arctan x - \int \frac{x d(x^2+1)}{2(x^2+1)^2} \right]$$

$$= \ln|x(x^2+1)| - \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + c.$$

注意　解题过程中要结合其它方法（换元积分法、分部积分

法）一起使用.

(4) 注意(x^2-3x+2)不是二次质因式，故

$$\frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2}$$

（赋值法，令 $x=1,2,0,3$，解方程组）.

$$\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$=\int\left[\frac{4}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=4\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-4\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}+c$$
$$=\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^4-\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x-2}+c.$$

例 2 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)^2}$；

(3) $\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}$；　　(4) $\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}=\frac{-2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}$

（令 $x=2,-1,0$）.

$$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2-4}\mathrm{d}x=\int\left[-\frac{2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{1}{x-2}+c.$$

(2) $$\frac{1}{x(1+x^2)^2}=\frac{(1+x^2)-x^2}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x(1+x)^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

$$\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}-\frac{x}{(1+x^2)^2}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|1+x^2|+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}+c.$$

能以拼凑方式达到分解部分分式是一种技巧的展现，多做练

习将有助于这种技巧的掌握.

(3) $x=[(x^2+1)-(x-1)^2]/2$.

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)-(x-1)^2}{(x-1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|\int\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|1+x^2|-\frac{1}{2}\arctan x+c.$$

(4) $x^2+1=x^2-x+x+1=(x-1)x+(x+1)$.

$$\int\frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{(x-1)x+(x+1)}{(x^2-1)(x+1)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)^2}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$$

$$=\int\frac{x+1-1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+c.$$

例 3 计算下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}$; (2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^3)^2}$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$; (4) $\displaystyle\int\frac{x^3}{3+x}\mathrm{d}x$.

解 将被积函数变形后,用换元积分法或分部积分法计算.

(1) $\displaystyle\int\frac{(x^2+1)\mathrm{d}x}{x^4+2x^3+3x^2-2x+1}$

$$\xlongequal{\text{同除以 } x^2}\int\frac{(1+1/x^2)\mathrm{d}x}{x^2+2x-3-2/x+1/x^2}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2(x-1/x)+5}$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x^2+x+1}{2x}+c.$$

(2) $\int \frac{dx}{x(1+x^3)^2} = \int \frac{x^2dx}{x^3(1+x^3)^2}$ (令 $1+x^3=t$)

$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t-1)t^2} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)dt$

$= \frac{1}{3}\left(\ln|t-1| - \ln|t| - \frac{1}{t}\right) + c$

$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right| + \frac{1}{3(1+x^3)} + c.$

(3) $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + c.$

(4) $\int \frac{x^3}{3+x}dx = \int \frac{x^3+27+21}{x+3}dx$

$= \int(x^2-3x+9)dx - 27\int \frac{d(x+3)}{x+3}$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|x+3| + c.$

例 4 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx$;

(2) $\int \frac{3x^2-9}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}dx$;

(3) $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13}dx$; (4) $\int \frac{dx}{(x^2+x+8)^2}$.

解 (1) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+2)+4/3}{(x^2+2x+2)^2}dx$

$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} + 2\int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+1]^2}$

$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2}$

$$+2\left[\frac{x+1}{2(x^2+2x+2)}+\frac{1}{2}\arctan(x+1)\right]+c$$

$$=\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)}+\arctan(x+1)+c.$$

(2) $$\int\frac{(3x^2-9)\mathrm{d}x}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$=\int\frac{(3x^2-9)\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$=\int\left[\frac{1}{32(x+1)}+\frac{1}{25(x-2)}-\frac{57x-75}{800(x^2-2x+5)}\right.$$

$$\left.-\frac{9x-75}{20(x^2-2x+5)^2}\right]\mathrm{d}x,$$

其中 $$\int\frac{57x-75}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x=\int\frac{57(x-1)-18}{(x-1)^2+4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{57}{2}\ln|x^2-2x+5|-9\arctan\frac{x-1}{2}+c_1,$$

$$\int\frac{9x-75}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{9}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)^2}-66\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{[(x-1)^2+4]^2}$$

$$=-\frac{9}{2}\frac{1}{x^2-2x+5}-\frac{33}{4}\left[\frac{x-1}{x^2-2x+5}+\int\frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+4}\right]$$

$$=\frac{15-33x}{4(x^2-2x+5)}-\frac{33}{8}\arctan\frac{x-1}{2}+c_2,$$

故 $$\int\frac{(3x^2-9)\mathrm{d}x}{(x^2-x-2)(x^2-2x+5)^2}$$

$$=\frac{1}{32}\ln|x+1|+\frac{1}{25}\ln|x-2|-\frac{57}{1600}\ln|x^2-2x+5|$$

$$+\frac{33x-15}{80(x^2-2x+5)}+\frac{87}{400}\text{atctan}\,\frac{x-1}{2}+c.$$

(3) $$\int\frac{x+5}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-6)+16}{x^2-6x+13}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13}+8\int\frac{\mathrm{d}(x+3)}{(x-3)^2+2^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+13|+4\arctan\frac{x-3}{2}+c.$$

(4) $\dfrac{1}{(x^2+6x+8)^2}=\left[\dfrac{(x+4)-(x+2)}{2(x+4)(x+2)}\right]^2$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}-\frac{1}{(x+2)(x+4)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-2}\right],$$

故 $$\int\frac{dx}{(x^2+6x+8)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+4)^2}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x-2}\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x+4}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right]+c.$$

例 5 计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}$； (2) $\displaystyle\int\frac{x^7}{(1-x^2)^5}dx$；

(3) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$； (4) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}dx$.

解 利用变形和代换求解更为简便.

(1) 令 $x^4=t$，则

$$\int\frac{x^{11}dx}{x^8+3x^4+2}=\int\frac{x^8dx^4}{4(x^8+3x^4+2)}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{t^2dt}{t^2+3t+2}=\frac{1}{4}\int\left[1+\frac{1}{t+1}-\frac{4}{t+2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{4}[t+\ln|t+1|-4\ln|t+2|]+c$$

$$=\frac{1}{4}[x^4+\ln|1+x^4|-4\ln|2+x^4|]+c.$$

(2) 令 $1-x^2=t, x^2=1-t$，则

$$\int\frac{x^7dx}{(1-x^2)^5}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-t)^3}{t^5}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t^3}+\frac{3}{t^4}-\frac{1}{t^5}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(1-x^2)}+\frac{3}{2(1-x^2)^2}-\frac{1}{(1-x^2)^3}+\frac{1}{4(1-x^2)^4}\right]+c.$$

(3) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + c.$

(4) $\int \frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \int \frac{(1-1/x^2)\mathrm{d}x}{(x^2+1/x^2)+(x+1/x)+1}$

$= \int \frac{\mathrm{d}(x+1/x)}{(x+1/x)^2+(x+1/x)-1}$

$= \int \frac{\mathrm{d}(x+1/x+1/2)}{[(x+1/x)+1/2]^2-5/4}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{x+1/x+1/2-\sqrt{5}/2}{x+1/x+1/2+\sqrt{5}/2} + c$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2} + c.$

二、三角函数有理式的不定积分

三角函数有理式的不定积分也有多种不同的计算方法.一般来说,若能利用三角函数的关系式或凑微分法来计算,会相对简单一些.而用万能代换、正切代换时,计算相对麻烦一些.因此,要逐步掌握选取计算量最小的方法,尽量少用万能代换来计算.

例 6 用万能代换计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$;

(3) $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{(1+\cos x-\sin x)^4}$.

解 万能代换即半角代换,令 $\tan\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x$ $=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

(1) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = 4\int \frac{t}{(1+t)^2}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$

$= 4\int\left[-\frac{1}{2(1+t)^2}+\frac{1}{2(1+t)^2}\right]\mathrm{d}t$

$= \frac{2}{1+t} + \arctan t + c$

$$= \frac{2}{1+\tan x/2} + 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{2}{1+\tan x/2} + x + c.$$

(2) $$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1+2t/(1+t^2)+(1-t^2)/(1+t^2)}$$

$$= \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + c = \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| + c.$$

(3) $$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2\sin^2(x/2)}{2\cos^2(x/2)}dx = \int \tan^2\frac{x}{2}dx$$

$$= \int\left(\sec^2\frac{x}{2} - 1\right)dx = 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

上述解法实际上并未用万能代换. 若令 $\tan\frac{x}{2} = t$,则

$$\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx = \int \frac{2t^2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt$$

$$= 2\int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2t - 2\arctan t + c$$

$$= 2\tan\frac{x}{2} - 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c = 2\tan\frac{x}{2} - x + c.$$

(4) $$\int \frac{\sin^3 x dx}{(1+\cos x-\sin x)^4}$$

$$= \int \frac{[2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)]^3 dx}{[2\cos^2(x/2) - 2\sin(x/2)\cos(x/2)]}$$

$$= \int \frac{\tan^3(x/2)dx}{2[1-\tan(x/2)]^4\cos^2(x/2)}\left(\text{令} \tan\frac{x}{2} = t\right)$$

$$= \int \frac{t^3 dt}{(1-t)^4} = \int \frac{[(t-1)+1]^3}{(t-1)^4}dt$$

$$= \int\left[\frac{1}{t-1} + \frac{3}{(t-1)^2} + \frac{3}{(t-1)^3} + \frac{1}{(t-1)^4}\right]dt$$

$$= \ln|t-1| - \frac{3}{t-1} - \frac{3}{2(t-1)^2} - \frac{1}{3(t-1)^3} + c$$

$$= \ln\left|\tan\frac{x}{2} - 1\right| - \frac{3}{\tan(x/2)-1} - \frac{3}{2[\tan(x/2)-1]^2}$$

$$- \frac{1}{3[\tan(x/2)-1]^3} + c.$$

例 7 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}$； (2) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$；

(3) $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$； (4) $\int \frac{\tan x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

解 (1) 此题即例 6 题(2)，利用三角函数关系式，有

$$\int \frac{dx}{1+\cos x+\sin x}=\int \frac{dx}{2\sin(x/2)\cos(x/2)+2\cos^2(x/2)}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2(x/2)[1+\tan(x/2)]}=\int \frac{d\tan(x/2)}{1+\tan(x/2)}$$

$$=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+c.$$

(2) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$

$$=\int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=\int \sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+c.$$

(3) $$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}=16\int\csc^2 2x\left(-\frac{1}{2}\right)d\cot 2x$$

$$=-8\int(1+\cot^2 2x)d\cot 2x$$

$$=-\cot 2x-\frac{8}{3}(\cot 2x)^3+c.$$

(4) $$\int \frac{\tan x dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int \frac{\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}d\tan x$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2\tan^2 x+b^2)}{a^2\tan^2 x+b^2}=\frac{1}{2a^2}\ln(a^2\tan^2 x+b^2)+c.$$

例 8 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}$； (2) $\int \frac{\cos^2 x-\sin x}{\cos x(1+\cos x e^{\sin x})}dx$；

(3) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$； (4) $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

解 (1) 因为

$$(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)'=a^2 2\cos x(-\sin x)+2b^2\sin x\cos x$$
$$=(b^2-a^2)\sin 2x,$$

所以 $\displaystyle\int\frac{\sin 2x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}=\int\frac{1}{b^2-a^2}\frac{\mathrm{d}(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}+c.$$

(2) 因为

$$(\cos x\mathrm{e}^{\sin x})'=-\sin x\mathrm{e}^{\sin x}+\cos^2x\mathrm{e}^{\sin x}=\mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2x-\sin x),$$

再将分子、分母同乘以 $\mathrm{e}^{\sin x}$，得

$$\int\frac{\cos^2x-\sin x}{\cos x(1+\cos x\mathrm{e}^{\sin x})}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\cos x\mathrm{e}^{\sin x})}{\cos x\mathrm{e}^{\sin x}(1+\cos x\mathrm{e}^{\sin x})}$$
$$=\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+c$$
$$=\ln\left|\frac{\cos x\mathrm{e}^{\sin x}}{1+\cos x\mathrm{e}^{\sin x}}\right|+c.$$

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sin^3x+\cos^3x}=\int\frac{\tan x\mathrm{d}x}{(1+\tan^3x)\cos^2x}=\int\frac{\tan x\mathrm{d}\tan x}{1+\tan^3x}$

$$\xlongequal{\tan x=t}\int\frac{t}{1+t^3}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int\frac{(t+1)^2-(t^2-t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{3}\int\frac{t+1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t-\frac{1}{3}\int\frac{1}{t+1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{6}\int\frac{2t-1+3}{t^2-t+1}+\frac{3}{3}\int\frac{\mathrm{d}(t-1/2)}{(t-1/2)^2+3/4}$$
$$-\frac{1}{3}\ln|t+1|$$
$$=\frac{1}{6}\ln|t^2-t+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\ln|t+1|$$
$$=\frac{1}{6}\ln|\tan^2x-\tan x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan x-1}{\sqrt{3}}$$
$$-\frac{1}{3}\ln|\tan x+1|+c.$$

(4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\frac{1}{3}\int\left[\frac{\sin x}{2+\cos x}-\frac{2-\cos x}{\sin x}\right]\mathrm{d}x$

$$= -\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{2+\cos x} + \frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} - \frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|2+\cos x| + 2\ln|\csc x - \cot x| - \ln|\sin x|] + c.$$

例 9 计算下列不定积分：

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x}$；　　(2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\tan^2 x} = \int\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int\frac{1+\cos^2 x - 1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= x - \int\frac{\mathrm{d}\tan x}{2+\tan^2 x} = x - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c.$$

(2) $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int\frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)+1}{2\cos^2(x/2)}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$= \int\left[\tan\frac{x}{2} + \left(\tan\frac{x}{2}\right)'\right]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int\mathrm{d}\left[\mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2}\right]$$

$$= \mathrm{e}^x\tan\frac{x}{2} + c.$$

此题使用了在第二节例 4 题(3) 中的方法.

(3) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x \xlongequal{\sin x = t} \int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t^2}{1+(t^2)^2}$

$$= \frac{1}{2}\arctan t^2 + c = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + c.$$

(4) $\int\frac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x \xlongequal{\cos x = t} \int\frac{\sin x}{(\cos x)^{3/2}}\mathrm{d}x = -\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{(\cos x)^{3/2}}$

$$= 2(\cos x)^{1/2} + c = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + c.$$

本例题(3)、题(4) 选择代换 $\sin x = t, \cos x = t$ 的理由请阅读本节主要内容 2 中的(2).

例 10 计算下列不定积分：

(1) $\int\sqrt{\sin 2x}\cos x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int\sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解　(1) 令 $\sqrt{\tan x}=t$. 因为

$$\sqrt{\sin 2x}\cos x=\sqrt{2}\ \sqrt{\sin x}(\cos^3 x)^{3/2},$$

而 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}=\dfrac{1}{2}\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}(\cos x)^{3/2}}$, 所以

$$\sqrt{\sin 2x}\cos x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\ \frac{\sin x}{\cos x}\cos^4 x\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\sec^4 x}\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}=2\sqrt{2}\tan^2 x\frac{\mathrm{d}\ \sqrt{\tan x}}{(1+\tan^2 x)^2}.$$

故

$$\int\sqrt{\sin 2x}\cos x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{4t^3\mathrm{d}t}{t(1+t^4)^2}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{t}\mathrm{d}\,\frac{1}{1+t^4}=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{t(1+t^4)}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+t^4)}\right]$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{t(1+t^4)}+\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{t^2}{1+t^4}\right)\right]\mathrm{d}t,$$

而

$$\int\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int\frac{1}{2}\ \frac{(t^2+1)+(t^2-1)}{1+t^4}\mathrm{d}t\text{(见例 5(3))}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\arctan\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|\right]+c_1,$$

所以

$$\int\sqrt{\sin 2x}\cos x\mathrm{d}x=\frac{t^3}{\sqrt{2}(1+t^4)}+\frac{1}{4}\arctan\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right|+c$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{(\tan x)^{3/2}}{\sec^2 x}+\frac{1}{4}\arctan\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\mathrm{tna}x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right|+c.$$

(2) 因为

$$\sin^2 x\cos^4 x=\frac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2\cos^2 x=\frac{1}{8}\sin^2 2x(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{1}{16}(1-\cos 4x)+\frac{1}{8}\sin^2 2x\cos 2x,$$

所以

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$$

例 11 建立递推公式 $I_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^m x}$ $(m > 2, \in \mathbf{Z}^+)$

解 $I_m = -\int \frac{1}{(\sin x)^{m-2}}\mathrm{d}\cot x$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\int \cot x \frac{\cos x}{(\sin x)^{m-1}}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\int \frac{1-\sin^2 x}{(\sin x)^n}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)\left[\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x)^m} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x)^{m-2}}\right]$$

$$= -\frac{\cot x}{(\sin x)^{m-2}} - (m-2)I_m + (m-2)I_{m-2},$$

则 $$I_m = -\frac{\cos x}{(m-1)(\sin x)^{m-1}} + \frac{m-2}{m-1}I_{m-2} \quad (m > 2).$$

三、无理函数的不定积分

一般无理函数的根式代换，读者可参看第二节例 9、例 14. 事实上，三角代换、双曲代换也是对无理函数的不定积分的代换形式. 下面再请读者观察、分析一些问题.

例 12 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$； (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^{14}-x^2}}$；

(3) $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解 (1) 将被积函数变形后进行代换

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$$

$$= \operatorname{sgn}x\int \frac{(1-1/x^2)\mathrm{d}x}{(x+1/x)\sqrt{(x+1/x)^2-1}}$$

$$= \operatorname{sgn}x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \operatorname{sgn}x \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1-(1/t)^2}} \operatorname{sgn}t$$

$$= \int \frac{-d(1/t)}{\sqrt{1-(1/t)^2}} = -\arcsin\frac{1}{t} + c = -\arcsin\frac{x}{1+x^2} + c.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^{14}-x^2}} = \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^{-12}}} = \frac{-1}{6}\int \frac{d(x^{-6})}{\sqrt{1-(x^{-6})^2}}$

$$= -\frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{1}{x^6}\right) + c.$$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}dx = \int \frac{x^{1/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx^{3/2}}{\sqrt{1-x^{3/2}}}$

$$= -\frac{4}{3}\sqrt{1-x^{3/2}} + c = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + c.$$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} + \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+2)}}.$

而 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + c_1,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{(x^2+1)+1}}$$

$$\xlongequal{x=\sqrt{2}\tan t} \int \frac{\sqrt{2}\sec^2 t dt}{(2\tan^2 t+1)\sqrt{2\tan^2 t+2}} = \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t+\cos^2 t}dt$$

$$= \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t} = \arctan(\sin t) + c_1$$

$$= \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c_2,$$

故 $$I = \ln|x+\sqrt{x^2+2}| + \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + c.$$

例 13 计算下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}$； (2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$； (4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

解　(1) 观察被积函数，提出分母公因式，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \int \frac{\mathrm{d}(1+x^2)/2}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{1+x^2}=t} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t^2}{t\sqrt{1+t}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}} = 2\int \mathrm{d}\sqrt{1+t}$$

$$= 2\sqrt{1+t} + c = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + c.$$

(2) 先用分部积分法，再用倒代换，得

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x = x \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} - \int x \cdot \frac{9\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-9}}$$

$$= \sqrt{x^2-9} - \int \frac{9\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-9}} = \sqrt{x^2-9} + 3\int \frac{\mathrm{d}2t}{\sqrt{1-(3t)^2}}$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\arcsin 3t + c.$$

$$= \sqrt{x^2-9} + 3\left(\frac{\pi}{2} - \arccos 3t\right) + c$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3\arccos\frac{3}{x} + c.$$

(3) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}}$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x}/2)}{\sqrt{1-(\sqrt{x}/2)^2}} = 2\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + c.$$

(4) 令 $x = \frac{1}{t}$，$\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{|t|}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t.$$

当 $x>0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = -\sqrt{1-t^2} + c$$

$$= -\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2} + c,$$

当 $x<0$ 时，有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2}+c$$

$$= \frac{1}{|x|}\sqrt{1+t^2}+c = -\frac{1}{x}\sqrt{1+t^2}+c.$$

所以
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{x}\sqrt{1+t^2}+c.$$

例 14 用欧拉代换计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2+2x-8}}$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$; (4) $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 用第一类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+2x+5}=x-z$,则

$$x=\frac{z^2-5}{2(z+1)},\quad \mathrm{d}x=\frac{z^2+2z+5}{2(z+1)^2}\mathrm{d}z.$$

于是

$$\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x+5}} = -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2-5)^2}{(z+1)^3}\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{4}\int\left[\frac{16}{(z+1)^3}+\frac{16}{(z+1)^2}-\frac{4}{z+1}-4+(z+1)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{(z+1)^2}+\frac{4}{z+1}+\ln|z+1|-\frac{z^2}{8}+\frac{3}{4}z+c$$

$$= \frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+5}+\ln|x+1-\sqrt{x^2+2x+5}|+c.$$

(2) 用第三类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+2x-8}=z(x+4)$,则

$$x=\frac{4z^2+2}{1-z^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{12z}{(1-z^2)^2}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x^2+2x-8}} = \int \frac{z+1}{2(1-2z)}\cdot\frac{12z}{(1-z^2)^2}\mathrm{d}z$$

$$= \int \frac{6z\mathrm{d}z}{(1-2z)(z+1)(z-1)^2}$$

$$= \int\left[\frac{9}{2(z-1)}-\frac{1}{2(z+1)}-\frac{8}{2z-1}-\frac{3}{(z-1)^2}\right]\mathrm{d}z$$

$$= \frac{9}{2}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z+1| - 4\ln|z-1| + \frac{3}{z-1} + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1-\sqrt{x^2+2x-8}|$$

$$+ 4\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2x-8}-x+8}{x-4}\right|$$

$$- \frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x-8}+x| + c.$$

(3) 用第二类型欧拉代换. 令 $\sqrt{1-2x-x^2} = xz-1$,则

$$x = \frac{2(z-1)}{z^2+1}, \quad dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2}dz,$$

于是

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \int \frac{1+2z-z^2}{z(z-1)(z^2+1)}dz$$

$$= \int\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2+1}\right]dz = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right| - \arctan z + c$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}-x}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\right|$$

$$- 2\arctan(1+\sqrt{1-2x-x^2}) + c.$$

(4) 用第三类型欧拉代换. 令 $\sqrt{x^2+3x+2} = z(x+1)$,则

$$x = \frac{2-z^2}{z^2-1}, \quad dx = -\frac{2z}{(z^2-1)^2}dz,$$

于是

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{2z(2-z-z^2)}{(z^2-z-2)(z^2-1)^2}dz$$

$$= \int\left[\frac{-17}{108(z-1)} + \frac{5}{18(z+1)^2} + \frac{1}{3(z+1)^3} + \frac{3}{4(z-1)}\right.$$

$$\left. - \frac{16}{27(z-2)}\right]dz$$

$$= -\frac{17}{108}\ln|z+1| - \frac{5}{18}\frac{1}{(z+1)} - \frac{1}{6}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{3}{4}\ln|z-1|$$

$$- \frac{16}{27}\ln|z-2| + c \left(z = \frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+3x+2}\right).$$

例 15 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$；(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$.

解 (1) 分子分母同乘以 $-\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$=\int \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+c.$$

(2) 设 $x>0$，令 $\frac{1}{x}=\sqrt{t}$（若设 $x<0$，则令 $\frac{1}{x}=-\sqrt{t}$，结果相同），得

$$x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t\sqrt{t}},\qquad \sqrt{x^4+2x^2-1}=\frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t},$$

于是 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2t-t^2}}$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right)+c\ \left(|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}\right).$$

二项微分式 $\int x^m(a+bx^n)^p\mathrm{d}x$（$m,n,p$ 为有理数）在下列三种情形可化为有理函数的积分（契比雪夫定理）：

(1) $p\in \mathbf{Z}$. 设 $x=z^N$，N 为分数 m 和 n 的公分母.

(2) $\frac{m+1}{n}\in \mathbf{Z}$. 设 $a+bx^n=z^N$，N 为分数 p 的分母.

(3) $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)\in \mathbf{Z}$. 利用代换 $ax^{-n}+b=z^N$，N 为分数 p 的分母.

例 16 计算下列不定积分：

(1) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x1+\sqrt[3]{x^2}}}$；　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$；

(3) $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\frac{x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=x(1+x^{2/3})^{-1}$，$m=1$，$m=\frac{2}{3}$，$p=-\frac{1}{2}$，$\frac{m+1}{n}=3$，是二项微分式的情形(2). 可令 $1+x^{2/3}=z^2$，则有 $x=(z^2-1)^{3/2}$，$\mathrm{d}x=3z(z^2-1)^{1/2}\mathrm{d}z$，得

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}=2\int(z^2-1)^2\mathrm{d}z=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+c$$

$$=\frac{3}{5}\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^5-2\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}\right)^3+3\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}+c.$$

(2) $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}=x^0(1+x^4)^{-1/4}$，$m=0$，$n=4$，$p=-\frac{1}{4}$，$\frac{m+1}{n}+p=0$，是二项微分式的情形(3). 可令 $x^{-4}+1=z^4$，则有 $z=\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x^4}$ $(z>0,x>0)$，$x=(z^4-1)^{-1/4}$，$\mathrm{d}x=-z^3$，$(z^4-1)^{-5/4}\mathrm{d}z$，得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int \frac{z^2}{z^4-1}\mathrm{d}z$$

$$=\int\left[\frac{1}{4(z+1)}-\frac{1}{4(z-1)}-\frac{1}{2(z^2+1)}\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\arctan z+c.$$

将 $z=\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x^4}$ 代入即得结果.

(3) $\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}=x^{1/2}(1+x^{1/3})^{-2}$，$m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{3}$，$p=-2$，$p$ 为整数，是二项微分式的情形(1). 可令 $x=z^6$，则有 $\mathrm{d}x=$

$6z^5 dz$, $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$,得

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2} = 6\int \frac{z^3}{(z^2+1)^2}dz$$

$$= 6\int\left[z^4 - 2z^2 + 3 + \frac{1}{(z^2-1)} - \frac{1}{z^2+1}\right]dz$$

$$= \frac{6}{5}z^5 - 4z^3 + 18z - 24\arctan z + \frac{3z}{z^2+1} + 3\arctan z + c$$

$$= \frac{6}{5}x^{5/6} - 4x^{1/2} + 18x^{1/6} - 24\arctan(x^{1/6}) + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + c.$$

计算$\int \frac{dz}{(z^2-1)^2}$时,要用到积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}\ (a \neq 0)$$

的递推公式.

由于$4a(ax^2+bx+c) = (2ax+b)^2 + 4ac - b^2$,

即 $$b^2 - 4ac = (2ax+b)^2 - 4a(ax^2+bx+c),$$

故 $$I_n = \frac{1}{b^2-4ac}\left[\int \frac{(2ax+b)^2 dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \int \frac{4a\,dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]$$

$$= \frac{1}{b^2-4ac}\left[(2ax+b)\cdot\frac{-1}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a}{n-1}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}\right]$$

$$- \frac{4a}{b^2-4ac}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$= \frac{2ax+b}{(n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{2(2n-3)a}{(n-1)(b^2-4ac)}I_{n-2}.$$

第六章　定积分及其应用

第一节　定积分概念与可积条件

主要内容

1. 分割　在闭区间$[a,b]$内任取$n-1$个点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_m=b,$$

把$[a,b]$分为n个小的闭区间$[x_{i-1},x_i]$,小区间长度

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\ i=1,2,\cdots,n.$$

称这些分点或这些闭子区间构成对区间$[a,b]$的一个分割,用记号T表示.

$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)$称为分割$T$的细度.

在分割T的各个小区间上各任取一点

$$\xi_i\in[x_i,x_{i-1}]\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

对定义在$[a,b]$上的函数f和$[a,b]$上的一个分割T,作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

和式称为f在$[a,b]$上属于分割T的一个积分和,又称为黎曼和,记作$\sum(T)$.

2. 定积分定义　设f是定义在$[a,b]$上的一个有界函数,I是一个确定的常数.若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得对于$[a,b]$上的任何分割$T$,只要它的细度$\|T\|<\delta$,就有分割$T$的所有积分和$\sum(T)$都满足

$$\left|\sum(T) - I\right| < \varepsilon,$$

则称函数 f 在区间$[a,b]$上黎曼可积. 数 I 称为 f 在$[a,b]$上的定积分(黎曼积分),记作

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

a 和 b 称为定积分的下限和上限.

3. 可积的必要条件　若函数 f 在$[a,b]$上可积,则 f 在$[a,b]$上有界.

4. 达布和　设函数 f 在$[a,b]$上有界,设

$$M = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}, \qquad m = \inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

对$[a,b]$上的任一分割 T, $\Delta_i = [x_i, x_{i-1}]$, $i = 1,2,\cdots,n$, 有

$$M_i = \sup_{x\in\Delta_i}\{f(x)\}, \qquad m_i = \inf_{x\in\Delta_i}\{f(x)\},$$

则称和数 $\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ 和 $\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ 分别为函数 f 关于分割 T 的达布上和与达布下和,统称为达布和. 即

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i, \quad s(T) = \sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

5. 达布和的性质

(1) 对同一分割 T, $S(T)$ 是所有积分和 $\sum(T)$ 的上确界, $s(T)$ 是所有积分和 $\sum(T)$ 的下确界. 即

$$s(T) = \inf_{\xi_i}\left\{\sum(T)\right\}, \quad S(T) = \sup_{\xi_i}\left\{\sum(T)\right\},$$

且　$m(b-a) \leqslant s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(T) \leqslant M(b-a).$

(2) 对分割 T 添加新的分点(称分点加密)后的分割 T',上和不增,下和不减. 即

$$s(T) \leqslant s(T') \leqslant s(T) + p(M-m)\,\|T\|,$$

$$S(T) \geqslant S'(T') \geqslant S(T) - p(M-m)\,\|T\|.$$

(3) 对任意两个分割 T' 与 T'' 叠加而成的分割 $T = T' + T''$(重复的分点只取一次),有

$$s(T) \geqslant s(T'), \quad s(T) \geqslant s(T'');$$
$$S(T) \leqslant S(T'), \quad S(T) \leqslant S(T'').$$

(4) 对任意两个分割 T 与 T',恒有

$$s(T) < S(T').$$

并记 $s = \sup\limits_{T}\{s(T)\}$,$S = \inf\limits_{T}\{S(T)\}$,称 s 为 f 在$[a,b]$上的下积分,S 为 f 在$[a,b]$上的上积分.

(5) $m(b-a) \leqslant s \leqslant S \leqslant M(b-a)$.

6. 达布定理　对任意有界函数 f,有

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T) = S, \quad \lim_{\|T\|\to 0} s(T) = s.$$

7. 黎曼可积的充分必要条件

(1) 可积的第一充要条件　定义在$[a,b]$上的有界函数 f 可积的充要条件是:$s = S$.

(2) 可积的第二充要条件　定义在$[a,b]$上的有界函数 f 可积的充要条件是:$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists$ 某一分割 T,使得

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

(3) 第二充要条件的另一形式　定义在$[a,b]$上的有界函数 f 可积的充要条件是:$\exists\ \varepsilon > 0$,$\exists$ 某一分割 T,使得

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 f 在 Δ_j 上的振幅.

8. 可积函数类

(1) 若 f 为闭区间$[a,b]$上的连续函数,则 f 在$[a,b]$上可积.

(2) 若 f 是闭区间$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数,则 f 在$[a,b]$上可积.

(3) 若 f 是闭区间$[a,b]$上的单调函数,则 f 在$[a,b]$上可积.

疑难解析

1. 怎样理解定积分定义与它的几何意义?

答　定积分定义强调了分割的任意性和对于所有积分和 $\sum(T)$ 都满足 $\left|\sum(T) - I\right| < \varepsilon$,使积分和的极限比一般的极限要求更高,因为不仅分割是任意的,而且在一种确定分割下,ξ_i 的取法也是任意的.

定积分只与被积函数和积分区间有关,而与积分变量无关.但在同一问题中,不可随意更改积分变量符号.

极限记号下 $\|T\| \to 0$ 表示分割越来越细的极限过程,但不能用 $n \to \infty$ 代替.因为 $n \to \infty$ 不能保证 $\|T\| \to 0$.

当 $f(x) \geqslant 0$ 时,定积分的几何意义是以 $y = f(x)$ 为曲边,直线 $x = a, x = b$ 和 x 轴为边的曲边梯形面积;当 $f(x) \leqslant 0$,则定积分的几何意义是曲边梯形面积的负值.一般情况下,定积分的几何意义是 x 轴上方面积与下方面积负值的代数和.

2. 引入达布上和与达布下和有什么意义?

答　积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 在函数 f 和区间 $[a,b]$ 确定的情况下仍然有很多的变化,因为分割 T 是任意的,ξ_i 的选取是任意的.

而达布上和 $S(T)$ 与达布下和 $s(T)$ 只与分割 T 有关,与 ξ_i 的取法无关,使得存在

$$s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(T),$$

因而可以利用迫敛性(夹逼准则)来讨论积分和的极限.即若

$$\lim_{\|T\| \to 0} S(T) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} s(T) = I,$$

则

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

3. 有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的上、下积分与 f 在 $[a,b]$ 上的

定积分存在什么关系？

答　通常称 $s=\sup\limits_{T}\{s(T)\}$ 和 $S=\inf\limits_{T}\{S(T)\}$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的上积分与上积分. 即

$$s=\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\sup_{T}\{s(T)\},\quad S=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\inf_{T}\{S(T)\}.$$

如同序列的上、下极限与序列的极限间关系一样，我们有

$$f\ \text{在}[a,b]\text{上可积} \Longleftrightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x.$$

用上、下积分定义定积分有助于：

(1) 回避对积分和与积分和极限的讨论，易直接讨论分割 T 的上、下确界.

(2) 在证明定积分性质和函数可积性时，过程可以更为简捷.

(3) 上、下积分具有“外测度”与“内测度”的思想，有利于与后续课程（如《实变函数》）的衔接.

方法、技巧与典型例题分析

一、定积分的概念

例 1　将区间 $[a,b]$ n 等分，并取 ξ_i 为小区间的中点，求下列函数 $f(x)$ 在给定区间上的积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$：

(1) $f(x)=1+x,[-1,4]$；　　(2) $f(x)=x^2,[0,4]$.

解　(1) $\Delta x_i=\dfrac{5}{n},\xi_i=-1+\left(i-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{5}{n}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i&=\sum_{i=1}^{n}\left\{1+\left[-1+\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{5}{n}\right]\right\}\frac{5}{n}\\&=\frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{1}{2}\right)=12\,\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) $\Delta x_i=\dfrac{4}{n},\xi_i=\dfrac{4(i-1)}{n}+\dfrac{2}{n}$，则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4(i-1)}{n}+\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{4^2}{n^3}(2i-1)^2$$
$$= \frac{4^2}{n^3}\,\frac{n}{3}(4n^2-1) = \frac{16}{3}\,\frac{4n^2-1}{n^2}.$$

例 2 将区间$[a,b]n$ 等分,求下列函数在指定区间上达布下和与达布上和:

(1) $f(x)=x^3,[-2,3]$; (2) $f(x)=\sqrt{x},[0,1]$;

(3) $f(x)=2^x,[0,10]$.

解 (1) 因为$\Delta x_i=\frac{5}{n}$,$f(x)$ 在$[-2,3]$上严格单调增加,所以

$$m_i=\left[-2+(i-1)\frac{5}{n}\right]^3,\quad M_i=\left[-2+i\frac{5}{n}\right]^3.$$

则
$$s=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left[-2+(i-1)\frac{5}{n}\right]^3\cdot\frac{5}{n}$$
$$=\frac{65}{4}-\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2},$$
$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\left[-2+i\frac{5}{n}\right]^3\cdot\frac{5}{n}$$
$$=\frac{65}{4}+\frac{175}{2n}+\frac{125}{4n^2}.$$

(2) 因为$\Delta x_i=\frac{1}{n}$,$f(x)$ 在$[0,1]$上严格单调增加,所以

$$m_i=\sqrt{\frac{i-1}{n}},\quad M_i=\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

则
$$s=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}},$$
$$S=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}.$$

(3) 因为$\Delta x_i=\frac{10}{n}$,$f(x)$ 在$[0,10]$上严格单调增加,所以

$$m_i=2^{10(i-1)/n},\quad M=2^{10i/n}.$$

则 $$s=\sum_{i=1}^{n}2^{10(i-1)/n}\cdot\frac{1}{n}=10230/[n(2^{10/n}-1)],$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}2^{10i/n}\cdot\frac{10}{n}=10230\cdot 2^{10/n}/[n(2^{10/n}-1)].$$

例 3 用定积分定义计算下列积分：

(1) $\int_0^1 a^x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^x \cos t\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ $(0<a<b)$.

解 设将区间 n 等分，并取 ξ_i 为 Δ_i 右端点.

(1) $$\int_0^1 a^x\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}a^{\xi_i}\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}a^{i/n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\frac{a-1}{a^{1/n}-1}=(a-1)\Big/\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}\right)=\frac{a-1}{\ln a}.$$

(2) $\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{2n}$，而

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\left(\sin\frac{nx}{2}\cdot\sin\frac{n+1}{2}x\right)\Big/\sin\frac{x}{2},$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{n+1}{4n}\pi)/\right)\Big/\sin\frac{\pi}{4n}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\sin\frac{(n+1)}{4n}\pi\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\Big/\sin\frac{\pi}{4n}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 2=1.$$

(3) $$\int_0^x\cos t\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\cos\frac{ix}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{(n-1)}{2n}x\right)\Big/\sin\frac{x}{2n}$$

$$=\sin\frac{x}{2}\lim_{n\to\infty}\cos\frac{n-1}{2n}x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\Big/\sin\frac{x}{2n}$$

$$=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot 2=\sin x.$$

(4) $\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 的解法稍有不同. 对 $[a,b]n$ 等分，$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$，令

$$\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}} \quad (i = 0,1,\cdots,n-1),$$

则
$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{x_i x_{i+1}}(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

即
$$\int_a^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

例 4 证明:若 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界,则函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上不可积.

证 用反证法. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,则 $\exists\, I \in \mathbf{R}$,对 $\varepsilon = 1 > 0$,$\exists\, \delta > 0$,且 $\forall\, T$,只要 $\|T\| < \delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < 1 \quad 或 \quad \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < |I| + 1.$$

由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界,则对某一分割 T_0,$f(x)$ 必在某$[x_{i-1},x_i]$上无界,即 $|f(\xi_i)| > M$. 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\left[f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right] = \infty$$

(为简单计,不妨设 $|f(\xi_1)| > M$),

而 $f(x)$ 可积时,积分和的极限为常数. 推出矛盾.

故,若 $f(x)$ 在$[a,b]$上无界,$f(x)$ 在$[a,b]$上一定不可积.

例 5 设 $f(x)$,$F(x)$ 在$[a,b]$上连续,且当 $a < x < b$ 时,$F'(x) = f(x)$. 用定义证明:$f(x)$ 在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证 由题意,要证 $\forall\, \varepsilon > 0$,成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b) - F(a))\right| < \varepsilon.$$

$\forall$ 分割 T,$F(b) - F(a)$ 可写为

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_i - 1)] \quad (拉格朗日中值定理)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(\eta_i)\Delta x_i,$$

则
$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - (F(b) - F(a)) \right|$$
$$= \left| \sum_{i=1}^{n} [(f(\xi_i) - f(\eta_i))]\Delta x_i \right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \quad (\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]).$$

$f(x)$ 在$[a,b]$上连续，必一致连续. 故$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，当$\xi_i$，$\eta_i \in [a,b]$，且$|\xi_i - \eta_i| < \delta$时，有$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$，故只要$\|T\| < \delta$，就有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i = \varepsilon.$$

所以，命题成立.

二、函数的可积性

这部分问题理论性较强，叙述也要求十分严密，但讨论的方式是可以多样的. 应注意选择适当的方法，使问题简洁明了. 一般证明函数$f(x)$在$[a,b]$上的可积性时，常用：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$，使$\forall\ T$，只要$\|T\| < \delta$，就有$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 这里，$\omega_i = M_i - m_i$（也可以用别的形式）. 而证明$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$常从两个方面着手：

(1) 证明在任一Δ_i上，ω_i一致地小于ε；

(2) 证明所有小区间长Δx_i一致地小于ε.

也可将$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i$分成两部分，以上两种情形各占一部分（如例 10）.

例 6　设f在$[a,b]$上连续，试说明任意改变f在有限个点上的值不影响它的可积性和积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的值.

解　设f改变有限个点上的值后的函数为f^*，则f^*在$[a,b]$

上有有限个第一类可去间断点，所以 f^* 在 $[a,b]$ 上可积. 又在一点处函数的积分为零，由于间断点个数有限，从而积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的值不变.

例 7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，但有无限多个不连续点，f 是否可积?

解 可能可积. 例如

$$f(x)=\begin{cases}1/2^{n-1}, & x\in(1/2^n,1/2^{n-1}), \quad n\in\mathbf{N},\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上严格递增且有界，是可积的. 但在 $[0,1]$ 上有无限个不连续点：$\{1/2^n\}$，$n=1,2,\cdots$.

又如 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\sin(\pi/x)), & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 也在 $[0,1]$ 上可积，但有无穷多个不连续点：$\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$，$n=1,2,\cdots$.

例 8 若函数 $f(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 都可积，它们的复合函数 $f[\varphi(x)]$ 是否可积?

解 不一定可积. 例如函数

$$f(y)=\begin{cases}0, & y=0,\\ 1, & y\neq 0\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积. 黎曼函数

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x=0,\\ 1/n, & x=\dfrac{m}{n},\end{cases}\quad m\text{ 与 }n\text{ 是互质整数}$$

在 $[0,1]$ 上也可积. 但它们的复合函数

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\text{ 是无理数},\\ 1, & x\text{ 是有理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上都不可积.

例 9 讨论在区间 $[0,1]$ 上的狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

的可积性.

解 由无理数与有理数在实数域上的稠密性知，不论用何种分割 T，在 Δ_i 中总是既有有理数又有无理数. 因此，当所有 ξ_i 均为无理数时，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}0\cdot\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=0,$$

而当所有 ξ_i 均为有理数时，有

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to 0}1\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i)\Delta x_i=1,$$

由于两个极限分别存在但不相等，故狄利克雷函数不可积.

例 10 证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}1/q, & x=p/q \text{ 为既约分数},\\ 0, & x \text{ 为 } 0,1 \text{ 及无理数}\end{cases}$$

在[0,1]上可积.

证 用第二充要条件证. $\forall\,\varepsilon>0$，取充分大的 q，使 $\dfrac{1}{q}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 则在[0,1]内使 $R(x)=\dfrac{1}{q}\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ 的点只有有限个，设为 $0\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_k\leqslant 1$.

对[0,1]作分割 T，使细度 $\|T\|<\dfrac{\varepsilon}{2k}$. 将 T 的小区间分为两类，其中 $\{\Delta_{i'}\}$ 为含有 $\{r_i\}$ 中点的小区间，$\{\Delta_{i''}\}$ 为不含 $\{r_i\}$ 中点的小区间，则在 $\Delta_{i'}$（至多 $m\leqslant 2k$ 个）上 $f(x)$ 的振幅 $\omega_{i'}$ 满足

$$\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\omega_{i'}\leqslant\frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'}\leqslant\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i'}\Delta x_{i'}<\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2k}=\dfrac{\varepsilon}{2}$. 在 $\Delta_{i''}$ 上 $f(x)$ 的振幅 $\omega_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$，而 $\sum\limits_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum\limits_{i''}\Delta x_{i''}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$. 所以

$$\sum_{i}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''} < \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在$[0,1]$上黎曼可积，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$.

例 11 证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上黎曼可积，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有无穷多个连续点.

证 由$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，则$\forall\ [\alpha,\beta]\subset[a,b]$，$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上也黎曼可积. 于是$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ [a_1,b_1]\subset[a,b]$，$b_1-a_1<\dfrac{b-a}{2}$，使$f(x)$在$[a_1,b_1]$上的振幅$\omega_1<\varepsilon$（否则，可推出$f(x)$在$[a,b]$上不可积）. 而$\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}$，$\exists\ [a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，$_2-a_2<\dfrac{b-a}{2^2}$，使$f(x)$在$[a_2,b_2]$上的振幅$\omega_2<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 如此等等，可得一闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，构成一个闭区间套. 于是，由闭区间套定理知，有$\xi_i\in[a_i,b_i]$ $(i=1,2,\cdots)$，ξ_i是$[a_i,b_i]$内点，所以$f(x)$在ξ_i连续，从而$f(x)$有无穷多个连续点. 即在(a,b)内任何子区间上，都有$f(x)$的连续点.

例 12 证明：若$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$，则$\exists$ 区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，在$[\alpha,\beta]$上$f(x)>0$.

证 用反证法. 若对任何$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，都有$\xi\in[\alpha,\beta]$，使$f(\xi)\leqslant 0$，则对$[a,b]$的任一分割$T$，在每个$\Delta_i$上都可找到$\xi_i$，使$f(\xi_i)\leqslant 0$，从而

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i \leqslant 0.$$

这与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$矛盾.

例 13 证明：若$f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，则$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0\Longleftrightarrow$ 对$f(x)$在$[a,b]$上的一切连续点，有$f(x)=0$.

证 **必要性** 用反证法. 设$f(x)$在某点x_0连续，且$f(x_0)\neq 0$，则存在$\delta>0$，有$[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$（若$x_0$为端点，可考虑

左或右邻域)，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|$. 于是

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\mathrm{d}x > \delta f^2(x_0) > 0.$$

从而与题设矛盾.

充分性 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则由例 11 知，在 (a,b) 内任一闭子区间上，都有 $f(x)$ 的连续点. 对 $[a,b]$ 上的任一分割 T，均可选到 $\xi_i \in \Delta_i$，使 $f(\xi_i)=0$. 于是 $\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0$，即

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f^2(\xi_i)\Delta x_i = 0.$$

同样可得，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，且 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow f(x)\equiv 0,\quad x\in[a,b] \quad (x \text{ 为连续点}).$$

例 14 证明：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件(可积的第三充要条件)是：$\forall\,\varepsilon>0$ 与 $\eta>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\,T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，振幅 $\omega_{i'}\geqslant\eta$ 的小区间 $\Delta_{i'}$ 的总长 $\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon$.

证 **必要性** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\forall\,\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\,T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon\eta$. 设 $\omega_i'\geqslant\eta$，则有

$$\eta\sum_{i'}\Delta x_{i'} \leqslant \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon\eta.$$

所以

$$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon.$$

充分性 以 ω 记 f 在 $[a,b]$ 上的振幅.

当 $\omega_i\geqslant\eta$ 时，表示 $\omega_i=\omega_{i'}$ 对应小区间的长度是 $\Delta x_{i'}$，

当 $\omega_i<\eta$ 时，表示 $\omega_i=\omega_{i''}$，对应小区间的长是 $\Delta x_{i''}$，

则 $\forall\,\varepsilon>0$ 与 $\eta>0$(令 $\eta\leqslant\varepsilon$)，$\exists\,\delta>0$，$\forall\,T$，当 $\|T\|<\delta$ 时，有 $\omega_{i'}\geqslant\eta$，$\sum_{i'}\Delta x_{i'}<\varepsilon$. 有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} + \sum_{i''}\omega_{i''}\Delta x_{i''}$$
$$< \omega\sum_{i'}\omega_{i'}\Delta x_{i'} + \eta\sum_{i}\omega_{i''}\Delta x_{i''}$$
$$< \omega\varepsilon + \eta(b-a) \leqslant (\omega + b - a)\varepsilon.$$

所以,$f(x)$ 在$[a,b]$上可积.

例 15 设$f(x)$在$[A,B]$上连续,$\varphi(x)$在$[a,b]$上可积,且当 $x \in [a,b]$时,$A \leqslant \varphi(x) \leqslant B$,证明:复合函数 $f[\varphi(x)]$ 可积.

证 因为$f(x)$在$[A,B]$上连续,则由康托尔定理知$f(x)$在$[a,b]$内一致连续. 即$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ \delta > 0$,对$[A,B]$内任意两点x'和x'',只要 $|x' - x''| < \delta$,必有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

又$\varphi(x)$在$[a,b]$上可积,则对任一分割T,只要 $\|T\| < \eta$,就有$\sum\limits_{i}\omega_i(\varphi)\Delta x_i < \delta\varepsilon$.

把$\sum\limits_{i}\omega_i(\varphi)\Delta x_i$分为两部分. 一部分为 $\omega_i(\varphi) \geqslant \delta$ 的各项组成的,记作$\sum\limits_{i}{}'\omega_i(\varphi)\Delta x_i$;另一部分为 $\omega_i(\varphi) < \delta$ 的各项组成的,记作$\sum\limits_{i}{}''\omega_i(\varphi)\Delta x_i$. 显然,$\delta\sum\limits_{i}{}'\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i}{}'\omega_i(\varphi)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i}\omega_i(\varphi)\Delta x_i < \delta\varepsilon$,故$\sum\limits_{i}{}'\Delta x_i < \varepsilon$.

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,所以$f(x)$有界,即 $|f(x)| \leqslant M$. 故当$\omega_i(\varphi) \geqslant \delta$时,$\omega_i(f(\varphi)) \leqslant 2M$;当$\omega_i(\varphi) < \delta$时,$\omega_i(f(\varphi)) \leqslant \varepsilon$. 于是

$$\sum\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i = \sum_{i}{}'\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i + \sum_{i}{}''\omega_i(f(\varphi))\Delta x_i$$
$$= 2M\sum_{i}{}'\Delta x_i + \varepsilon\sum_{i}{}''\Delta x_i$$
$$< 2M\varepsilon + \varepsilon(b-a) = (2M + b - a)\varepsilon,$$

即 $f[\varphi(x)]$ 在$[a,b]$上可积.

例 16 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x = 0\ (n = 0,$

$1,\cdots,n-1$)，证明：$f(x)\equiv 0$ 或在(a,b) 内至少 n 次改变符号.

证 若 $f(x)\equiv 0$，则$\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}=0$ 是显然的. 若 $f(x)\equiv 0$，用反证法证明：$f(x)$ 在(a,b) 内至少 n 次变号.

因为，若 $f(x)$ 在(a,b) 内至多$n-1$ 次变号，则必存在 k 个分点$\{x_k\}(1\leqslant k\leqslant n-1)$，使 $f(x)$ 在每个区间(a,x_1)，(x_1,x_2)，$\cdots$，(x_{k-1},x_k)，(x_k,b) 内不恒为零且不变号，但在相邻两区间上不同号，从而

$$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$$

在(a,b) 内符号一致. 从而，由题设知

$$\int_a^b f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\mathrm{d}x=0.$$

根据保号性定理，$f(x)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)\equiv 0$，即 $f(x)\equiv 0$，与 $f(x)\not\equiv 0$ 矛盾.

例 17 若 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可积，且 $f(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

证 用反证法. 因为 $f(x)>0$，若$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 不成立，则必有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，现在来推出矛盾.

取 $\varepsilon_i=\frac{1}{i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 再取一分割 T，使对任何 $\xi_i\in\Delta_i$，都有 $0<\sum f(\xi_i)\Delta x_i<\varepsilon_1(b-a)$，则有不等式 $0<S(T)\leqslant\varepsilon_1(b-a)$ 成立. 从而知，至少有一个 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i}|f(x)|\leqslant\varepsilon_1$(不妨设为$M_{i0}$)(否则一切 $M_i>\varepsilon_1$，则$\sum M_i\Delta x_i>\varepsilon_1(b-a)$，推出矛盾). 于是在 Δ_{i0} 上，有 $f(x)\leqslant\varepsilon_1$.

再在 Δ_{i_0} 上取区间$[a_1,b_1]$(使 $b_1-a_1<\varepsilon_1$)，则在$[a_1,b_1]$上，恒有 $0<f(x)\leqslant\varepsilon_1$. 由

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^{a_1}+\int_{a_1}^{b_1}+\int_{b_1}^{b}=0,$$

而$\int_{a}^{a_1}$,$\int_{a_1}^{b_1}$,$\int_{b_1}^{b}$ 均不小于零,知$\int_{a_1}^{b_1}f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

再对$[a_1,b_1]$重复以上论证,可以得到区间$[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1] \subset [a,b]$,$(b_2 - a_2 < \varepsilon_2)$,且在$[a_2,b_2]$上,恒有 $0 < f(x) \leqslant \varepsilon_2$.

不断重复以上论证,就可得到一个闭区间套$\{[a_n,b_n]\}$,满足

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_n,b_n], b_n - a_n < \varepsilon_n = \frac{1}{n},$$

$$0 < f(x) \leqslant \varepsilon_n \quad (x \in [a_n,b_n]).$$

由闭区间套定理,必存在惟一的$\xi \in [a_n,b_n]$ $(n = 1,2,\cdots)$(即$\xi \in [a,b]$),使得 $f(\xi) \leqslant \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$. 故 $f(\xi) \leqslant 0$,与原假设 $f(x) > 0$ 矛盾.

所以,若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,且 $f(x) > 0$,必有

$$\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

此命题的逆命题不成立,但例 12 所述命题成立.

例 18 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积,证明:$e^{f(x)}$ 在$[a,b]$上可积.

证 对$[a,b]$作分割 T,在 Δ_i 内取两点 x' 和 x''. 由微分中值定理,有

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^{\xi}|f(x') - f(x'')|,$$

ξ 在 x',x''之间. 因为可积函数必有界,故设 $|f(x)| < M$,则

$$|e^{f(x')} - e^{f(x'')}| = e^{M}|f(x') - f(x')|.$$

以 ω_i 与 ω_i' 分别记 $f(x)$ 和 $e^{f(x)}$ 为在 Δ_i 上的振幅,则对 Δ_i 内任意 x' 和 x'',对上述不等式取上确界,得

$$\omega_i' \leqslant e^{M}\omega_i \quad (i = 0,1,\cdots,n-1).$$

由此可知

$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i'\Delta x_i \leqslant e^{M}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i.$$

由可积的第二充要条件知,$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i = 0$. 因此

$$0 \leqslant \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i \leqslant e^M \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0,$$

即 $\lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i' \Delta x_i = 0$，$e^{f(x)}$ 在$[a,b]$上可积.

第二节　定积分的性质

主要内容

定积分有如下性质：

1. 若 f 在$[a,b]$上可积，则 kf 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

2. 若 f,g 在$[a,b]$上可积，则 $f \pm g$ 在$[a,b]$上也可积，且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

3. 若 f,g 在$[a,b]$上可积，则 fg 在$[a,b]$上也可积. 一般地，

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \neq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

4. 有界函数 f 在$[a,c]$，$[c,b]$上都可积的充要条件是：f 在$[a,b]$上可积，并有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

此性质称为定积分的区间可加性，且有

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 与 g 均在$[a,b]$上可积，且对 $x \in [a,b]$，有 $f(x) \leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.\text{（保序性）}$$

6. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.\text{（绝对可积性）}$$

7.（积分第一中值定理） 若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

8.（推广的积分第一中值定理） 若 f 与 g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

9.（积分第二中值定理） 若在区间 $[a,b]$ 上 f 为非负的单调减少函数，而 g 是可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 1 若在 $[a,b]$ 上 f 为非负的单调增加函数，g 为可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2 若在 $[a,b]$ 上 f 为单调函数，g 为可积函数，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

定理与两个推论统称为积分第二中值定理.

疑 难 解 析

1. 为什么要规定

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ 和 } \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x?$$

答　定积分定义强调了函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，而 a 只是一点，为了运算方便与一致性，规定 $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$. 又定义中要求 $b > a$，所以 $\int_b^a$ 无实际意义，也是运算上的要求和统一，令 Δx_i 为负值，规定 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. 这样对积分上限和积分下限的大小不再有要求，从而给计算和论证带来极大的便利.

2. 积分中值的意义是什么?

答　积分中值也叫积分均值，是有限个数的算术平均值概念对连续函数的推广.

若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，当对分割 T 进行 n 等分时，$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，取 ξ_i 为 Δ_i 的右端点 x_i，则对应的 n 个函数值 $f(\xi_i)$ 的算术平均值.

$$\overline{y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$
$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

当 $n \to \infty$ 时，$\overline{y_n}$ 的极限值定义为 f 在 $[a,b]$ 上的平均值 $\overline{y}$，即

$$\overline{y} = \lim_{n\to\infty}\overline{y_n} = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

通常称 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x (= f(\xi))$ 为函数 f 在 $[a,b]$ 上的积分中值，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值就等于该函数在 $[a,b]$ 上的积分中值.

3. 试说明积分第二中值定理的几何意义.

答　当 $f(x) \geqslant 0, g(x) \geqslant 0$ 时，第二中值定理等式左边 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 表示一个空间曲顶柱体的体积(见图 6.1). 该曲顶

柱体的底是 xoy 平面的曲边梯形：$0 \leqslant y \leqslant g(x), a \leqslant x \leqslant b$. 曲顶是空间柱面 $z=f(x)$，被积函数 $A(x)=g(x)f(x)$ 恰为正交于 x 轴的长方形截面的面积. 而等式右边也可以认为是一个柱体的体积，其底面是 xoy 平面上的曲边梯形：$0 \leqslant y \leqslant g(x), a \leqslant x \leqslant \xi$，其高为 $f(a)$. 这时等式表示存在某一 $\xi \in [a,b]$，使得上述两个柱体的体积相等.

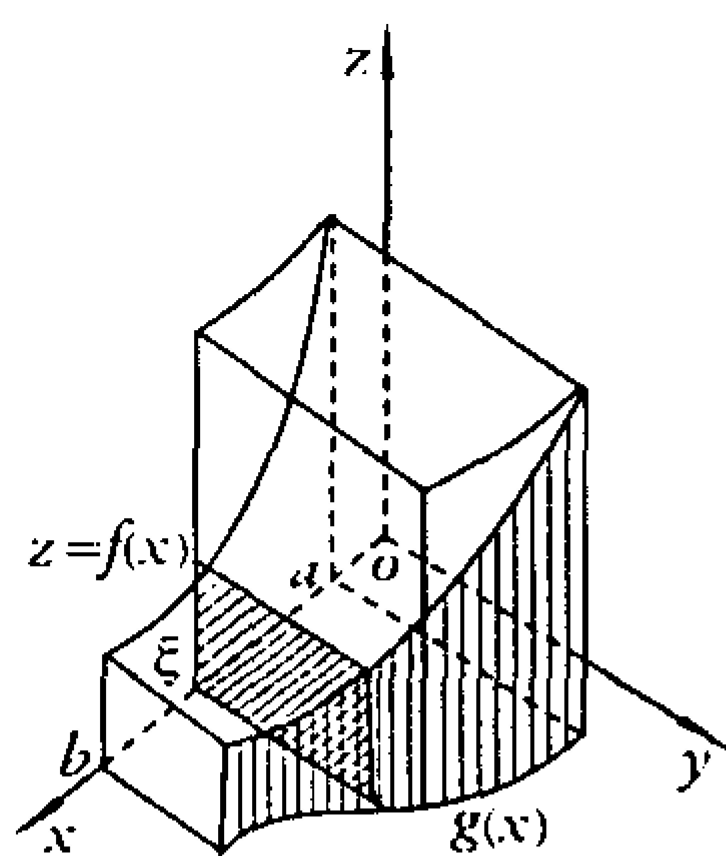


图 6.1

方法、技巧与典型例题分析

一、利用定积分求极限

利用定积分求极限，一般要将极限式化为积分和式 $\sum f(\xi_i)\Delta x_i$，从中确定被积函数 $f(x)$，而由 $\sum \Delta x_i$ 确定积分区间，从而得到定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 计算定积分即得极限值.

例 1 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\ (p>0)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+1/n}+\sqrt{1+2/n}+\cdots+\sqrt{1+n/n}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\tan\dfrac{\pi}{4n}+\tan\dfrac{2\pi}{4n}+\cdots+\tan\dfrac{n-1}{4n}\pi\right)$；

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin a+\sin(a+b/n)+\cdots+\sin[a+(n-1)/n\cdot b]}{n}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$；

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]$.

解 (1) 原式 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}$,

知
$$f(\xi_i)=\frac{1}{1+i/n},\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以
$$\text{原式}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2.$$

(2) 原式 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}}\cdot\dfrac{1}{n}$,

知
$$f(\xi_i)=\frac{1}{\sqrt{1+(i/n)^2}},\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以原式 $=\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^p+\left(\dfrac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^p\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i}{n}\right)^p\cdot\dfrac{1}{n}$,

知
$$f(\xi_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^p,\ \Delta x_i=\frac{1}{n},$$

所以
$$\text{原式}=\int_0^1(x)^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sqrt{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\tan\dfrac{i\pi}{4n}\cdot\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\tan\dfrac{i\pi}{4n}\cdot\dfrac{\pi}{4n}$

$=\dfrac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\tan x\mathrm{d}x=-\dfrac{4}{\pi}\ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4}$

$=\dfrac{4}{\pi}\ln\sqrt{2}=\dfrac{2}{\pi}\ln 2$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\left(a+\dfrac{ib}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \sin(a+bx)\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\cos(a+bx)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{b}[\cos(a+b) - \cos a].$$

(7) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{i/n}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

(8) 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} \sqrt{1-(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right]\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

例 2 利用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}$，其中 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)>0$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1} + \frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2} + \cdots + \frac{\sin\pi}{n+1/n}\right]$.

解 由于题(1)、题(2)、题(3)的通项是积的形式，要先取对数，化积为和，再利用定积分求出极限.

(1) 令 $a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)}$，则

$$\ln a_n = \ln\frac{1}{n} + \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)]$$

$$= \frac{1}{n}[\ln(n+1)+\cdots+\ln(n+n) - n\ln n]$$

$$= \frac{1}{n}\{[\ln(n+1)-\ln n] + [\ln(n+2)-\ln n] + \cdots + [\ln(n+n)-\ln n]\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i)-\ln n]\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{n+i}{n}\cdot\frac{1}{n},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$$
$$=[x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)]\Big|_0^1$$
$$=2\ln2-1=\ln\frac{4}{\mathrm{e}},$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{\ln\frac{4}{\mathrm{e}}}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

(2) 令 $a_n=\sqrt[n]{f(1/n)f(2/n)\cdots f(n/n)}$,则
$$\ln a_n=\frac{1}{n}\left[\ln f\left(\frac{1}{n}\right)+\ln f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln f(x)\mathrm{d}x}.$$

(3) 令 $a_n=\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n}$,则
$$\ln a_n=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i^2}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n},$$
故
$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\ln2-2,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x^2)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\ln2+\pi/4-2}=2\mathrm{e}^{\pi/4-2}.$$

(4) 令 $a_n=\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}$,
则有
$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)<a_n$$
$$<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right).$$
而
$$\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)=\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right),$$

有 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

所以，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin(\pi/n)}{n+1}+\frac{\sin(2\pi/n)}{n+1/2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+1/n}\right]=\frac{2}{\pi}.$$

例 3 用定积分求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}\ (x>0)$.

解 (1) 因为

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}<\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n},$$

即 $$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}<\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}=\int_0^1 2^x\mathrm{d}x=\left[2^x\frac{1}{\ln 2}\right]\Big|_0^1=\frac{1}{\ln 2},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2^{i/n}\frac{1}{n+1/i}=\frac{1}{\ln 2}.$$

(2) 因为 $$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\mathrm{e}^{\ln(\sqrt[n]{n!}/n)}=\mathrm{e}^{[\ln(n!/n^n)]/n}$$

$$=\mathrm{e}^{[\ln(1/n)+\ln(2/n)+\cdots+\ln(n/n)]/n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}[\ln(1/n)+\ln(2/n)+\cdots+\ln(n/n)]/n}$

$$=e^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=e^{\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\mathrm{d}x}=e^{\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}[x\ln x-x]_\varepsilon^1}=e^{-1}.$$

以下两题要用弃掉高阶无穷小的方法来做.

(3) 因为 $\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{n}(1+\alpha_n)$ $(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}=\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2+\cos(k\pi/n)}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\alpha_n)$$

$$=\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos\pi x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left[\left(\tan\frac{\pi x}{2}\right)\Big/\sqrt{3}\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

(4) 因为$\sqrt{\left(x+\frac{k}{n}\right)\left(x+\frac{k+1}{n}\right)}\sim x+\frac{1}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[x+\frac{1}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\int_0^1(x+t)\mathrm{d}t=x+\frac{1}{2}\quad(x>0).$$

例 4 利用定积分定义求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$ $(\alpha,\beta\neq-1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{i/n}\sin b^{(2i+1)/2n}$ $(a>1)$.

解 (1) 将分子、分母化为两个定积分来处理.

$$\frac{[1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha]^{\beta+1}}{[2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta]^{\alpha+1}}$$

$$=2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha+\left(\frac{3}{n}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{2n+1}{n}\right)^\alpha\right]\right\}^{\beta+1}}{\left\{\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2}{n}\right)^\beta+\left(\frac{4}{n}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{2n}{n}\right)^\beta\right]\right\}^{\alpha+1}}$$

$$= 2^{\alpha-\beta}\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n}[(2i-1)/n]^{2}\cdot 2/n+[(2n+1)/n]^{\alpha}\cdot 2/n\right\}^{\beta+1}}{\left[\sum_{i=1}^{n}(2i/n)^{\beta}\cdot 2/n\right]^{\alpha+1}},$$

所以　　原式 $= 2^{\alpha-\beta}\dfrac{\left(\int_0^2 t^{\alpha}\mathrm{d}t\right)^{\beta+1}}{\left(\int_1^0 t^{\beta}\mathrm{d}t\right)^{\alpha+1}} = 2^{\alpha+\beta}\dfrac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}.$

(2) 因为原式 $=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}\right)\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right)$ 可看作函数 $\sin x$ 在 $[1,b]$ 上按分割 $1=b^{0/n}<b^{1/n}<\cdots<b^{n/n}=b$ 所作的积分和，小区间长 $\Delta x_i=b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}$，$0\leqslant\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\leqslant b(b^{1/n}-1)\to 0$ · $\xi_i=b^{2i+1}$ 是小区间 $[b^{i/n},b^{(i+1)/n}]$ 两端点的比例中项. 所以

$$原式 = \int_1^b \sin x\mathrm{d}x = \cos 1-\cos b.$$

二、定积分的估值与比较

简单的定积分估值可以直接由不等式

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$$

得出，而较精密的估值可用推广的积分中值定理和第二积分中值定理来估计.

例 5　估计下列各积分的值：

(1) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x$.

解　可先求 $f(x)$ 在积分区间上的最大值与最小值，再考虑区间长度，即得.

(1) 因为

$$f'(x)=\arctan x+\frac{x}{x+x^2}>0,\quad x\in[1/\sqrt{3},\sqrt{3}],$$

所以 $f(x)$ 严格单调增加，最小值 $m=f(1/\sqrt{3})=\pi/(6\sqrt{3})$，最大值 $M=f(\sqrt{3})=\pi/\sqrt{3}$. 因此

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

即
$$\frac{\pi}{9}\leqslant\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\frac{2\pi}{3}.$$

(2) 因为 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$,有惟一驻点 $x=\frac{1}{2}$,当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$时,$f'(x)>0$,故有最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{e}^{-1/2}$. 而由 $f(x)$ 在$\left[0,\frac{1}{2}\right]$与$\left[\frac{1}{2},2\right]$上的单调性,比较 $f(0)$ 与 $f(2)$,得最大值 $M=f(2)=\mathrm{e}^2$. 所以

$$2\mathrm{e}^{-1/2}\leqslant\int_0^2\mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2.$$

例 6 利用第一积分中值定理估计下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}$; (2) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为$\dfrac{1}{1+1/2}\leqslant\dfrac{1}{1+(\cos x)/2}\leqslant\dfrac{1}{1-1/2}$,即

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{1+(\cos x)/2}\leqslant 2,$$

则
$$\frac{2}{3}\cdot 2\pi\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}\leqslant 2\cdot 2\pi,$$

即
$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\cos x)/2}=\frac{4\pi}{3}(2\theta),\ |\theta|<1.$$

(2) 因为$\dfrac{x^9}{\sqrt{2}}\leqslant\dfrac{x^9}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^9\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$,所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^9\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^9\mathrm{d}x,$$

即
$$\frac{1}{10\sqrt{2}}\leqslant\int_0^1\frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{10}.$$

例 7 利用第二积分中值定理估计下列定积分:

(1) $\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx$；　　　(2) $\int_a^b \sin x^2 dx\ (0<a<b)$.

解　(1) 设 $f(x)=\sin x, g(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[100\pi,200\pi]$ 上有界且可积，$g(x)$ 为单调减少函数且非负，则依第二积分中值定理，有

$$I=g(100\pi)\int_{100\pi}^{\xi}\sin x dx=\frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x dx.$$

又
$$0<\int_{100\pi}^{\xi}\sin x dx<2,$$

故
$$\int_{100\pi}^{200\pi}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{2\theta}{100\pi}=\frac{\theta}{100\pi}\ (0<\theta<1).$$

(2) 令 $f(x)=x\sin x^2, g(x)=\frac{1}{x}$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上可积，且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 内严格单调减少，故依第二积分中值定理，有

$$\begin{aligned}I&=\int_b^a \frac{1}{x}x\sin x^2 dx=g(a)\int_a^{\xi}\frac{1}{2}\sin x^2 dx^2\\&=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{2}(-\cos x^2)\Big|_a^{\xi}=\frac{1}{2a}(\cos a^2-\cos\xi^2)\\&=\frac{1}{a}\sin\frac{\xi^2+a^2}{2}\sin\frac{\xi^2-a^2}{2}=\frac{\theta}{a}\quad(|\theta|\leqslant 1).\end{aligned}$$

例 8　比较下列定积分值的大小：

(1) $\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$ 和 $\int_0^1\ln(1+x)dx$；

(2) $\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 x dx$ 和 $\int_0^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 x dx$.

解　(1) 作辅助函数 $\varphi(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x), x\in[0,1]$，则

$$f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}=-\frac{x}{(1+x)^2}\leqslant 0,$$

即 $f(x)$ 在积分区间上严格单调减少，所以

$$\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)\leqslant 0,\quad \frac{x}{1+x}\leqslant \ln(1+x).$$

由定积分性质，有$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

若$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$，则在$[0,1]$上恒有$\frac{x}{1+x}=\ln(1+x)$，但这是不可能的，故必有

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x<\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

(2) 对积分$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos x^2\mathrm{d}x$ 作代换 $x=\pi+u$，则

$$\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}\cos^2(\pi+u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}\cos^2u\mathrm{d}u=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}\cos^2x\mathrm{d}x.$$

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\mathrm{e}^{-(\pi+u)^2}$，故

$$\int_0^\pi\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x\geqslant\int_\pi^{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\cos^2x\mathrm{d}x.$$

例 9 确定下列定积分的符号：

(1) $\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　(3) $\int_{-2}^2 x^3 2^x\mathrm{d}x$.

解 将积分变形后，讨论积分区间内被积函数的符号，确定定积分的符号.

(1) $$\int_0^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x\ (x=t+\pi)$$

$$=\int_0^\pi x\sin x\mathrm{d}x-\int_0^\pi(t+\pi)\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^\pi(x-x-\pi)\sin x\mathrm{d}x=-\pi\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x.$$

因为在$[0,\pi]$上，$\sin x\geqslant 0$，所以

$$\int_0^{2\pi}x\sin x\mathrm{d}x<0.$$

(2) $$\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ (x=t+\pi)$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + \pi} dt = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x + \pi)} dx.$$

由积分第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi^2 \sin \xi}{\xi(\xi + \pi)} > 0,\ 0 < \xi < \pi.$$

(3) $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx = \int_{-2}^{0} x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx \ (x = -t)$

$$= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx = \int_0^2 x^3 (e^x - e^{-x}) dx.$$

同上题，有 $\int_{-2}^{2} x^3 2^x dx = 2\xi^3 (e^{\xi} - e^{-\xi}) > 0.$

例 10 设 $x > 0$，证明：存在 $0 < \theta < 1$，使

$$\int_0^x e^t dt = x e^{\theta x},\quad 且 \quad \lim_{x \to +\infty} \theta = 1.$$

证 由积分中值定理知，存在 $0 < \theta < 1$，使 $\int_0^x e^t dt = x e^{\theta x}$. 又由定积分计算得 $\int_0^x e^t dt = e^x - 1$，故有

$$x e^{\theta x} = e^x - 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \theta = \lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{e^x - 1}{x} \right) \Big/ x \xlongequal{L'} \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)'$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = 1.$$

例 11 令 $\int_0^x f(t) dt = x f(\theta x)$，求 θ. 设

(1) $f(t) = t^n (n > -1)$； (2) $f(t) = \ln t$.

解 (1) 因为 $\int_0^x t^n dt = \frac{1}{n + 1} x^{n+1}$，所以

$$\frac{1}{n + 1} x^{n+1} = x^{n+1} \theta^n \Rightarrow \theta = \sqrt[n]{1/(n + 1)}.$$

(2) 因为 $\int_0^x \ln t dt = x(\ln x - 1)$，所以

$$x(\ln x - 1) = x \ln \theta x \Rightarrow \theta = \frac{1}{e}.$$

三、求定积分的极限

例 12　证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0$.

证　(1) 由积分第一中值定理，$\exists\ \xi_n \in (0,1)$，使

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = 0\ (\xi_n \text{ 与 } n \text{ 有关}).$$

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\ \xi_n \in (n,n+p)$ 使

$$0 \leqslant \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\xi_n}\int_n^{n+p}\sin x\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sin\xi_n}{\xi_n}\cdot p \longrightarrow 0$$

所以
$$\lim_{x\to+\infty}\int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = 0.$$

例 13　证明：若 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$，则有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = A.$$

证　因为 $f(x)$ 连续，所以 $|f(x)| \leqslant M, x \in [0, +\infty)$

又
$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

其中
$$\left|\frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{M}{x}\sqrt{x} \longrightarrow 0$$
$$(x \longrightarrow +\infty);$$

又第二个积分使用积分第一中值定理，得

$$\frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{x}(x - \sqrt{x})f(\xi_x),\ \xi_x \in (\sqrt{x}, x).$$

因为 $x \longrightarrow +\infty, \sqrt{x} \longrightarrow +\infty$，所以 $\xi_x \longrightarrow +\infty$，于是

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)f(\xi_x) = A.$$

故
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0 + A = A.$$

此极限可以理解为 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上的平均值. 本例的条件即平均值存在的条件.

例 14 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t = 0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x = 0$.

证 (1) 本题可由积分第二中值定理来证,设 $f(t)=\sqrt{t}$, $g(t)=\sin t$, $\exists\ \xi_x\in(0,x)$,使

$$0<\left|\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{t}\sin t\mathrm{d}t\right| = \frac{\sqrt{x}}{x}\left|\int_{\xi_x}^x \sin t\mathrm{d}t\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}|\cos\xi_x-\cos x|\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}}\to 0\quad(x\to+\infty).$$

本例也说明例 13 的命题一般并不可逆.

(2) 设 ε 为任意小的正数,令

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\pi/2-\varepsilon}^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x.$$

由积分第一中值定理,$\exists\ \xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}-\xi\right]$,使

$$0<\int_0^{\pi/2-\xi}\sin^n x\mathrm{d}x=\sin^n\xi\int_0^{\pi/2-\xi}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\xi\to 0\quad(n\to\infty).$$

又
$$0<\int_{\pi/2-\xi}^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x\leqslant\int_{\pi/2-\xi}^{\pi/2}\mathrm{d}x=\xi,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

例 15 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续,$x_0\in[a,b]$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1}f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x=f(x_0).$$

证 由积分第一中值定理,$\exists\ \xi_n\in[nx_0,nx_0+1]$,作代换 $t=x/n$,使

$$I=n\int_{x_0}^{x_0+1/n}f(t)\mathrm{d}t=n\cdot f(\xi_n)\cdot\frac{1}{n}=f(\xi_n).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = x_0$，由 $f(x)$ 的连续性知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{nx_0}^{nx_0+1} f\left(\frac{x}{n}\right)\mathrm{d}x = f(x_0).$$

例 16 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上非负连续，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

证 设 $M = \int \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) > 0$（否则 $M = 0$），则 $f(x) \equiv 0$，上式显然成立. 由保号性知，$\exists\ [\alpha,\beta] \subset [a,b]$，使

$$0 < M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M,\ x \in [\alpha,\beta],$$

于是 $$(M-\varepsilon)^n \leqslant f^n(x) \leqslant M^n,\ x \in [\alpha,\beta].$$

$$(M-\varepsilon)^n(\beta-\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta f^n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f^n\mathrm{d}x \leqslant M^n(b-a),$$

即 $$(M-\varepsilon)\ \sqrt[n]{\beta-\alpha} \leqslant \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} \leqslant M\ \sqrt[n]{(b-a)}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{\beta-\alpha} = \lim\limits_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{b-a} = 1$，所以由 ε 的任意性，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x} = M = \max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

例 17 设 $f(x) \in$ 在$[1,\mathrm{e}]$上可积，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\int_1^{1+/n} f(x^n)\mathrm{d}x\right] = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

证 令 $x^n = t$，$\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\ \sqrt[n]{t}\ /t\mathrm{d}t$，则由积分第一中值定理得知 $\exists\ \xi_n \in \left[1,\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$，使

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\int_1^{(1+1/n)^n} \frac{\sqrt[n]{t}}{t}\cdot f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{\xi_n}\int_1^{(1+1/n)^n} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

例 18 证明：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则有（黎曼引理）

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

证　$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists$ 对$[a,b]$的分割T，使$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}$. 记$m_i = \inf_{\Delta x_i} f(x)$，$i = 1,2,\cdots,n$，于是

$$\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - m_i]\sin\lambda x\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x\mathrm{d}x.$$

而 $|f(x) - m_i| \leqslant \omega_i, x \in \Delta_i, i = 1,2,\cdots,n$，且

$$\left|\int_{t_1}^{t_2}\sin\lambda(x)\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{\lambda}|\cos t_1\lambda - \cos t_2\lambda| \leqslant \frac{2}{\lambda}.$$

故又有　$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i|,$$

当分割T随ε确定后，$\sum_{i=1}^{n}|m_i|$为一常值. 故当$\lambda > \frac{4}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}|m_i|$时，$\frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i| < \frac{\varepsilon}{2}$，从而知

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0\ \left(\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\right|\mathrm{d}x < \varepsilon\right).$$

请读者用同样方法自已证出第二个等式. 实际上也可以用分部积分法计算定积分后，再用估值性得出：

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\sin\lambda x = \frac{1}{\lambda}[f(x)\sin\lambda x]\Big|_a^b - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda}[f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)] - \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x,$$

显然　$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}[f(b)\sin(\lambda b) - f(a)\sin(\lambda a)] = 0.$$

又$f'(x)$在$[a,b]$上连续，则$|f'(x)| \leqslant M, x \in [a,b]$，故

$$\frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b f'(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(x)\sin\lambda x|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\lambda}m(b-a) \to 0\ (\lambda \to \infty).$$

所以 $$\lim_{\lambda\to 0}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

这里，$f(x)$ 应在$[a,b]$上有连续导数.

例 19 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{2\pi}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\right)\Big/\left(\int_0^{2\pi}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\right) = 1.$

证 用迫敛性证明. 因为当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，$0 \leqslant \sin x \leqslant 1$，故

$$0 \leqslant \sin^{2n+1}x \leqslant \sin^{2n}x \leqslant \sin^{2n-1}x,$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x.$$

不等式各项同除以第一项，有

$$1 \leqslant \frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x}.$$

又由定积分的瓦里士(Wallis)公式，知

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\mathrm{d}x = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},\quad \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

所以上述不等式的后项等于$\frac{2n+1}{2n} \to 1\ (n \to \infty)$. 在上述不等式两边取极限，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\mathrm{d}x\right)\Big/\left(\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\mathrm{d}x\right) = 1.$$

例 20 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^x\cos nx = 0.$

证 $\forall\, \varepsilon > 0$，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\arctan\frac{1}{n} = 0$，知$\exists\, N_1 > 0$，使当 $n > N_1$ 时，$0 < x_n < \delta$，则在$[0,\delta]$上有

$$f(x) = \mathrm{e}^x\cos^n x \leqslant \mathrm{e}^{x_n}\cos^n x_n = M_n.$$

因为当 $f'(x) = \mathrm{e}^x\cos^{n-1}x(\cos x - n\sin x) = 0$ 且 $n \geqslant 2$ 时，x

$= \frac{\pi}{2}$, $\arctan\frac{1}{n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，有

$$\max f(x) = e^{\arctan(1/n)}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n \longrightarrow 1\ (n \longrightarrow \infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 1$，所以 $\exists\ N_2 > 0$，当 $n > N_2$ 时，有 $0 < M_n < 2$. 取 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 有

$$0 < \int_0^\delta f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^\delta M_n \mathrm{d}x = M_n \cdot \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

而在 $n > N_1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调减少，只需

$$n > N_3 = \ln\left(\frac{2\varepsilon}{2\pi - \varepsilon}e^{-\pi/4}\right)\Big/\ln\cos\frac{\varepsilon}{4},$$

就有 $$0 < \int_\delta^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < e^\delta \cos^b\delta \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^{\varepsilon/4}\left(\cos\frac{\varepsilon}{4}\right)^n (2\pi - \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

或 $$\left(\cos\frac{\varepsilon}{4}\right)^n < \frac{2\varepsilon}{(2\pi - \varepsilon)e^{\varepsilon/4}}.$$

所以，当 $n > N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ 时，有

$$0 < \int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < \int_0^\delta f(x)\mathrm{d}x + \int_\delta^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} e^x \cos^n x \mathrm{d}x = 0.$$

例 21 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-1/x}\mathrm{d}x = 1$.

证 由积分中值定理，$\exists\ n^2 \leqslant \xi_n \leqslant n^2 + n$，使

$$\int_{n^2}^{n^2+n} \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-1/x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-1/\xi_n} \cdot n.$$

又 $$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{-1/x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) < 0\ (x > 2),$$

所以，当 $x > 2$ 时 $f(x)$ 严格单调减少，即

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-1/(n^2+n)} \leqslant \frac{n}{\sqrt{\xi_n}}e^{-1/\xi_n} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2}}e^{-1/n^2} = e^{-1/n^2x}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-1/(n^2+n)} = \lim\limits_{n\to\infty}e^{-1/n^2} = 1$,故依迫敛性,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-1/x}dx = 1.$$

例 22 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,证明:

$$\lim_{h\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

证 $$\int_0^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx = \int_0^{h^{1/4}}\frac{hf(x)}{h^2fx^2}dx + \int_{h^{1/4}}^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx$$
$$= I_1 + I_2.$$

而由积分中值定理,得

$$I_1 = f(\xi)\int_0^{h^{1/4}}\frac{h}{h^2+x^2}dx = f(\xi)\arctan\frac{x}{h}\Big|_0^{h^{1/4}}$$
$$= f(\xi)\arctan(1/h^{1/4}) \longrightarrow f(0)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$(\xi\in(0,h^{1/4}),h\longrightarrow 0^+),$$

$$|I_2| = \left|\int_{h^{1/4}}^1\frac{hf(x)}{h^2+x^2}dx\right| \leqslant M\int_{h^{1/4}}^1\frac{h}{h^2+x^2}dx \quad (|f(x)|\leqslant M)$$
$$= M[\arctan(1/h) - \arctan(1/h^{3/4})]h \longrightarrow 0 \quad (h\longrightarrow 0^+).$$

所以 $$\lim_{x\to 0^+}\int_0^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)dx = 0 + \frac{\pi}{2}f(0) = \frac{\pi}{2}f(0).$$

例 23 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续且严格单调减少,$f(0)=1$,$f(1)=0$.证明:$\forall\,\delta\in(0,1)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(f(x))^n dx}{\int_0^\delta(f(x))^n dx} = 0.$$

证 因为 $f(x)$ 严格单调减少,$0 < f(\delta) < f(\delta/2)$,$\left[f(\delta)/f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$.由迫敛性,$\forall\,\delta\in(0,1)$,有

$$0 \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^\delta [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^{\delta/2} [f(x)]^n \mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_\delta^1 [f(x)]^n \mathrm{d}x}{\int_0^{\delta/2} \left[f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \mathrm{d}x}$$

$$\leqslant \left[f(\delta)/f\left(\frac{\delta}{2}\right)\right]^n \cdot \frac{1-\delta}{\delta/2} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

所以,原式 $= 0$.

例 24 已知 $f(t)$ 可微, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$,求

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t\left(\sin \frac{3}{t}\right) f(t) \mathrm{d}t.$$

解 依积分中值定理,$\exists\ \xi \in [x, x+2]$,使得

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x+2} t\left(\sin \frac{3}{t}\right) f(t) \mathrm{d}x = \lim_{x \to +\infty} \xi \sin\left(\frac{3}{\xi}\right) f(\xi) \cdot 2$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 6\left(\sin \frac{3}{\xi} \Big/ \frac{3}{\xi}\right) \cdot f(\xi) = 6.$$

例 25 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$; (2) $\lim\limits_{n \to \infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x^2} - 2x^3\mathrm{e}^{-x^2} = 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1 - x^2) < 0$,所以在 $[n, n+1]$ 上,由估值性,得

$$(n+1)^2 \mathrm{e}^{-(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x \leqslant n^2 \mathrm{e}^{-n^2}.$$

而
$$\lim_{n \to \infty} (n+1)^2 \mathrm{e}^{-(n+1)^2} = \lim_{n \to \infty} n^2 \mathrm{e}^{-n^2} = 0$$

(由洛必达法则 $x^2/\mathrm{e}^{x^2} \to 0$),

故
$$\lim_{n \to \infty} \int_n^{n+1} x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = 0.$$

(2) 因为 $n > 0$ 时,$1/x^n$ 在 $[n, n+1]$ 上连续,$\mathrm{e}^x > 0$,所以由推广的积分中值定理,$\exists\ \xi \in [n, n+1]$,使得

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{\xi^n} \int_n^{n+1} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{\xi_n}(\mathrm{e} - 1).$$

又 $$0 \leqslant \frac{e^n}{\xi^n}(e-1) \leqslant \frac{2e^n}{n^n} = 2\left(\frac{e}{n}\right)^n < \left(\frac{e}{3}\right)^n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} \frac{e^x}{x^n}\mathrm{d}x = 0.$$

四、关于定积分的等式和不等式的证明

关于定积分有许多著名的和常用的等式和不等式，几乎每个等式和不等式都有很多种证明方法. 可以用定义、可积条件、定积分性质、定理，借助已知等式或不等式，计算定积分以及借助各种技巧来证明. 做证明题首先要熟悉概念，其次是熟悉技巧，要了解命题的条件，依据条件选择证明的方法和提出证明的依据，使证明清晰严密，无懈可击.

例 26 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调增加，证明：

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 1 用定积分性质证. 由 $f(x)$ 的单调性，有

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \geqslant 0,$$

故 $$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left[f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

又 $$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=x-(a+b)/2} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} t\mathrm{d}t = 0,$$

解上式两边积分式，即得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2 用积分第一中值定理证.

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x.$$

依积分第一中值定理，$\exists\ \xi_1 \in \left[0,\dfrac{a+b}{2}\right], \xi_2 \in \left[\dfrac{a+b}{2}b\right]$，使

$$I = f(\xi_1)\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(\xi_2)\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -f(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{2} + f(\xi_2)\frac{(b-a)^2}{2} \quad (\text{由 } f(x) \text{ 的单调性})$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}[f(\xi_2) - f(\xi_1)] \geqslant 0.$$

证法 3 用积分第二中值定理证. 因为 $f(x)$ 单调增加，所以 $\exists\ \xi \in [a,b]$，使

$$I = f(a)\int_a^{\xi}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + f(b)\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= f(a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + [f(b)-f(a)]\int_{\xi}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= [f(b)-f(a)]\left[\frac{b^2-\xi^2}{2} - \frac{a+b}{2}(b-\xi)\right]$$

$$= [f(b)-f(a)]\frac{b-\xi}{2}(\xi-a) \geqslant 0.$$

证法 4 由 $f(x)$ 的单调性知，$\forall\ t,x \in [a,b]$，有

$$(t-x)[f(t)-f(x)] \geqslant 0.$$

在上式中固定 x，对 t 从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - x\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + xf(x)(b-a) - f(x)\frac{b^2-a^2}{2} \geqslant 0.$$

再将上式对 x 从 a 到 b 积分，得

$$(b-a)\int_a^b tf(t)\mathrm{d}t - \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + (b-a)\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$$

$$-\frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

将上式中变量 t 改为 x，即可化简得

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 5 用变上限积分（下节内容）证. 令

$$F(x) \triangleq \int_a^x tf(t)\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t,$$

显然 $F(a)=0$. 而对 $x\in(a,b]$,有

$$\begin{aligned}F'(x)&=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{a+x}{2}f(x)\\&=\frac{x-a}{2}f(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_a^x[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0.\end{aligned}$$

即 $F(x)$ 单调增加,$F(x)\geqslant 0$,$F(b)\geqslant 0$. 因此

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

本例的物理意义是:如果曲线 $y=f(x)$ 单调上升,则密度均匀的曲边梯形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 的质心不可能落在直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的左边.

因为篇幅的关系,我们在以后的每例中仍然只选讲一种证明方法,读者可尝试其它方法.

例 27 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f'(x)\geqslant m\geqslant 0$,$|f(x)|\leqslant\pi$,证明:$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{m}$.

证 因为 $f(x)$ 严格单调增加,所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至多有一零点 c,从而

$$\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{f'(x)}\sin f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^c+\int_c^b.$$

由积分第一中值定理和分部积分法

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{f'(\xi)}\int_a^c\sin f(x)\mathrm{d}f(x)+\frac{1}{f'(\eta)}\int_c^b\sin f(x)\mathrm{d}f(x)\\&=\frac{1}{f'(\eta)}[1-\cos f(b)]-\frac{1}{f'(\xi)}[1-\cos f(a)],\end{aligned}$$

所以
$$\left|\int_a^b\sin f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{2}{m}.$$

例 28 设 $b>a>0$,$\theta>0$,证明:$\exists\ |\xi|<1$,使

$$\int_a^b\frac{\mathrm{e}^{-\theta x}\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{2\xi}{a}.$$

证 令 $f(x)=\frac{e^{-\theta x}}{x}$，$g(x)=\sin x$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，又 $f'(x)=\frac{1+\theta x}{x^2}e^{\theta x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调减少非负. 于是，由积分第二中值定理知，$\exists\ \eta\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx=f(a)\int_a^\eta g(x)dx=\frac{e^{-\theta a}}{a}(\cos a-\cos\eta),$$

即
$$\left|\int_a^b e^{-\theta x}x^{\sin x}dx\right|<\frac{2}{a}.$$

令 $\xi=\frac{a}{2}\int_a^b \frac{e^{-\theta}\sin x}{x}dx$，则有 $|\xi|<1$，且

$$\int_a^b \frac{e^{-\theta x}\sin x}{x}dx=\frac{2\xi}{a}.$$

例 29 设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续且可导，且 $f(2)=f(4)=0$，证明：$\max\limits_{x\in[2,4]}|f'(x)|\geqslant\left|\int_2^4 f(x)dx\right|$.

证 取 $x\in[2,4]$，在 $[2,x]$ 和 $[x,4]$ 上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理，则 $\exists\ \xi_1\in[2,x]$，$\xi_2\in[x,4]$，使得

$$f(x)-f(2)=f'(\xi_1)(x-2)\Longrightarrow f(x)=f'(\xi_1)(x-2),$$
$$f(4)-f(x)=f'(\xi_2)(4-x)\Longrightarrow f(x)=f'(\xi_2)(x-4),$$

令 $M=\max\limits_{x\in[2,4]}|f'(x)|$，则

$$|f(x)|\leqslant M(x-2),\ |f(x)|\leqslant M(4-x).$$

故
$$\left|\int_2^4 f(x)dx\right|\leqslant\int_2^4|f(x)|dx$$
$$\leqslant\int_2^3 M(x-2)dx+\int_3^4 M(4-x)dx=\frac{M}{2}+\frac{M}{2}=M,$$

即
$$\max_{x\in[2,4]}|f'(x)|\geqslant\left|\int_2^4 f(x)dx\right|.$$

例 30 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，证明：$\exists\ \xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

证 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)=f(x)$，$F''(x)=f'(x)$，$F''(x)=f''(x)$. 将 $F(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 展为二阶泰勒公式，得

$$F(b)=F(x_0)+F'(x_0)(b-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2+\frac{F''(\xi_1)}{3!}(b-x_0)^3\ (x_0<\xi_1<b),$$

$$F(a)=F(x_0)+F'(x_0)(a-x_0)+\frac{F''(x_0)}{2!}(a-x_0)^2+\frac{F''(\xi_2)}{3!}(a-x_0)^3\ (a<\xi_2<x_0).$$

将上面两式相减，由于 $b-x_0=\frac{1}{2}(b-a)=-(a-x_0)$，故

$$F(b)-F(a)=2F'(x_0)\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{48}(b-a)[F''(\xi_1)-F''(\xi_2)].$$

因为 $f''(x)$ 连续，由介值定理，$\exists\ \xi_1\in[\xi_1,\eta_2]$，使

$$F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)=f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi),$$

$$F'(x_0)=f(x_0)=f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

所以 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\quad（牛顿-莱布尼茨公式）$$
$$=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

例 29 与例 30 的证明是用微分学的中值定理完成的.

例 31 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上有相同的单调性，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，所以 $f(x)\cdot g(x)$ 在 $[0,1]$ 上也可积. 现将 $[0,1]$ n 等分，$\Delta_i=\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$，取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，i

$= 1,2,\cdots,n$. 由于 $f(x),g(x)$ 有相同的单调性，所以

$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)\leqslant n\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right),$$

即
$$\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

故由定积分定义，对不等式取 $n\to\infty$ 的极限，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

例 32 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则有不等式

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_a^b[f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b[g(x)]^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

成立. 不等式称赫尔德积分不等式.

当 $p=q=2$ 时，不等式称施瓦兹积分不等式.

证 赫尔德积分不等式可用定积分定义和不等式 $AB\leqslant\frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}$ $(A\geqslant 0,B\geqslant 0)$（见第四章第四节例 18）证，也可以用定积分的单调性与上述不等式来证. 本例利用定积分定义与赫尔德积分不等式（见第一章第三节例 11）来证.

对 $[a,b]$ 作等分 $T,\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$，取 $\xi_i=x_i,i=1,2,\cdots,n$. 由赫尔德积分不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)]^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)]^q\right)^{1/q},$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,p>1$. 上式两边乘以 $\frac{b-a}{n}$，得

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\frac{b-a}{n}$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)]^p\frac{b-a}{n}\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}[g(\xi_i)]^q\frac{b-a}{n}\right)^{1/q}.$$

由于 $[f(x)]^p,[g(x)]^q,f(x)g(x)$ 均连续，故在 $[a,b]$ 上可积，取 n

$\to\infty$ 的极限，依定积分定义，有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b [g(x)]^q\right)^{1/q}.$$

例 33 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，证明：施瓦兹积分不等式

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

证 除当作赫尔德积分不等式特例外，还可以用实二次三项式的判别式来证.

设 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \neq 0$，则对实变量 λ 的二次三项式，有

$$\int_a^b [f(x)+\lambda g(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= \lambda^2\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x + 2\lambda\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

其判别式非正，即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant 0,$$

故 $$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

例 34 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

证 由题设知 $f(x) = \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \ (a \leqslant x \leqslant b)$.

依赫尔德积分不等式，得

$$f^2(x) = \left[\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right]^2 \leqslant \int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^x 1^2\mathrm{d}x$$

$$= (x-a)\int_a^x [f'(t)]\mathrm{d}x.$$

对上式两边从 a 到 b 积分，用分部积分法，可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left[(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2\mathrm{d}x.$$

例 35 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数，且 $f(a)=0$，证明：

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证 令 $g(x)=\int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t\ (a\leqslant x\leqslant b)$，则 $g'(x)=|f'(x)|$，由 $f(a)=0$ 知

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^x |f'(t)|\mathrm{d}t = g(x).$$

故 $$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}g(x)$$

$$=\frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1\cdot|f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2.$$

由施瓦兹积分不等式，有

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}x\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$$

例 36 证明：若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 $p>1$，则有不等式

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

成立. 不等式称为闵可夫斯基积分不等式.

证 利用赫尔德积分不等式和 $q(p-1)=p$，有

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^p\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)+g(x)][f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b f(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)[f(x)+g(x)]^{p-1}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$+\left(\int_a^b [g(x)]^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^{q(p-1)}\mathrm{d}x\right)^{1/q}$$

$$= \left\{\left(\int_a^b [f(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\right\}$$

$$\cdot \left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

或
$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1-1/q}$$
$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

即
$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_a^b [g(x)]^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

例 37 证明:若 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调减少,则 $\forall a \in (0,1)$,不等式 $a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

证 因为,所证不等式可化为

$$a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + a\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

故只需证
$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

又 $f(x)$ 单调单调减少,所以

$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(a)\mathrm{d}x = f(a),$$

而
$$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(a)\mathrm{d}x = f(a),$$

故
$$\frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

例 38 设 $a>0$,$f'(x)$ 在$[0,a]$上连续,证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证 由积分第一中值定理知,$\exists\, \xi \in [0,a]$,使

$$\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x = af(\xi).$$

而
$$f(\xi) - f(0) = \int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x,$$

即 $$f(0)=f(\xi)-\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x,$$

故 $$|f(0)|=\left|f(\xi)-\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant |f(\xi)|\left|\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant |f(\xi)|+\int_0^\xi |f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

例 39 设 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$E=\varphi([a,b])$，$f(x)$ 在 E 上为可微凸函数，证明：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t>f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

证 令 $c=\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$，则命题转化为证

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\mathrm{d}t\geqslant (b-a)f(c).$$

由题设知，$f(x)$ 为可微凸函数，故 $\forall\ x\in E$，有

$$f(x)\geqslant f(c)+f'(c)(x-c).$$

于是 $$f[\varphi(t)]\geqslant f(c)+f'(c)[\varphi(t-c)],$$

$$\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t\geqslant (b-a)f(c)+f'(c)\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t-f'(c)c(b-a)$$
$$=(b-a)f(c),$$

故 $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f[\varphi(t)]\mathrm{d}t>f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t\right).$$

例 40 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=0$，$|f'(x)|\leqslant k$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant \frac{(b-a)^2}{2}k.$$

证 依拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\ \xi\in(a,x)\subset(a,b).$$

对上式两边在 $[a,b]$ 上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a)\mathrm{d}x+\int_a^b (x-a)f'(\xi)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant f(a)(b-a)+\int_a^b |(x-a)f'(\xi)|\mathrm{d}x$$

$$=f(a)(b-a)+\int_a^b (x-a)|f'(\xi)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant f(a)(b-a)+k\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant k\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}k.$$

例 41 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $f''(x)>0$，证明：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

证 利用泰勒公式，将 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{2}(a+b)$ 处展为一阶泰勒公式，因为 $f''(x)>0$，故

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

对上式两边在 $[a,b]$ 上积分，得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x.$$

而 $$\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]=0,$$

故 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

例 42 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，证明：

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x}\leqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证 由题设知 $f(x)$ 和 $\ln f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积，将 $[0,1]$ n 等分，作积分和

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right),$$

$$\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f\left(\frac{i}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n},$$

所以 $\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\prod\limits_{i=1}^{n}\left[f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\prod\limits_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n}.$

利用不等式 $\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$，得

$$\left[\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right]^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right),$$

故

$$\mathrm{e}^{\int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

五、利用定积分研究函数

利用定积分研究函数的性态，往往要和以前学过的许多知识结合起来，因而具有一定的难度．这就要求我们对概念要理解和融会贯通，对方法和技巧要深知并熟练掌握．只要努力，这是容易做到的．

例 43 设 $F(x) = \int_0^a f(x+y)\mathrm{d}y$，$a > 0$，$f(u)$ 为处处有定义且单调增加的连续函数．讨论 $F(x)$ 的增减性．

解 任取 x_1, x_2，使 $x_1 < x_2$，则 $x_1 + y < x_2 + y$．故

$$f(x_2 + y) - f(x_1 + y) \geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_0^a f(x_2 + y)\mathrm{d}y - \int_0^a f(x_1 + y)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a [f(x_2 + y) - f(x_1 + y)]\mathrm{d}y \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以，$F(x)$ 是单调增加函数．

例 44 设 $f(x)$ 为奇函数，$f(x)$ 可微，证明：$f'(x)$ 与 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 都是偶函数．

证 奇函数的导数是偶函数，偶函数的导数是奇函数，可以用定义（见第三章第一节例 1）证明 $f'(x)$ 为偶函数．

下面证$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数. 令$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则

$$\varphi(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_0^x f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=\varphi(x).$$

所以,$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是偶函数.

例 45 设$f(x)$在$[x,+\infty)$连续可导,且

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}\right],$$

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

证 因为$x\geqslant 1$时,$\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)\leqslant\frac{1}{x}$,所以$f'(x)\geqslant 0$,即$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调增加. 又

$$f'(x)\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)}\leqslant\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\leqslant\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}\ \sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x(x+1)}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

故
$$\int_1^x f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_1^x\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x.$$

比较定积分值,得$f(x)-f(1)\leqslant 1-\frac{1}{\sqrt{x}}\leqslant 1$. 知$f(x)\leqslant f(1)+1$,即$f(x)$有上界. 由于函数$f(x)$单调增加且有上界,所以$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在.

例 46 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$均收敛. 证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

证 因为$f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t+f(a)$,而$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$收敛,即

$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 存在,因而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

用反证法证 $A \neq 0$. 设 $A > 0$ ($A < 0$ 同样可证),则对 $A\exists\ M > 0$,使当 $x \geqslant M$ 时,有 $f(x) > \dfrac{A}{2}$. 此时

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^M f(t)\mathrm{d}t + \int_M^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\ &> \lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^M f(t)\mathrm{d}t + \int_M^x \frac{A}{2}\mathrm{d}t\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{A}{2}(x-M) + \int_a^M f(t)\mathrm{d}t = +\infty,\end{aligned}$$

从而推出与假设矛盾,所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

例 47 设 $f(x)\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ 0, & x = 0,\end{cases}$ 证明:$f'(0) = 0$.

证 先证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$(事实上,这里 x 既表示增量,又表示 $U^\circ(0)$ 内点).

设 $x > 0$ ($x < 0$ 类似可证),由积分第二中值定理,$\exists\ \xi_x \in \left[\dfrac{1}{2x},\dfrac{1}{x}\right]$,使得

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{1}{x}\int_x^{2x}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right| \xlongequal{u=1/t} \frac{1}{x}\left|\int_{1/2x}^{1/x}\frac{\sin 2u}{u^2}\mathrm{d}u\right|\\ &= \frac{4x^2}{x}\left|\int_{1/2x}^{\xi_x}\sin u\mathrm{d}u\right| = 4x\left|\cos\frac{1}{2x} - \cos\xi_x\right|\\ &\leqslant 8x \longrightarrow 0\ (x\longrightarrow 0^+).\end{aligned}$$

当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x} = A$ 时,有 $f'(0) = A$,故 $f'(0) = 0$.

实际上,若 $f'(0)$ 存在,则由

$$\frac{f(2x)-f(x)}{x} = 2\,\frac{f(2x)-f(0)}{2x} - \frac{f(x)-f(0)}{x},$$

当 $x\longrightarrow 0$ 时,有 $A = 2f'(0) - f'(0) = f'(0)$.

例 48 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$,$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$

$=0$，证明：至少存在两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f(x_1)=f(x_2)=0$.

证 由于$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，所以 $f(x)$ 必在$[a,b]$上变号. 由根的存在定理，$\exists\ x_1\in[a,b]$，$f(x_1)=0$.

又设 $f(x)$ 在$[a,b]$上只有惟一零点 x_1，则$(x-x_1)f(x)$ 在$[a,b]$上不变号，从而

$$\int_a^b(x-x_1)f(x)\mathrm{d}x\neq 0\Longrightarrow\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\neq 0$$

与题设矛盾. 因此至少有两点 $x_1,x_2\in[a,b]$，使

$$f(x_1)=f(x_2)=0,$$

例 49 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-1/\xi)f(\xi)$.

证 由 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$ 及积分中值定理知，至少存在一点 $\xi_1\in[0,1/k]\subset[0,1]$，使得

$$f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1).$$

在$[\xi,1]$上，令 $\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 在$[\xi_1,1]$上连续，在$(\xi_1,1)$内可导，且

$$\varphi(\xi_1)=f(1)=\varphi(1),$$

由罗尔定理知，至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$，使得

$$\varphi'(\xi)=e^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0,$$

即
$$f'(\xi)=(1-1/\xi)f(\xi).$$

例 50 设 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内二阶可导，且 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(2)=2\int_{1/2}^{1}f(x)\mathrm{d}x$. 证明：$\exists\ \xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证 由积分中值定理知，$\exists\ \xi_1\in[1/2,1]$，使

$$f(2)=2\int_{1/2}^{1}f(x)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{1}{2}\right)f(\xi_1)=f(\xi_1).$$

对 $f(x)$ 在 $(\xi_1,2)$ 内使用罗尔定理知，$\exists\ \xi_2\in(\xi_1,2)\subset(1/2,2)$，使 $f(\xi_2)=0$.

又由 $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)$ 知，依罗尔定理，$\exists\ \xi_3\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得 $f'(\xi_3)=0$. 于是，在 (ξ_3,ξ_2) 内再次使用罗尔定理知，$\exists\ \xi\in(\xi_3,\xi_2)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.

例 51 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同. 写出此切线方程，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解 由题设知 $f(0)=0,f'(0)=\left.\frac{e^{-(\arctan x)^2}}{1+x^2}\right|_{x=0}=1$，故所求切线方程为

$$y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\,\frac{f(2/n)-f(0)}{2/n}=2f'(0)=2.$$

例 52 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f'(0)=1$，且满足不等式

$$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0.$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

解 (1) 因为 $(x+1)f'(x)+(x+1)f(x)-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$，两边对 x 求导，得

$$(x+1)f''(x)=-(x+2)f'(x).$$

设 $u=f'(x)$，则建立微分方程求解之，有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{x+2}{x+1}u\Rightarrow f'(x)u=\frac{1}{x+1}ce^{-x}.$$

由 $f(0)=1,f'(0)+f(0)=0$，知 $f'(0)=-1\Rightarrow c=-1$. 于是

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

证 (2) 由$\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(0) = f(x) - 1$知，$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t$. 又当 $x \geqslant 0$ 时，有

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = 1 - e^{-x},$$

所以

$$e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

第三节 变上限积分与定积分的计算

主要内容

1. 若函数 $f(t)$ 在$[a,b]$上可积，$\forall\ x \in [a,b]$，定义变动上限积分函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

类似定义变动下限积分函数

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

$\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 统称为变限积分. 还可定义复合变限积分：

$$\int_a^{u(x)} f(x)\mathrm{d}t, \quad \int_{v(x)}^b f(t)\mathrm{d}t, \quad \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

2. 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，则 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数.

3. 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $\Phi(x)$ 与 $\Psi(x)$ 在$[a,b]$上可导，且

$$\Phi'(x) = f(x), \quad \Psi'(x) = -f(x),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[u(x)]u'(x) - f[v(x)]v'(x).$$

4. 微积分学基本定理 若函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则变动上限积分 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b]$ 在$[a,b]$上可导，且 $\Phi'(x) = f(x)$.

定理说明：只要 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上必有原函数，且 $\Phi(x)$ 即为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数.

5. 牛顿-莱布尼茨公式 设 f 在$[a,b]$上连续，若 F 是 f 在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

6. 换元积分定理 若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，且 $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, \quad t \in [\alpha,\beta]$，

(2) $\varphi(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上有连续的导数，

则有定积分换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

7. 分部积分定理 若 $u(x), v(x)$ 是$[a,b]$上的两个有连续导数的函数，则有定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

若在$[a,b]$上有连续的 $u^{(n+1)}(x)$ 和 $v^{(n+1)}(x)$，则有推广的分部积分公式

$$\int_a^b u \cdot v^{(n+1)}\mathrm{d}x = [u \cdot v^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v]\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

8. 一些常用公式

(1) 若 f 在$[-a,a]$上可积，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f \text{ 为奇函数}, \\ 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f \text{ 为偶函数}. \end{cases}$$

(2) 若 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上以 T 为周期的函数，且在任何区间 $[a, a+T]$ 上可积，则有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

即定积分与 a 无关.

(3) 若 $f(t)$ 为连续函数，则有代换公式

$$\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

(4) 若 $f(t)$ 为连续函数，则有瓦里士公式

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^n x\mathrm{d}x = \int_{0}^{\pi/2} \cos^n x\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1 \text{（即 } n \text{ 为奇数）}, \\ \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}, & n = 2m \text{（即 } n \text{ 为偶数）}. \end{cases}$$

疑 难 解 析

1. 怎样理解定积分的定义？

答　定积分（或称黎曼积分）是黎曼于 1854 年提出来的. 定积分定义是一个构造性定义，它利用对区间 $[a,b]$ 的一个分割 T，将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 Δ_i，并在 Δ_i 上任取一点 ξ_i，构造一个积分和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$，称为黎曼和. 当 $\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, \delta > 0$，使当 $\forall\, T$，只要 $\|T\| < \delta$，有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$，则称 f 在 $[a,b]$ 上可积，

I 即为 f 在$[a,b]$ 上的定积分.

黎曼积分允许被积函数有不连续点,但又不允许有"太多"的不连续点.黎曼积分的可积函数受到一定限制.

黎曼可积函数的积分运算不完全是微分(求导)运算的逆运算.即存在那样的黎曼可积函数 $f(x)$(如$[a,b]$上有有限个第一类间断点的函数),在进行积分运算$\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$后再进行微分运算$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)$,不能还原为函数 $f(x)$.

在$[a,b]$上的黎曼可积的函数列$\{f_n(x)\}$,它的极限函数 $f(x)$(即$\forall\ x\in[a,b]$,$\{f_n(x)\}$都收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$)在$[a,b]$上不一定仍然黎曼可积.

以上是定积分存在的缺陷.此缺陷导致了勒贝格积分的产生,从而推广了黎曼积分.

2. 使用换元积分定理要注意哪些问题?

答 换元积分定理即定积分的第二换元法.因为第一换元法实际上不写出中间变量,所以不考虑积分限的变更与变量间的对应问题.第二换元积分法则要注意:

(1) 要保证 $\varphi(t)$ 的值域包含在 $f(x)$ 的连续范围内,并在端点有对应 $\varphi(\alpha)=a$ 和 $\varphi(\beta)=b$,但不一定要求 $x=\varphi(t)$ 是单调且一一对应的.

(2) 变换后定积分$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 的上限 β 和下限 α 必须与原积分上限 b 和下限 a 相对应,同 α,β 的正、负、大、小无关.

方法、技巧与典型例题分析

本节的内容比较多,特别是变动上限积分函数与定积分计算涉及的面较广.以下我们逐个问题加以讨论.

一、变动上限积分函数

变动上限积分的特殊性是：它是一个函数，而且还可以是一个复合函数. 因此，研究变动上限积分就要像研究函数的全面性态那样，认真讨论、分析和论证. 还可以利用学过的所有方法并结合定积分概念来考察.

1. 利用变限积分函数求极限和论证极限

利用变限积分函数求极限，可以应用洛必达法则和定积分不等式进行. 在解题中注意验证条件.

例 1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_1^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2x^2}\mathrm{d}x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}$.

解 (1) 因为洛必达法则不能直接用于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}$，所以先求出$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，然后依海涅定理，得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)}{g(n)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，故由

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\ln(1+1/\sqrt{t})\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\overset{L'}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(1+1/\sqrt{x})}{1/\sqrt{x}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\overset{L'}{=}2\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)/(1+1/\sqrt{x})}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=2,$$

得　原极限 $=2$.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\sin x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2}\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x}{e^{2x^2}}$

$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}x}{e^{x^2}}\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}\mathrm{d}t\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+xe^{x^2}\cdot2x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+2x^2}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2x)\cos x}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin^2x)}{\sin^2x}\cdot\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$.

例 2 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x(1+\sin2t)^{1/t}\mathrm{d}t}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan x)^2\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{x^2}t^{3/2}\mathrm{d}t}{\int_0^x t(t-\sin t)\mathrm{d}t}$； (4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x}$.

解 (1) 原极限 $\left(\dfrac{0}{0}\right)\xlongequal{L'}\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\sin2x)^{\frac{1}{\sin2x}\cdot\frac{\sin2x}{2x}\cdot2}=e^2$.

(2) 原极限 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\int_0^x(\arctan t)^2\mathrm{d}t}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \xlongequal{L'} \lim_{x \to +\infty} (\arctan x)^2 = \frac{\pi^2}{4}.$$

(3) 原极限 $\left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x \to 0^+} \frac{(x^2)^{3/2} 2x}{x(x - \sin x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^3}{x - \sin x}$,

依泰勒公式 $x - \sin x = x^3/6 + o(x^3)$,则

$$原极限 = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^3}{x^3/6} = 12.$$

(4) 原极限 $\left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x \sqrt{\tan(\sin x)}}{\sec^2 x \sqrt{\sin(\tan x)}}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)} \right]^{1/2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\tan(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\tan x} \cdot \frac{\tan x}{\sin(\tan x)} \right]^{1/2} = 1.$$

例 3 确定常数 a, b 的值,使 $\lim_{x \to 0} \left[\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right]$ 为有限值,并求出极限.

解 利用泰勒公式 $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 + o(t^5)$,则

$$原极限 = \lim_{x \to 0} \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \int_0^x \left(1 - t^2 + \frac{1}{2} t^4 + o(t^5) \right) dt$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{a}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{b}{x^5} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^6) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\left(a - \frac{b}{3} \right) \frac{1}{x^2} + (1 + b) \frac{1}{x^4} + \frac{b}{10} + o(x) \right].$$

要使极限为有限值,应有 $a - \frac{b}{3} = 0, 1 + b = 0$,故 $a = -\frac{1}{3}, b = -1$,于是

$$原极限 = \lim_{x \to 0} \left[\frac{b}{10} + o(x) \right] = \frac{1}{10}.$$

例 4 确定 a, b, c,使得

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x [\ln(1 + t^2)]/t dt} = c \ (c \neq 0).$$

解　因为 $x \to 0$ 时，$ax - \sin x \to 0$，但 $c \neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t = 0,$$

故 $b = 0$. 由洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax - \sin x}{\int_b^x [\ln(1+t^3)]/t\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 0}\frac{ax - \sin x}{\int_0^x [\ln(1+t^3)]/t\mathrm{d}t} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x\to 0}(a - \cos x)\Big/\left[\frac{\ln(1+x^3)}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x(a - \cos x)}{x^3} \quad (\text{无穷小代换})$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{a - \cos x}{x^2} = c.$$

因分母当 $x \to 0$ 时极限为零，故 $\lim\limits_{x\to 0}(a - \cos x) = 0$，解得 $a = 1$. 从而

$$c = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 5　讨论以下函数的连续性：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1}, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t, & x < 0. \end{cases}$$

解　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2(e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2(e^x - 1)}{2(e^x - 1)} \cdot 2 = 2 = f(0)$,

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t \left(\frac{0}{0}\right) \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^-}\cos x^2 = 1 \neq 2.$$

所以，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处间断.

2. 求变限积分函数的导数

求变限积分函数的导数，只需用公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x).$$

其中 $f(t)$ 为连续函数，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为可导函数.

例 6　求下列变限积分函数的导数：

(1) $\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$；　　(2) $\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$；

(3) $\int_{2x}^{\cos x}t\sin t^2 dt$；　　(4) $e^{-\int_0^x e^{-t^2}dt}\int_0^x f(t)dt$.

解　(1) $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}-\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}$.

(2) $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos(\pi t^2)dt$

$=-\sin x\cos(\pi\cos^2 x)-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$

$=-\sin x[\cos(\pi-\pi\cos^2 x)]-\cos x\cos(\pi\sin^2 x)$

$=(\sin x-\cos x)\cos(\pi\sin^2 x)$.

(3) $\frac{d}{dx}\int_{2x}^{\cos x}t\sin t^2 dt$

$=-\sin x\cdot\cos x\sin(\cos x)^2-2\cdot 2x\cdot\sin 4x^2$

$=-\frac{1}{2}[\sin 2x\sin(\cos x)^2+8x\sin 4x^2]$.

(4) $\frac{d}{dx}\left[e^{-\int_0^x e^{-t^2}dt}\int_0^x f(t)dt\right]$

$=e^{-\int_0^x e^{-t^2}dt}\cdot(-e^{-x^2})\int_0^x f(t)dt+e^{-\int_0^x e^{-t^2}dt}\cdot f(x)$

$=e^{-\int_0^x e^{-t^2}dt}\left[f(x)-e^{-x^2}\int_0^x f(t)dt\right]$.

例 7　求下列方程确定函数的导数：

(1) $\int_0^y e^t dt+\int_0^x\cos t dt=0$，求$\frac{dy}{dx}$；

(2) $\int_1^y\frac{\sin t}{t}dt+\int_{1/x}^1 e^{-t^2}dt=0$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

解　利用隐函数求导方法.

(1) 两边对 x 求导，得

$$e^y\frac{dy}{dx}+\cos x=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x}{e^y}.$$

(2) 两边对 x 求导,得

$$\frac{\sin y}{y}\frac{dy}{dx}-e^{-1/x^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2\sin y}e^{-1/x^2}.$$

由于 $x=1$ 时,$\int_1^y\frac{\sin t}{t}dt=0$,故 $y=1$,代入得

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=-\frac{1}{1\cdot\sin 1}e^{-1}=-\frac{1}{e\sin 1}.$$

例 8 求下列函数的导数:

(1) $y=y(x)$ 由方程 $\sin x-\int_1^{y-x}e^{-t^2}dt$ 确定,求$\frac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $x=\int_0^y\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$,求$\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^2x}{dy^2}$;

(3) $x=\int_0^t\sin u du,y=\int_0^t\cos u du$,求$\frac{dy}{dx}$;

(4) $x=\int_0^{t^2}\sin u^2du,y=\cos t^4$,求$\frac{dy}{dx}$.

解 题(1)、题(2) 是隐函数求导问题,题(3)、题(4) 是参数方程求导问题.

(1) 两边对 x 求导,得

$$\cos x-e^{(y-x)^2}(y'-1)=0\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=e^{(y-x)^2}\cos x+1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin xe^{(y-x)^2}+2(y-x)\left(\frac{dy}{dx}-1\right)e^{(y-x)^2}\cos x$$

$$=e^{(y-x)}[2(y-x)\cos^2xe^{(y-x)^2}-\sin x].$$

(2) 两边对 x 求导,得

$$1=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{dx}\Longrightarrow\frac{dy}{dx}=\sqrt{1+y^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\sqrt{1+y^2}=y.$$

两边对 y 求导,得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y}{1+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=-\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)^3}}.$$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos t}{\sin t}=\cot t.$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{-\sin t^4\cdot 4t^3}{\sin t^4\cdot 2t}=-2t^2.$

例 9 设 $f(x)$ 为定义于 $x\geqslant 1$ 上的如下连续函数，求 $\frac{dF}{dx}$.

$$F(x)=\int_0^x\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(t)dt.$$

解 将积分号内 x 移到积分号外后求导，得

$$\frac{dF}{dx}=\left(-\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_0^x f(t)dt+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x).$$

例 10 设 $f(x)=\int_0^{g(x)}\frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$，求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$，其中

$$g(x)=\int_0^{\cos x}[1+\sin(t^2)]dt.$$

解 因为

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\sqrt{1+g^3(x)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+g^3(x)}}[1+\sin(\cos^2x)](-\sin x),$$

而
$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^0[1+\sin(t^2)]dt=0,$$

所以
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=[1+\sin 0](-1)=-1.$$

例 11 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\right]dt$，求 $f''(x)$.

解 因为，依分部积分法，有

$$f(x)=\left[t\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}du\right]\Bigg|_0^x-\int_0^x t\sqrt{1+\sin^4 t}\cos t dt$$

$$= x\int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\,\mathrm{d}u - \int_0^x t\sqrt{1+\sin^4 t}\cos t\,\mathrm{d}t,$$

故 $f'(x) = \int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\,\mathrm{d}u,\quad f''(x) = \sqrt{1+\sin^4 x}\cos x.$

例 12 设 $f(x)$ 连续，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t f(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t$.

解 因为 $\int_0^x t f(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t \xlongequal{u=x^2-t^2} \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u$.

所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_0^x t f(x^2-t^2)\,\mathrm{d}t\right] = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} f(u)\,\mathrm{d}u = x f(x^2)$.

3. 用变限积分函数研究函数

利用变限积分函数研究函数的性态在理论上更具备充分性，因而反映的函数性质也更有说服力. 在利用变限积分函数研究函数时，一定要先考察函数的可积性，并严格应用求导或求积法则.

例 13 研究 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性与可导性.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ \dfrac{\int_0^{x^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}, & x>0. \end{cases}$$

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x} \xlongequal{L'} \dfrac{\sin x}{1} = 0$,

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x} \xlongequal{L'} \lim_{x\to0^+}\cos x^4\cdot 2x = 0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0 = f(0)$，函数在 $x=0$ 连续.

又 $f'_-(0) = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$,

$$f'_+(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\cos t^2\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

$$\xlongequal{L'} \lim_{x\to 0^+} \frac{2x\cos x^4}{2x} = 1.$$

所以 $f'_-(0) \neq f'_+(0)$，函数在 $x=0$ 不可导.

例 14 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足如下方程，求 $f(2)$.

$$\int_0^{x^2(x+1)} f(t)\mathrm{d}t = x.$$

解 方程两边对 x 求导，得

$$f[x^2(1+x)]\cdot(2x+3x^2) = 1,$$

显然，当 $x=1$ 时，$f[x^2(1+x)] = f(2)$. 故

$$f(2) = \frac{1}{2x+3x^2}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{5}.$$

例 15 对函数 $f(x)$ 求 $f'(0)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t}{x^3} \xlongequal{L'} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

例 16 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，证明：$F(x) = \dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 (a,b) 内是单调减少函数.

证 依积分中值定理，$\exists\, \xi \in [a,x] \subset [a,b]$，使

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)(a-x) \Rightarrow F(x) = f(\xi).$$

又 $$F'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{x-a}f(x)$$

$$= \frac{1}{x-a}[f(x) - f(\xi)],$$

由 $f'(x)<0$ 知 $f(x)$ 单调减少，$f(x)-f(\xi)<0$，所以 $F'(x)<$

0,故 $F(x)$ 是单调减少函数.

例 17 证明:若 $f(x)$ 是周期等于 T 的连续函数,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

证 $\forall\ x>T$,$\exists\ n\in\mathbf{N}$,使 $nT\leqslant x\leqslant(n+1)T$,而 $x\to+\infty\Leftrightarrow n\to+\infty$. 且知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 设 $x=nT+u$,$0<u<T$,则

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{nT+u}\int_0^{nT+u}f(t)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[\int_0^T+\int_T^{2T}+\cdots+\int_{nT}^{nT+u}\right]f(t)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_{nT}^{nT+u}f(t)\mathrm{d}t\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nT+u}\left[n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\ \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\ \text{有界}\right)\\
&=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

例 18 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,证明:$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期函数或者是周期函数与线性函数之和.

证

$$\begin{aligned}
F(x+T)&=\int_a^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}f(t)\mathrm{d}t\\
&=F(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=F(x)+c.
\end{aligned}$$

当 $c=0$ 时,$F(x+T)=F(x)$,故 $F(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

当 $c\neq0$ 时,记 $\varphi(x)=F(x)-\frac{c}{T}x$,则

$$\begin{aligned}
\varphi(x+T)&=F(x+T)-\frac{c}{T}(x+T)=F(x+T)-c-\frac{c}{T}x\\
&=F(x)-\frac{c}{T}x=\varphi(x),
\end{aligned}$$

即 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 所以

$$F(x)=\varphi(x)+\frac{c}{T}x$$

是周期函数与线性函数之和.

例 19 设 $\varphi(x)=\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t, x\in(-1,1)$,证明:

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2).$$

证 $[\varphi(x)+\varphi(-x)]'$

$$=\left[\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]'+\left[\int_0^{-x}\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]'$$

$$=\frac{\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\ln(1-x^2),$$

又 $\left[\frac{1}{2}\varphi(x^2)\right]'=\frac{1}{2}\left[\int_0^{x^2}\frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\right]'=\frac{1}{x}\ln(1-x^2),$

由 $$[\varphi(x)+\varphi(-x)]'=\left[\frac{1}{2}\varphi(x^2)\right]',$$

知 $$\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2)+c.$$

取 $x=0$ 代入,得 $c=0$,所以 $\varphi(x)+\varphi(-x)=\frac{1}{2}\varphi(x^2)$.

例 20 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t, x\in(0,+\infty)$,求 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)$.

解 先求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,作代换 $u=\frac{1}{t}$,得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\int_1^{1/x}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln(1/u)}{1+1/u}\mathrm{d}\,\frac{1}{u}=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x\frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u-\int_1^x\frac{\ln u}{1+u}\mathrm{d}u=\int_1^x\frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u-f(x),$$

所以 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\int_1^x\frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\ln u)^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}\ln^2 x.$

例 21 设 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$ 上可积,且 >0,求函数

$$F(x)=\int_1^x\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)-\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)\right]f(t)\mathrm{d}t$$

的极值.

解 对 $F(x)$ 求导,得

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t-\int_1^x\left(\frac{2}{t}+\ln t\right)f(t)\mathrm{d}t\right]$$
$$=\left(-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t+\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$
$$-\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)f(x)$$
$$=\left(-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

令 $F'(x)=0$,由$\int_1^x f(t)\mathrm{d}t>0$ 知,驻点为 $x=2$. 而当 $x<2$ 时,$F'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$F'(x)>0$. 所以当 $x=2$ 时,$F(x)$ 有极小值 $F(2)$.

例 22 证明:$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

证 $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left[x\mathrm{e}^{x^2}-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{x^2}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}t-\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right]$

$$=\frac{1}{x^2}\int_0^x(\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{t^2})\mathrm{d}t>0,$$

所以,$f(x)$ 在$(0,+\infty)$ 内单调增加.

例 23 设 $f(x)=\int_0^x(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t, n\in\mathbf{N}$,证明:

$$f(x)\leqslant\frac{1}{(2n+2)(2n+3)},\ x\geqslant 0.$$

证 因为 $f'(x)=(x-x^2)\sin^{2n}x=x(1-x)\sin^{2n}x$,则 $f'(x)$ 与 $x(1-x)$ 有相同符号. 当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x=1$ 时,$f'(-1)=0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值,所以

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1(t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1(t-t^2)t^{2n}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

例 24 设 $f(x)=\int_0^x(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t$,证明:当 $x>0$ 时,$f(x)\leqslant\frac{n}{6}$.

证 因为 $f'(x)=(1-x)\ln(1+nx)$,令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=1$. 当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$. 所以 $f(1)$ 为最大值.

$$f(x)\leqslant f(1)=\int_0^1(1-t)\ln(1+nt)\mathrm{d}t.$$

因为 $t>0,0<\ln(1+nt)\leqslant nt$,故

$$f(x)\leqslant f(1)\leqslant\int_0^1(1-t)nt\mathrm{d}t=\frac{n}{6}.$$

例 25 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $f(x)>0$. 设

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t,$$

证明:(1) $F'(x)\geqslant 2$;(2) $F(x)$ 在$[a,b]$上只一个零点.

证 (1) $F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}=\frac{f^2(x)+1}{f(x)}\geqslant\frac{2f(x)}{f(x)}=2.$

(2) 因为 $F'(x)\geqslant 2$,所以 $F(x)$ 是单调增加函数. 又

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t>0,$$

所以 $F(x)$ 在$[a,b]$上单调增加且两端点异号,由连续函数的零点定理,$F(x)$ 在$[a,b]$内有惟一的零点.

二、定积分的计算与证明

1. 定积分的计算

一般来说,定积分的计算只要求出被积函数的一个原函数,再应用牛顿 - 莱布尼茨公式即可得出结果. 求原函数的技巧已在不定积分中叙述,对于一些特殊问题,如根式、绝对值、分段函数、对称区间上的奇偶函数等,是我们应该重视的.

先用牛顿 - 莱布尼茨公式计算定积分.

例 26 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$.

解　由于$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$的几何意义是以原点为圆心、$R$为半径的上半圆的面积，所以

$$\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi R^2,\quad \int_0^{R} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi R^2.$$

由此可以得出：

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$.

(2) $$\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}(x-1) = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

例 27　计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^2 x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{1/2}^{1/2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\arcsin\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-a}^{a}[(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x$，$f(x)$连续.

解　由于积分区间是对称区间，因此可以利用对称区间上奇偶函数的积分性质.

(1) 被积函数是偶函数，故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x-\cos^2 x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos x}\sin x\mathrm{d}x$$
$$= -2\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{1/2}\mathrm{d}\cos x = -\frac{4}{3}(\cos x)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

(2) 被积函数是偶函数，故

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = 2\int_0^{1/2}(\arcsin x)^2\mathrm{d}\arcsin x$$
$$= 2\cdot\left[\frac{1}{3}(\arcsin x)^3\right]_0^{1/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \frac{\pi^3}{324}.$$

(3) 因为 $\ln\frac{1-x}{1+x}$ 是奇函数，而 $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，所以被积函数是奇函数. 故

$$\int_{-1/2}^{1/2}\ln\frac{1-x}{1+x}\arcsin\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=0.$$

(4) 因为 $(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)$

$$=x[f(x)+f(-x)]+\mathrm{e}^{\cos x}[f(x)-f(-x)],$$

而 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数，$f(x)-f(-x)$ 是奇函数，x 是奇函数，$\mathrm{e}^{\cos x}$ 是偶函数，所以被积函数是奇函数，故

$$\int_{-a}^{a}[(x+\mathrm{e}^{\cos x})f(x)+(x-\mathrm{e}^{\cos x})f(-x)]\mathrm{d}x=0.$$

例 28 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^2\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x$； (2) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4x\mathrm{d}x$.

解 当不能直接求出原函数时，可采用分段积分，设法消去不易积出部分.

(1) $I=\int_0^2=\int_0^1+\int_1^2=I_1+I_2$,

$$\begin{aligned}I_2&=\int_1^2\frac{x-2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x-2=t}\int_1^0\frac{t}{\mathrm{e}^{2-t}+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{2}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}\mathrm{d}x\\&=-I_1+2\int_1^2\frac{\mathrm{e}^x\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}=-I_1+2\int_1^2\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}\\&=-I_1+\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

所以 $I=I_1-I_1+\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\mathrm{e}}\left(\arctan\mathrm{e}-\frac{\pi}{4}\right)$.

(2) $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{e}^x+1-1}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4x\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x\mathrm{d}x - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x,$$

而 $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{\sin^4 t}{1+\mathrm{e}^{-t}}\mathrm{d}t \text{（同乘以 } \mathrm{e}^t\text{）}$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}\sin^4 t\mathrm{d}t = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\sin^4 x\mathrm{d}x,$$

代回，移项除以 2，得

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\pi.$$

例 29 计算下列积分：

(1) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$； (2) $\int_0^{N\pi} \sqrt{1-\sin 2x}\mathrm{d}x, N \in \mathbf{N}$.

解 对于周期函数（周期为 T），有以下积分性质：

$$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{nT} f(x)\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0, \int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} \cos x\mathrm{d}x = 0.$$

(1) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= 3\cdot\frac{\pi}{2} + 4\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\mathrm{d}\theta.$$

其中 $\cos 2\theta$ 的周期 $T=\pi$，$\cos 4\theta$ 的周期 $T=\pi/2$，依上面公式，$\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta = 0, \int_0^{\pi/2} \cos 4\theta\mathrm{d}\theta = 0$，故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

(2) $\int_0^{N\pi}\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$ 中 $\sin 2x$ 周期 $T=\pi$，故

$$I=N\int_0^{\pi}\sqrt{(\cos x-\sin x)^2}\,dx$$

$$=N\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)dx+N\int_{\pi/4}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=2\sqrt{2}N.$$

例 30 计算下列积分：

(1) $\int_1^2\frac{x}{x^2+x+1}dx$；　　(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2(1+x^2)}$；

(3) $\int_0^1 e^{-2x^2+\ln x}dx$；　　(4) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-16e^{-x}}$.

解 (1) $\int_1^2\frac{x\,dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{2x+1-1}{x^2+x+1}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2+3/4}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|\Big|_1^2-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{7}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{5}{\sqrt{3}}-\arctan\sqrt{3}\right).$$

(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2(1+x^2)}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}dx-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=-\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}}-\arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{12}.$$

(3) $\int_0^1 e^{-2x^2+\ln x}dx=\int_0^1 e^{-2x^2}x\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-2x^2}d(-2x^2)$

$$=-\frac{1}{4}e^{-2x^2}\Big|_0^1=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e^2}-1\right).$$

(4) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-16e^{-x}}=\int_0^1\frac{e^x}{(e^x)^2-16}dx=\int_0^1\frac{de^x}{(e^x-4)(e^x+4)}$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1\left(\frac{1}{e^x-4}-\frac{1}{e^x+4}\right)de^x=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{e^x-4}{e^x+4}\right|\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{8}\left(\ln\left|\frac{e-4}{e+4}\right| - \ln\frac{3}{5}\right).$$

例 31 计算下列积分：

(1) $\int_{-2}^{5} |x^2 - 2x - 3| dx$； (2) $\int_{0}^{1} t|t - x| dt$；

(3) $\int_{-4}^{4} |x| \sqrt{16 - x^2} dx$； (4) $\int_{-1}^{1} |e^{2x} - e^{x}| dx$；

(5) $\int_{0}^{\pi} \sqrt{\sin^3\theta - \sin^5\theta} dx$； (6) $\int_{a}^{b} |2x - a - b| dx$.

解 由于被积函数含有(或隐含)绝对值记号，因此要根据被积函数在部分区间上的正负，分区间求积.

(1) 因为$(-2,-1)$和$(3,5)$上被积函数大于零，在$(-1,3)$上被积函数小于零，所以

$$I = \int_{-2}^{-1}(x^2 - 2x - 3)dx - \int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)dx + \int_{3}^{5}(x^2 - 2x - 3)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Big|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 2x\right)\Big|_{-1}^{3} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right)\Big|_{3}^{5} = \frac{71}{3}.$$

(2) 当 $x < 0$ 时，有

$$\int_0^1 t|t - x|dt = \int_0^1 t(t - x)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{x}{2};$$

当 $x > 1$ 时，有

$$\int_0^1 t|t - x|dt = \int_0^1 t(x - t)dt = \left(\frac{t^2}{2}x - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{x}{2} - \frac{1}{3};$$

当 $0 < x < 1$ 时，有

$$\int_0^1 t|t - x|dt = \int_0^x t(x - t)dt + \int_x^1 t(t - x)dt$$

$$= \left(\frac{t^2}{2}x - \frac{t^3}{2}\right)\Big|_0^x + \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}x\right)\Big|_x^1 = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} + \frac{1}{3}.$$

(3) $\int_{-4}^{4} |x| \sqrt{16 - x^2} dx$

$$=\int_{-4}^{0}-x\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x+\int_{0}^{4}x\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(16-x^2)^{1/2}\mathrm{d}(16-x^2)$$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{4}(16-x^2)^{1/2}\mathrm{d}(16-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(16-x^2)^{3/2}\right]\Big|_{-4}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(16-x^2)^{3/2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\frac{1}{3}(64+64)=\frac{128}{3}.$$

(4) $\int_{-1}^{1}|\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x$

$$=\left(\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$=\mathrm{e}+\frac{1}{2\mathrm{e}^2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^2+\frac{1}{\mathrm{e}}-3.$$

(5) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{\mathrm{sinm}^3\theta-\sin^5\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{0}^{\pi}|\cos\theta|(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{0}^{\pi/2}\cos\theta(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi/2}^{\pi}(-\cos\theta)(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{0}^{\pi/2}(\sin\theta)^{3/2}\mathrm{d}\sin\theta=2\cdot\frac{2}{5}(\sin\theta)^{5/2}\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{4}{5}.$$

(6) 记 $f(x)=|2x-a-b|=2\left|x-\frac{a+b}{2}\right|$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}-x\right)=2|-x|=2|x|=f\left(\frac{a+b}{2}+x\right),$$

故 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称，有

$$\int_{a}^{b}|2x-a-b|=2\int_{(a+b)/2}^{b}2\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$=4\int_{(a+b)/2}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}.$$

例 32 计算下列积分：

(1) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & x\geqslant 0,\\ 1+x^2, & x<0,\end{cases}$ 求 $\int_{-1}^{2}f(2x-1)\mathrm{d}x$；

(2) $\max\{x,x^2\}=\begin{cases}x^2, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 求$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0,\end{cases}$ 求$\int_0^2 f(x-1)dx$；

(4) $f(x)=x,\ x\geqslant 0,\quad g(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi/2,\\ 0, & x>\pi/2,\end{cases}$

求$\int_0^x f(t)g(x-t)dt\ (x\geqslant 0)$.

解　分段函数的积分要分段计算.对于函数中变量的代换，要注意准确性.

(1) $f(2x-1)=\begin{cases}e^{-2x+1}, & x\geqslant 1/2,\\ 1+(2x-1)^2, & x<1/2.\end{cases}$

$$\int_{-1}^{2}f(2x-1)dx=\int_{-1}^{1/2}[1+(2x-1)^2]dx+\int_{1/2}^{2}e^{1-2x}dx$$

$$=\left[x+\frac{1}{6}(2x-1)^3\right]\Big|_{-1}^{1/2}-\frac{1}{2}e^{1-2x}\Big|_{1/2}^{2}=\frac{1}{2}(13-e^{-3}).$$

(2) $$\int_{-2}^{2}\max\{x,x^2\}dx=\int_{-2}^{0}x^2dx+\int_0^1 xdx+\int_1^2 x^2dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{11}{2}.$$

(3) $f(x-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ \dfrac{1}{1+e^{x-1}}, & x<1.\end{cases}$

$$\int_0^2 f(x-1)dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_0^1\frac{dx}{1+e^{x-1}}$$

$$=\ln|x|\Big|_1^2+\int_0^1\frac{e^{1-x}}{1+e^{1-x}}dx=\ln 2-\int_0^1\frac{d(e^{1-x}+1)}{e^{1-x}+1}$$

$$=\ln 2-\ln|e^{1-x}+1|\Big|_0^1=\ln(e+1).$$

(4) 设 $u=x-t$，则

$$I=\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(x-u)g(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^x f(x-t)g(t)\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x-t)=x-t, x\geqslant t, g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leqslant t\leqslant \pi/2,\\ 0, & t>\pi/2,\end{cases}$

故 $$I=\begin{cases}\int_0^x (x-t)\sin t\mathrm{d}t=x-\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ \int_0^{\pi/2}(x-t)\sin t\mathrm{d}t=x-1, & x>\pi/2.\end{cases}$$

2. 用换元法计算与证明定积分

换元法计算定积分的关键是第二换元法的换元积分公式中“换元必须换限”，必须准确实现.

例 33 计算下列积分：

(1) $\int_1^3 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}$；

(3) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$； (4) $\int_{1/\pi}^{2/\pi}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $$\int_1^3 \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\arctan\sqrt{x}\,2\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}$$
$$=2\int_1^3 \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}\arctan\sqrt{x}=(\arctan\sqrt{x})^2\Big|_1^3$$
$$=(\arctan\sqrt{3})^2-(\arctan 1)^2=\frac{7}{144}\pi^2.$$

(2) $$\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\sqrt{x})}=\int_1^4\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$$
$$=\int_1^4\frac{2\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}\sqrt{x}$$
$$=2\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right|\Big|_1^4=2\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{3}{4}.$$

(3) $\int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\int_0^1 \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}$

$= -\ln|1+e^{-x}|\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$

(4) $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = -\int_{1/\pi}^{2/\pi}\sin\frac{1}{x}d\frac{1}{x} = \int_{1/\pi}^{2/\pi}d\cos\frac{1}{x}$

$= \cos\frac{1}{x}\Big|_{1/\pi}^{2/\pi} = 1.$

例 34 计算下列积分：

(1) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$；　　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$；

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解 本例用第二换元法的三角代换求解.

(1) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$\xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t(1-\sin t)}{\cos t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2}(\sin t - \sin^2 t)dt$

$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$

(利用$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx$ 的瓦里士公式).

(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx \xlongequal{x=a\sin t} \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t a^2\cos^2 t dt$

$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4t)dt$

$= \frac{a^4}{8}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a^4}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^4}{16}.$

(3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} \xlongequal{x=\tan t} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 t}{\tan t\cdot\sec t}dt$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}(\sin t)^{-1}d\sin t = -(\sin t)^{-1}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}$

$= \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

(4) $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \xlongequal{x=\sec t} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \tan t} dt = t \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{12}$.

例 35 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$；　　(2) $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1}$；

(3) $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$；　　(4) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$.

解 (1) $\int_{-1}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}} \xlongequal{\sqrt{5-4x}=t} \int_{3}^{1} \frac{(5-t^2)(-t/2)}{4t} dt$

$= \int_{1}^{3} \frac{1}{8}(5-t^2) dt = \left(\frac{5}{8}t - \frac{1}{24}t^3\right)\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{6}$.

(2) $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}-1} \xlongequal{\sqrt{1-x}=t} \int_{1/2}^{0} \frac{-2t}{t-1} dt$

$= 2\int_{0}^{1/2} \frac{t+1-1}{t-1} dt = 2[t - \ln(t-1)]\Big|_{0}^{1/2} = 1 - 2\ln 2$.

(3) $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx \xlongequal{\sqrt{e^x-1}=t} \int_{0}^{2} \frac{(1+t^2)t}{t^2+4} \frac{2t dt}{1+t^2}$

$= \int_{0}^{2} \frac{2t^2}{t^2+4} dt = 2\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt$

$= \left[2t - 4\arctan\frac{t}{2}\right]\Big|_{0}^{2} = 4 - \pi$.

(4) $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx \xlongequal{e^{-x}=\sin t} \int_{\pi/2}^{\pi/6} \cos t\left(-\frac{\cos t}{\sin t}\right) dt$

$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\sin^2 t}{\sin t} dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t dt$

$= \ln|\csc t - \cot t|\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \cos t\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 36 计算下列积分：

(1) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$；　　(2) $\int_{0}^{1} \frac{\arctan x}{1+x} dx$；

(3) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}} dx$；

(4) $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx.$

解 (1) 令 $x=\tan t, dx=\sec^2 t dt$, 则

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\ln(1+\tan t)}{1+\text{tna}^2 t}\cdot \sec^2 t dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt \xlongequal{t=\frac{\pi}{4}-u} \int_{\pi/4}^0 \ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln\left[1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right]du = \int_0^{\pi/4} \ln\frac{2}{1+\tan u}du$$

$$= \int_0^{\pi/4} \ln 2 du - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan u)du = \frac{\pi}{2}\ln 2 - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt.$$

出现循环,移项得

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{1+x^2}dx = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan t)dt = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(2) 令 $\arctan x = \frac{\pi}{4} - \arctan t$, 由 $\arctan x + \arctan t = \frac{\pi}{4}$, 得 $\tan(\arctan x - \arctan t) = 1$,

故 $$\frac{x+t}{1+xt} = 1 \Rightarrow x = \frac{1-t}{1+t}, \quad dx = \frac{-2}{(1+t)^2}dt.$$

于是

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = -\int_1^0 \frac{\pi/4 - \arctan t}{1+(1-t)/(1+t)} \cdot \frac{2dt}{(1+t)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{\pi/4 - \arctan t}{2/(1+t)} \frac{2dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx.$$

移项得

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}dx = \frac{\pi}{8}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(3) $$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}dx \xlongequal{x=\pi/2-t} -\int_{\pi/2}^0 \frac{e^{\cos t}}{e^{\cos t}+e^{\sin t}}dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}dx.$$

移项得 $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\sin x}+e^{\cos x}}{e^{\sin x}+e^{\cos x}}dx=\frac{\pi}{2},$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{e^{\sin x}}{e^{\cos x}+e^{\sin x}}dx=\frac{\pi}{4}.$$

(4) $$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$$

$$\underline{\underline{9-x=t+3}}-\int_4^2\frac{\sqrt{\ln(t+3)}dt}{\sqrt{\ln(t+3)}+\sqrt{\ln(9-t)}}$$

$$=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(x+3)}dx}{\sqrt{\ln(x+3)}+\sqrt{\ln(9-x)}}.$$

移项得 $$2I=\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}dx=2,$$

故 $$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}=1.$$

题(3)、题(4)两积分式的特点是，被积函数分母有两项，分子是分母中的一项. 采用变换时，要善于设计，使分子变为分母中的另一项，而分母不变；积分限不变或上、下限互换.

对三角函数有理式与其它初等函数组合或复合成的被积函数，进行代换时注意到：

(1) 积分区间对称时，可取 $x=-t$；

(2) 积分区间为 $[0,\pi]$ 时，可取 $x=\pi-t$；

(3) 积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，可取 $x=\frac{\pi}{2}-t$；

(4) 积分区间为 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 时，可取 $x=\frac{\pi}{4}-t$.

这样，原积分分解成若干可抵消或容易积分的积分. 例题如下.

例 37 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$； (2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3x}{1+\cos^2x}dx$.

解 (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t, dx=-dt$，则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$$

$$=\int_{\pi/2}^0\frac{\cos^{10}t-\sin^{10}t}{4-\cos t-\sin t}d(-t)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx.$$

移项得 $$2I=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x+\cos^{10}x-\sin^{10}x}{4-\cos x-\sin x}dx=0,$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx=0.$$

(2) $$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dx \xlongequal{x=\pi-t} \int_{\pi}^0\frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}(-dt)$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

移项得 $$2I=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}=-\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}d\cos x$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\frac{2-(1+\cos^2 x)}{1+\cos^2 x}d\cos x$$

$$=-2\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}+\pi\cos x\Big|_0^{\pi}=\pi^2-2\pi,$$

故 $$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}(\pi^2-2\pi).$$

例 38 证明:若 $f(x)$ 为连续的奇函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数;若 $f(x)$ 为连续的偶函数,则 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

证 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$,于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt \xlongequal{t=-u} \int_0^x f(-u)dx=-\int_0^x f(-t)dt.$$

(1) 当 $f(-t)=-f(t)$ 即 $f(t)$ 为奇函数时,有

$$F(-x)=-\int_0^x[-f(t)]dt=\int_0^x f(t)dt=F(x),$$

知 $F(x)$ 是偶函数.

(2) 当 $f(-t)=f(t)$,即 $f(t)$ 为偶数函数时,有

$$F(-x)=-\int_0^x f(t)dt=-F(x),$$

知 $F(x)$ 是奇函数.

例 39 设函数 $f(x),g(x)$ 在$[-a,a]$上连续,$g(x)$ 为偶函数,且 $f(x)+f(-x)\equiv A$(常数),证明:

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x.$$

并计算
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x.$$

证 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x$,

在等式右边第一式中令 $t=-x$,有

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

利用上式,令 $f(x)=\arctan e^{x}$,则

$$f(x)+f(-x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}\equiv\frac{\pi}{2},$$

$g(x)=|\sin x|$ 是偶函数,故

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi/2}\sin x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

这里若令 $F(x)=\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}$,可证 $F'(x)\equiv 0$,故

$$F(x)\equiv F(0)=\arctan 1+\arctan 1=\frac{\pi}{2}.$$

例 40 证明:

$$\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

并计算
$$\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^{2}x}\mathrm{d}x.$$

证
$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x &\xlongequal{x=\pi-t}\int_{\pi}^{0}(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t) \\ &= \int_{0}^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

移项得 $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

又 $$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

在等式右边第二式中令 $t = \pi - x$，有

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = -\int_{\pi/2}^{0} f(\sin t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故 $$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

从而 $$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

在$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$中令 $f(\sin x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$，有

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\pi\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\cos x}{1+\cos^2 x} = \pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \pi\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 41 证明：

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x,$$

并计算 $$\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

证 $$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\pi/2}^{0} f(\cos t)(-\mathrm{d}t)$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x,$$

又由上例知$\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$，故

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

而 $$\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\sin 2x}{2} dx \xlongequal{2x=t} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln \sin t dt - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \ln 2 dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin x dx - \frac{\pi}{2}\ln 2,$$

移项得
$$\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2.$$

同时得
$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例 42 利用$\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$，计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^a}$； (2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$.

解 $\int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x) dx$ 是显然的.

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^a} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\cot x)^a}$，于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(\tan x)^a} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{1+(\tan x)^a} + \frac{1}{1+(\cot x)^a}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1+(\tan x)^a}{1+(\tan x)^a} dx = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$，于是

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^4 x - \sin^4 x}{1 + 3\sin x \cos x} dx = 0.$$

例 43 计算 $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$，并证明：

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

证 将$(1-x^2)^n$ 展开，即

$$I_n = \int_0^1 [1 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - C_n^3 x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n}] dx$$

$$= 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

又 $\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x \xlongequal{x=\sin t} \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{2n} \cos t \mathrm{d}t$

$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t \mathrm{d}t$（瓦里士公式）$= \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$

即证 $1 - \dfrac{C_n^1}{3} + \dfrac{C_n^2}{5} - \dfrac{C_n^3}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$

例 44 证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0.$

证 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x \xlongequal{x^2=u} \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$

$\xlongequal{t=u-\pi} \dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u + \int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u\right]$

$= \dfrac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \dfrac{\sin u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u - \int_0^{\pi} \dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\pi}} \mathrm{d}t\right]$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) \sin u \mathrm{d}u.$

显然 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}} - \dfrac{1}{\sqrt{u+\pi}}\right) \sin u > 0\ (0 < u < \pi),$

于是 $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0.$

例 45 证明下列等式：

(1) $\int_a^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\ (a > 0)$；

(2) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x] \mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \ln f(x+t) \mathrm{d}t = \int_0^x \ln \dfrac{f(1+t)}{f(t)} \mathrm{d}t + \int_0^1 \ln f(t) \mathrm{d}t$；

(4) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) \mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} f(|\cos x|) \mathrm{d}x.$

证 (1) $\int_a^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \xlongequal{t=1/x} \int_{1/t}^1 \dfrac{1}{1+(1/t)^2}\left(-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)$

$= \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_1^{1/a} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$

(2) $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \xlongequal{x=a+(b-a)t} \int_0^1 f[a+(b-a)t](b-a) \mathrm{d}t$

$$= (b-a)\int_0^1 f[a+(b-a)x]\mathrm{d}x.$$

(3) $\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t \xlongequal{x+t=u} \int_x^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}u$

$$= \int_x^0 \ln f(u)\mathrm{d}u + \int_0^1 \ln f(u)\mathrm{d}u + \int_1^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}u,$$

而 $$\int_1^{x+1} \ln f(u)\mathrm{d}t \xlongequal{u=t+1} \int_0^x \ln f(t+1)\mathrm{d}t,$$

故 $$\int_0^1 \ln f(x+t)\mathrm{d}t = \int_0^x \ln \frac{f(t+1)}{f(t)}\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln f(t)\mathrm{d}t.$$

(4) $\int_0^{2\pi} f(|\cos x|) = \int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$

而 $$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi+t} \int_0^{\pi} f|\cos(t+\pi)|\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$$

又 $\int_0^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x,$

其中 $$\int_{\pi/2}^{\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\pi-u} \int_{\pi/2}^{0} f(|\cos u|)\mathrm{d}(-u)$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(|\cos x|)\mathrm{d}x.$$

故 $$\int_0^{2\pi} f(|\cos x|)\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} f(|\cos|x)\mathrm{d}x.$$

例 46 证明下列等式：

(1) $\int_0^a x\{f[\varphi(x)] + f[\varphi(a-x)]\}\mathrm{d}x = a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x;$

(2) $\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$

证 (1) 原式等价于

$$\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x = \int_0^a (a-x)f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x,$$

故 $$\int_0^a xf[\varphi(x)]\mathrm{d}x \xlongequal{x=a-t} -\int_a^0 (a-t)f[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^a f[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t - \int_0^a ft[\varphi(a-t)]\mathrm{d}t$$

$$= a\int_0^a f[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x - \int_0^a xf[\varphi(a-x)]\mathrm{d}x,$$

移项即得所证等式.

(2) $$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} \xlongequal{x=\sqrt{t}} \int_1^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{2t}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^a f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

在上式右边第二个积分中令 $u=\dfrac{a^2}{t}$,有

$$\int_a^{a^2} f\left(t+\frac{a^2}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\int_a^1 f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^a f\left(u+\frac{a^2}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u},$$

故
$$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

3. 用分部积分法计算与证明定积分

例 47 计算下列积分:

(1) $\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^1 |x-a|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x,\ |a|\leqslant 1.$

解 (1) $$\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x} - \int_{\pi/2}^\pi x\mathrm{d}\mathrm{e}^{\sin x}$$

$$= x\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x - x\mathrm{e}^{\sin x}\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \int_{\pi/2}^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$= \pi\mathrm{e} - 1 - \int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

由
$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x,$$

知
$$\int_0^\pi x\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e} - 1.$$

(2) $$\int_{-1}^1 |x-a|\mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \int_{-1}^a (a-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_a^1 (x-a)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (a-x)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^a + \int_{-1}^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x + (x-a)\mathrm{e}^x\Big|_a^1 - \int_a^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$= (a-x+1)\mathrm{e}^x\Big|_{-1}^a + (x-a-1)\mathrm{e}^x\Big|_a^1$$

$$= 2\mathrm{e}^a - \left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)a - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

例 48 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\sec^2x}{(1+\tan x)^2}dx$； (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{x\sin x}{\cos^3x}dx$.

解 分部积分法经常要与换元积分法结合起来使用.

$$(1)\ \int_0^{\pi/4}\frac{x\sec^2x}{(1+\tan x)^2}dx=\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(1+\tan x)^2}d(\tan x+1)$$

$$=\int_0^{\pi/4}xd\left(-\frac{1}{1+\tan x}\right)$$

$$=-\frac{x}{1+\tan x}\bigg|_0^{\pi/4}+\int_0^{\pi/4}\frac{x}{(1+\tan x)^2}$$

$$=-\frac{\pi}{8}+\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+\tan x}$$

$$\xlongequal{x=\pi/4-t}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\tan t)dt$$

$$=-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}[t-\ln|\cos t|]\bigg|_0^{\pi/4}=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln2$$

$$=\frac{1}{4}\ln2.$$

$$(2)\ \int_0^{\pi/4}\frac{x\sin x}{\cos^3x}dx=\int_0^{\pi/4}x\tan xd\tan x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}xd\tan^2x$$

$$=\frac{1}{2}x\tan^2x\bigg|_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2xdx$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sec^2x-1)dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[\tan x-x]\bigg|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

例 49 计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx$； (2) $\displaystyle\int_0^{\pi}(x\sin x)^2dx$.

解 (1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}dx=\int_0^1\ln(1+x)d\,\frac{1}{2-x}$

$$=\frac{\ln(1+x)}{2-x}\bigg|_1^0-\int_0^1\frac{1}{(2-x)}\frac{dx}{(1+x)}$$

$$=\ln2+\frac{1}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\ln 2.$$

(2) $\int_0^\pi (x\sin x)^2 dx = \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}dx$

$$= \int_0^\pi \frac{x^2}{2}dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\cos 2x dx = \frac{x^3}{6}\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi x^2 d\sin 2x$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4}\sin 2x\Bigg|_0^\pi - \frac{1}{4}\int_0^\pi 2x\sin 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{4}\int_0^\pi x d\cos 2x = \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4}\cos 2x\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \cos 2x dx$$

$$= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.$$

例 50 设 $f''(x)$ 连续，$f(\pi) = 2$，且有

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = 3,$$

求 $f(0)$.

解 $\int_0^\pi f(x)\sin x dx = [-f(x)\cos x]\Big|_0^\pi + \int_0^\pi f'(x)\cos x dx$

$$= f(\pi) + f(0) + [f'(x)\sin x]\Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''(x)\sin x dx,$$

移项得 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)]\sin x dx = f(\pi) + f(0)$,

则 $f(\pi) + f(0) = 5 \Rightarrow f(0) = 5 - 2 = 3.$

例 51 计算$\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx\ (a > 0)$.

解 本例用分部积分法求解，但要先进行代换.

(1) 令 $w(x) = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，则 $w(a) = 0$. 于是

$$I = x\arctan w(x)\Bigg|_0^a - \int_0^a x \cdot \frac{1}{1+w^2} \cdot \frac{1}{2w} \cdot \frac{-2a}{(a+x)^2}dx$$

$$= \int_0^a \frac{x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{1}{4}\int_0^a \frac{d(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_0^a=\frac{a}{2}.$$

(2) 令 $x=a\cos t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$I=\int_{\pi/2}^{0}\frac{a}{2}t\mathrm{d}\cos t=a\left(\frac{t}{2}\cos t\right)\Big|_{\pi/2}^{0}+\int_0^{\pi/2}\frac{a}{2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a}{2}\sin t\Big|_0^{\pi/2}=\frac{a}{2}.$$

(3) 令 $t=\arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$，则 $\tan t=\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. 于是

$$\cos 2t=\frac{1-\tan^2 t}{1+\tan^2 t}=\frac{1-(a-x)/(a+x)}{1+(a-x)/(a+x)}=\frac{x}{a}.$$

$$I=\int_{\pi/4}^{0}t\mathrm{d}(a\cos 2t)=at\cos 2t\Big|_{\pi/4}^{0}+a\int_0^{\pi/2}\cos 2t\mathrm{d}t$$

$$=a\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{a}{2}.$$

例 52 计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos(n+1)x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数变形，再进行积分.

(1) $$I=\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x[\cos nx\cos x-\sin nx\sin x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}\sin^n x-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{\cos nx}{n}\sin^n x\right)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}\sin^n x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=0.$$

(2) $$I=\int_0^{\pi}x|\cos x|\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/2}x\cos x\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\pi/2}^{\pi}x\cos x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi/2}x\sin 2x\mathrm{d}x-\int_{\pi/2}^{\pi}x\sin 2x\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

例 53 计算下列积分：

(1) $f(x)=\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{x}}\frac{du}{1+(\tan u^2)^{\sqrt{2}}}$，求$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx$；

(2) $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求$\int_0^1 xf(x)dx$.

解 要分步求解.

(1) $$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx=2\int_0^{\pi/2}\sqrt{x}f'(x)dx$$

$$=-\int_0^{\pi/2}\sqrt{x}df(x)=-\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

又 $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\xlongequal{t=\pi/2-x}\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+(\cot t)^{\sqrt{2}}}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{(\tan t)^{\sqrt{2}}+1-1}{1+(\tan t)^{\sqrt{2}}}dt=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+(\tan t)^{\sqrt{2}}},$$

故 $$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\frac{\pi}{4},$$

即 $$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{x}}f(x)dx=-\frac{\pi}{4}.$$

(2) $$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]d\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\left[\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt\right]\Big|_0^1-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{e}-1\right).$$

例 54 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续，且$\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x dx=0$. 证明：在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt, 0\leqslant x\leqslant\pi$. $F(0)=0, F(x)=0$.

又 $$0=\int_0^\pi f(x)\cos x dx=\int_0^\pi \cos x dF(x)$$

$$= F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x.$$

所以∃ $\xi \in (0,\pi)$ 使$F(\xi)\sin\xi = 0$. 这是因为,若$F(\xi)\sin\xi \neq 0$,则必$F(x)\sin x$恒大于(或恒小于)零,这与$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\mathrm{d}x = 0$矛盾. 但在$(0,\pi)$ 内,$\sin\xi \neq 0$,故 $F(\xi) = 0$.

对 $F(x)$ 在$[0,\xi]$上应用罗尔定理知,至少存在 $\xi_1 \in (0,\xi)$,$\xi_2 \in (\xi,\pi)$,使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0 \Longrightarrow f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0.$$

例 55 求函数 $F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式,其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \dfrac{3}{2}x^2, & -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{xe^x}{(e^x+1)^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

解 因为,当 $-1 \leqslant x < 0$ 时,有

$$F(x) = \int_{-1}^{x}\left(2t + \frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t = \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{x}$$
$$= x^3/2 + x^2 + 1/2.$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时,有

$$F(x) = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \left(t^2 + \frac{1}{2}t^3\right)\Big|_{-1}^{0} + \int_0^x \frac{te^t}{(e^t+1)^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{1}{2} - \int_0^x t\mathrm{d}\left(\frac{1}{e^t+1}\right) = -\frac{1}{2} - t\frac{1}{e^t+1}\Big|_0^x - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{e^t+1}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \int_0^x \frac{\mathrm{d}e^t}{e^t(e^t+1)}$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{x}{e^x+1} + \ln\frac{x}{e^x+1}\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{e^x + 1} + \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1},$$

即 $$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}, & -1 \leqslant x < 0, \\ \ln 2 + \ln \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

例 56 设 $f(0) = 1, f(2) = 3, f'(2) = 5$，计算 $\int_0^1 x f''(2x) \mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^1 x f''(2x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x \mathrm{d} f'(x)$$

$$= \frac{1}{2}[x f'(x)]\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d} f(2x) = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} f(2x)\Big|_0^1 = 2.$$

例 57 计算下列不定积分：

(1) $\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} \mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{1/e}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $\sqrt{x} = t$，则

$$\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} \mathrm{d}x = \int_1^4 \arctan \sqrt{t - 1} \mathrm{d}t^2$$

$$= t^2 \arctan \sqrt{t - 1}\Big|_1^4 - \int_1^4 t^2 \frac{1}{1 + (t - 1)^2} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t - 1}}$$

$$= 16\arctan \sqrt{3} - \frac{1}{2}\int_1^4 (\sqrt{t - 1} + 1/\sqrt{t - 1}) \mathrm{d}(t - 1)$$

$$= \frac{16}{3}\pi - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(t - 1)^{3/2} + 2(t - 1)^{1/2}\right]\Big|_1^4 = \frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

(2) 因为 $\ln 1 = 0$，所以

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| \mathrm{d}x = \int_{1/e}^{1} - \ln x \mathrm{d}x + \int_1^e \ln x \mathrm{d}x$$

$$= - x\ln x\Big|_{1/e}^{1} - \int_{1/e}^{1} \mathrm{d}x + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x = 2(1 - 1/e).$$

例 58 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1).$$

证 因为 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续，则 $\exists M$，使在$[0,1]$上，$|f'(x)|\leqslant M$. 且有

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{n+1}f(1) - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x.$$

而 $$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{d}x = \frac{M}{n+2} \to 0\ (n\to+\infty),$$

故 $$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\left[f(1) - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$= f(1).$$

由此可得积分估计式

$$\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

例 59 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$\varphi(x)$ 在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可微，$\varphi'(x)\geqslant 0\ (x\in(a,b))$. 用分部积分法与积分第一中值定理证明积分第二中值定理.

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，于是

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}F(x)$$
$$= F(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x \text{（积分第一中值定理）}$$
$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)\int_a^b \varphi'(x)\mathrm{d}x$$
$$= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)]$$
$$= \varphi(b)[F(b) - F(\xi)] + \varphi(a)[F(\xi) - F(a)]$$
$$= \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x + \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

应用$\int_a^b \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(b) - \varphi(a)$ 时，要求 $\varphi'(x)$ 在$[a,b]$上连续.

第四节 非正常积分(反常积分)

主要内容

1. 设函数 f 定义在无穷区间$[a, +\infty)$上,且在任何有限区间$[a,A]$上可积,如果存在极限 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x = J$,则称 J 为 $f(x)$ 在$[a, +\infty)$上的无穷限非正常积分,记作 $J=\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,并称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.否则,称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.非正常积分亦称广义积分.

类似可定义$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛与发散.

而$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$,当且仅当两个积分$\int_{-\infty}^a f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛时积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛.

2. 设 $f(x)$ 定义在$[a,b]$上,在 $U_-(b,\delta)$ 内无界,则 $\forall\ \varepsilon(\varepsilon < b-a)$,$f$ 在$[a,b-\varepsilon]$上可积,如果极限$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = G$存在,则称 G 为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的无界函数非正常积分,记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,并称$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.否则称$\int_a^b f(x)$ 发散.

类似可定义$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性.

若函数 f 在 c $(a<c<b)$ 点无界,则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当等式右边两个积分都收敛时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛.

若函数 f 在$[a,b]$的两端点都无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon_1 \to 0^+} \int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2 \to 0^+} \int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $a < c < b$.

3. 若 $\lim\limits_{A \to +\infty} \int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{A \to +\infty} [F(A) - F(-A)]$ 收敛，则称其极限值为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的柯西主值，记作(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

4. 柯西收敛原理　无穷限积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ M > a$，使对于 $A_1, A_2 > M$ 时，都有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

5. 无穷限积分的性质

(1) 若 $\int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则其线性组合 $\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛 (k_1, k_2 为常数)，且

$$\int_a^{+\infty} [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int_a^{+\infty} f_1(x)\mathrm{d}x + k_2 \int_a^{+\infty} f_2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 若 f 在任何有限区间$[a,A]$上可积，$a < b$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 有相同的敛散性，且当它们同时收敛时，有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

(3) 若 f 在任何有限区间$[a,A]$上可积，且 $\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \right| < \int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，而$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$不收敛，则称$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$条件收敛.

6. 非负函数的非正常积分的敛散性判别法

(1) 比较判别法　设在$[a,+\infty)$上非负函数f和φ在任何有限区间$[a,A]$上都可积，且$k\varphi(x)\geqslant f(x)\geqslant 0$ ($k>0$,常数)，则当$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$也发散.

(2) 比较判别法的极限形式　若在$[a,+\infty)$上，$f(x)\geqslant 0$，$\varphi(x)\geqslant 0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=l$，则

1° 当$0<l<+\infty$时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$有相同的敛散性.

2° 当$l=0$时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛$\Longrightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

3° 当$l=+\infty$时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$发散$\Longrightarrow\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

7. 柯西判别法　设在$[a,+\infty)$上恒有$f(x)\geqslant 0$，对任意正常数k ($k>0$)，有

(1) 若$f(x)\leqslant\dfrac{k}{x^p}$，且$p>1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

(2) 若$f(x)\geqslant\dfrac{k}{x^p}$，且$p\leqslant 1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

其极限形式是：在$[a,+\infty)$上($a>0$)，若$f(x)\geqslant 0$，有$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=l$，则

(1) 若$0\leqslant l<+\infty$，且$p>1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

(2) 若$0\leqslant l<+\infty$，且$p\leqslant 1$，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散.

8. 阿贝耳(Abel)判别法　若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调有界，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

9. 狄利克雷判别法　若函数$F(A)=\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$在$[a,+\infty)$上有界，$g(x)$在$[a,+\infty)$上单调且当$x\to+\infty$时趋向于零，则$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛.

对以上3～9条的各项内容，无界函数的非正常积分也有相类似的性质，恕不赘述.

疑难解析

1. 非正常积分与正常积分有何不同?在计算上有什么区别?

答　非正常积分又称反常积分、广义积分，正常积分即黎曼积分、常义积分. 黎曼积分假定了积分区间有限和被积函数在区间上有界这两个条件，非正常积分则突破了这两个条件的限制，考虑在无穷区间上和对无界函数的积分问题.

非正常积分通常可以化为极限记号下的正常积分，一般是带着极限记号计算正常积分，再对正常积分的结果求极限而得非正常积分的值；也可以先计算对应的不定积分$F(x)+c$，然后利用牛顿-莱布尼茨公式并求极限，获得非正常积分的值. 因此，在不定积分和定积分中用过的变量代换、分部积分、牛顿-莱布尼茨公式等方法，以及拆项、拼凑、分段、组合等种种技巧，在非正常积分计算中同样可以使用. 只是为避免做无用的工作，最好先确定非正常积分的敛散性后再行计算.

2. 无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分有什么联系?

答　无穷区间的非正常积分与无界函数的非正常积分并不

是截然不同的，一般可以互相转换. 例如，对无穷区间上的非正常积分可变换成无界函数的非正常积分，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\frac{1}{t}} -\int_{1/a}^{0} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \quad \left(令\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)=g(t)\right)$$

$$=\int_0^{1/a} g(t)\mathrm{d}t.$$

同样，可以写出反过来的情形.

方法、技巧与典型例题分析

非正常积分问题包含五个方面的内容：非正常积分的计算，非正常积分敛散性的判定，非正常积分的极限，无穷限积分敛散性与无穷远处的状态，非正常积分与“积分和”极限. 由于内容比较广泛，而且有的问题比较深奥，所以我们只对一般的问题进行讨论.

一、非正常积分的计算

非正常积分可以化为极限记号下的正常积分，然后带着极限记号计算正常积分，再对计算的结果取极限. 因此，其计算方法仍然是利用换元积分法、分部积分法、牛顿 - 莱布尼茨公式和其它正常积分中使用的方法.

例 1 计算下列无穷限非正常积分：

(1) $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x \ (n\in\mathbf{N})$； (2) $I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$； (4) $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \ (a>0)$.

解 可以先用求不定积分的方式计算.

(1) 当 $n=0$ 时，$I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$.

当 $n\geqslant 1$ 时，有

$$I_n=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-x}x^n)\Big|_0^A+\lim_{A\to+\infty}n\int_0^A\mathrm{e}^{-x}x^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{A \to +\infty} n \int_0^A e^{-x} x^{n-1} dx.$$

依次递推，即得 $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$.

(2) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{x^2 + a^2}$

$$= \lim_{A \to +\infty} \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \Big|_0^A = \frac{\pi}{2a}.$$

而 $$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2 + a^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{-x^2}{(x^2 + a^2)^n} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \int x d\left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^{n-1}}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\right] \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$+ \frac{1}{2a^2(n-1)} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

于是 $$I_n = \lim_{A \to +\infty} \int_0^A \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} \frac{2n-3}{2n-2}\right) \left(\frac{1}{a^2} \frac{2n-5}{2n-4}\right) I_{n-2} = \cdots$$

$$= \frac{1}{a^{2(n-1)}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} I_1 = \frac{1}{2a^{2n-1}} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

(3) 因为 $\int \frac{dx}{1 + x + x^2} = \int \frac{d(x + 1/2)}{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3/4})^2}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x + 1/2}{\sqrt{3/4}} + c,$$

故 $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x + x^2} = \lim_{A \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x + 1/2}{\sqrt{3/4}} \Big|_0^A = \frac{2\sqrt{3}}{9} \pi.$$

(4) 因为 $\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int \frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$，且

当 $p \neq 1$ 时，$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \frac{1}{p-1} (\ln x)^{1-p}$，

当 $p = 1$ 时，$\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln|\ln p|$，

故 当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{(x\ln x)^p}=\frac{1}{p-1}(\ln a)^{1-p}$；

当 $p\leqslant 1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\infty$，发散.

例 2 计算下列无穷限非正常积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+1}$； (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$；

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|-x)e^{-|x|}dx$； (4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

解 (1) $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}$，

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\left[\frac{1}{3(x+1)}-\frac{x-2}{3(x^2-x+1)}\right]dx$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+c,$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{dx}{1+x^3}$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]\Bigg|_0^A$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(2) $$\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}dx=\int\frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+c,$$

故 $$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\Bigg|_0^A=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty}(|x|+x)e^{-|x|}dx$$

$$=\int_{+\infty}^0(-x+x)e^x dx+\int_0^{+\infty}(x+x)e^{-x}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-2\int_0^{+\infty}x de^{-x}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} -2[xe^{-x} + e^{-x}]\Big|_0^A = 2.$$

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$

$$\xlongequal{x=1/t} \int_1^{0+\epsilon} \frac{1}{1/t\cdot\sqrt{1+1/t^5+1/t^{10}}}\frac{-dt}{t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{t^{10}+t^5+1}} \xlongequal{t^5=u} \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+u+1}}$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{d(u+1/2)}{\sqrt{(u+1/2)^2+3/4}} = \frac{1}{5}\ln(1+2\sqrt{3}).$$

例 3 计算下列无界函数的非正常积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$； (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$.

解 无界函数的积分性经常要用变量代换或区间分段的方法来计算，使得可以通过部分量的叠加或抵消来简化积分、求出积分值.

(1) $x=0$ 是瑕点（$f(x)$ 在 $U(0,\delta)$ 内无界），故

$$\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_{-1}^{0-\epsilon_1}\frac{e^{1/x}}{x^2}dx + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{0+\epsilon_2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$$

$$= \lim_{\epsilon_1\to0^+}\int_1^{0-\epsilon_1} e^{1/x}d\left(-\frac{1}{x}\right) + \lim_{\epsilon_2\to0^+}\int_{0+\epsilon_2}^1 e^{1/x}d\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= 1/e + \infty,$$

所以积分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ 发散.

(2) 作变量代换 $x=2t$，得

$$\int_0^{\pi/4}\ln\sin x dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t dt = 2\int_0^{\pi/4}\ln(2\sin t\cos t)dt$$

$$= \lim_{\epsilon\to0^+} 2\int_{0+\epsilon}^{\pi/4}(\ln2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln2 + \lim_{\epsilon\to0^+} 2\int_{0+\epsilon}^{\pi/4}\ln\sin t dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t dt.$$

对积分$\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\mathrm{d}t$作变换$x=\dfrac{\pi}{2}-u$，得

$$2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\mathrm{d}t=-2\int_{\pi/2}^{\pi/4}\ln\sin t\mathrm{d}t,$$

故
$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

于是
$$\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

例 4 计算下列无界函数的非正常积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$；　(2) $\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

解 (1) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}\xlongequal{\sqrt{1-x}=t}-2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$=-2\arctan t+c=-2\arctan\sqrt{1-x}+c,$$

故
$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$
$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}(-2\arctan\sqrt{1-x})\Big|_0^{1-\varepsilon}$$
$$=-2\left(\lim_{\varepsilon\to0^+}\arctan\sqrt{1-1+\varepsilon}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 因为$\sqrt{1-x}\dfrac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\to\dfrac{1}{2}(x\to1^-)$，且$p=\dfrac{1}{2}<1$，所以积分$I_n$收敛.

令$x=\sin t$，则

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\int_0^{\pi/2}\sin^n t\mathrm{d}t\text{（瓦里士公式）}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } n=2k \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n=2k-1 \text{ 时}.\end{cases}$$

本题没有标出极限记号，但应知$x=1$为瑕点.

例 5 计算下列非正常积分：

(1) $\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

解 (1) $x=2$ 是瑕点，则

$$\int_1^3 \ln\sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\ln\sqrt{\frac{\pi}{2-x}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^3\ln\sqrt{\frac{\pi}{x-2}}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\left[\ln\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\ln(2-x)\right]\mathrm{d}x$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^3\left[\ln\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\ln(x-2)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\pi-\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}[x\ln(2-x)-\ln|2-x|-x]\Big|_1^{2-\varepsilon_1}$$

$$+\frac{1}{2}\ln\pi-\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\frac{1}{2}[x\ln(x-2)+\ln|x-2|-x]\Big|_{2+\varepsilon_2}^3$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\ln\pi+\frac{1}{2}\right)=\ln\pi+1.$$

(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$,

$$\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{1+\varepsilon}^2\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{x-1}=t}\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_{0+\varepsilon_1}^1\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\lim_{\varepsilon_1\to 0^+}2\arctan t\Big|_{0+\varepsilon_1}^1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\lim_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$$

$$\xlongequal{\sqrt{x-1}=t}\lim_{A_1\to+\infty}\int_1^{A_1}\frac{2t\mathrm{d}t}{(1+t^2)t}=\lim_{A_1\to+\infty}2\arctan\Big|_1^{A_1}=\frac{\pi}{2}.$$

所以 $$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 6 设 $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x(x-2)}$，计算 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x$.

解 $x=2$ 是 $\varphi(x)$ 的瑕点.

$$\int_1^3 \frac{\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\int_1^{2-\varepsilon_1}\frac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{1+\varphi^2(x)}+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\int_{2+\varepsilon_2}^3\frac{\varphi'(x)\mathrm{d}x}{1+\varphi^2(x)}$$

$$=\lim_{\varepsilon_1\to0^+}\arctan\varphi(x)\Big|_1^{2-\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to0^+}\arctan\varphi(x)\Big|_{2+\varepsilon_2}^3$$

$$=\arctan2-\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}=\arctan2+\arctan\frac{4}{3}-\pi.$$

例 7 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$.

证 为简便起见，我们不再写出极限符号，请读者自己理解计算中带有极限的过程.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x.$$

又 $\dfrac{|\sin x|}{(1+x)^2}\leqslant\dfrac{1}{(1+x)^2}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$ 收敛，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\text{ 收敛}\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x\text{ 收敛}.$$

而

$$\left|\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty}=1.$$

二、非正常积分敛散性的判别

非正常积分的敛散性，可依据敛散性定义、非正常积分的性质、非负函数非正常积分的收敛判别法（比较法则、比较法则的极限形式和柯西判别法）、阿贝耳判别法和狄利克雷判别法进行. 关键是要根据具体情况确定恰当的判别方法.

例 8 判断下列命题的真伪，试说明理由或举出反例.

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -f(x)$，$\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$ 成立；

(2) 积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$；

(3) 积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，就可以用积分和式的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 来计算；

(4) 积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则对$[a,b]$的任一分割 T，总可选取 ξ_i，使当 $n \longrightarrow +\infty$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \longrightarrow A$（有限数）；

(5) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 存在，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $A = 0$；

(6) 若$\int_a^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$，则$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 必收敛；

(7) 若$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\mathrm{d}x = A\ (n \in \mathbf{N})$，反之不成立；

(8) $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

解 命题(1)，(5)，(6)，(7) 系真，(2)，(3)，(4)，(8) 系伪.

(1) 因为 $\forall\ a \in (-\infty, +\infty)$，$J_1 = \int_{-\infty}^{a} f(x)\mathrm{d}x$，$J_2 = \int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 都存在，并且有

$$\int_{+\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = J_1 + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t,\quad \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = J_2 - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

故 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = f(x),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = -f(x).$$

(2) 取 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2 g(x)}$，$x \in [0, +\infty)$，其中

$$g(x)=\begin{cases}1, & n<x<n+1,\\ 0, & x=n.\end{cases}\quad n=0,1,2,\cdots.$$

显然 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)\neq 0$. 但 $f(x)\geqslant 0$，因为对于 $N>A$，有

$$\int_0^A \frac{dx}{1+x^2g(x)}<\int_0^N \frac{dx}{1+x^2g(x)}=\sum_{i=1}^{N}\int_{i-1}^{i}\frac{dx}{1+x^2g(x)}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \frac{dt}{1+(t-i-1)^2g(t)}=\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\frac{dt}{1+(t+i-1)^2}$$

$$<1+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{i^2}<1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi}{6}+1.$$

所以 $\int_0^A f(x)dx$ 单调增加且有上界，从而 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

(3) 设 $f(x)=1/\sqrt{x}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，则

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[2x^{1/2}\right]\Big|_\varepsilon^1=2.$$

所以 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛. 但是：

(i) 将 $[0,1]$ n 等分，在 Δx_1 上取 $\xi_i=\frac{1}{n^2}\left(0<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n}\right)$，在其它区间 Δx_i 上取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，$i=2,3,\cdots,n$，则有积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

(ii) 在 Δx_1 上取 $\xi_1'=\frac{1}{4n^2}\left(0<\frac{1}{4n^2}<\frac{1}{n}\right)$，在其它区间上取 $\xi_i'=\frac{i}{n}$，$i=2,3,\cdots,n$，则有积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i')\Delta x_i$.

此时，

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i')\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\xi_1'}}-\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}\right)=\frac{1}{n}(2n-n)=1.$$

显然 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与 ξ_i 取法有关，故和式极限不存在.

(4) 取 $f(x)=x^{-1/3}$，则 $x=0$ 为瑕点，有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-1/3}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x^{-1/3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}.$$

但对$[0,1]$上的任一分割T,只要取$\xi_1 = (\Delta x_1)^6(0 < (\Delta x_1)^6 < \Delta x_1 < 1)$,其余$\Delta x_i$上任取$\xi_i, i = 2,3,\cdots,n$,有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = f(\xi_1)\Delta x_1 + \sum_{i=2}^n f(\xi_i)\Delta x_i > f(\xi_1)\Delta x_1$$

$$= \frac{\Delta x_1}{\sqrt[3]{(\Delta x_1)^6}} = \frac{1}{\Delta x_1},$$

故当$n \to +\infty, \lambda \to 0$时,就有$\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \to +\infty$.

(5) 若$A \neq 0$(不妨设$A > 0$),则由保号性,$\exists P > a$,当$x > P$时,$f(x) \geqslant \frac{A}{2} > 0$. 于是

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^P f(x)\mathrm{d}x + \int_P^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_a^P f(x)\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int_P^{+\infty}\mathrm{d}x = +\infty.$$

这与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的收敛矛盾,故必有$A = 0$.

(6) 因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,故当$n$充分大时,有$f^2(x) \leqslant |f(x)|$,依据比较判别法,$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$收敛.

若将$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛改为收敛,则结论不真. 如$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$收敛且$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$,但$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$发散.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = A$仅为$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = A$的必要条件,反之不成立. 例如

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [n-1, n-1/2), \\ 1, & x \in [n-1/2, n), \end{cases} \quad n = 1,2,\cdots,$$

有$I_n = \int_0^n f(x)\mathrm{d}x = 0$,从而$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = 0$. 但$I\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$,

有 $\lim\limits_{n\to+\infty} I\left(n+\dfrac{1}{2}\right) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} I(n)$，从而极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n f(x)\mathrm{d}x$ 不存在.

(8) 取 $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x^2}$，有

$$\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-A}^{A}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x^2}{1+x^2}$$

$$= \left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Bigg|_{-A}^{A} = 2\arctan A,$$

所以
$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty} 2\arctan A = \pi.$$

而在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1>0$，故 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

例 9 讨论下列非正常积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x \ (p>0)$；　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x \ (p>0)$；

(3) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \ (p>0)$；

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{x}{x^2+p}-\frac{p}{x+1}\right)\mathrm{d}x \ (p\neq 0)$.

解 (1) $x=0$ 为瑕点. 当 $p=1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = +\infty,$$

发散. 当 $p\neq 1$ 时，有

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \begin{cases} +\infty, & p>1, \\ \dfrac{1}{1-p}, & p<1. \end{cases}$$

所以 $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p\geqslant 1$ 时发散，当 $p<1$ 时收敛.

对 $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^p}\ (p>0)$ 可以得到同样的结果：当 $p\geqslant 1$ 时发散，当 $p<1$ 时收敛.

(2) 当 $p>1$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{x^p}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^p}$，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 当 $p>1$ 时

收敛，故由比较判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 条件收敛. 因为

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x},$$

而 $\left|\int_1^A\cos 2x dx\right|=\frac{1}{2}|\sin 2A-\sin 2|\leqslant 1$，$\frac{1}{2x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调减少并趋向于零，故由狄利克雷判别法，依据 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x}$ 发散、$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}dx$ 收敛，判断 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|dx$ 发散. 但是，对任意的 $A\geqslant 1$，有 $\left|\int_1^A\sin x dx\right|=|\cos A-1|\leqslant 2$，且 $\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减少并趋向于零，故由狄利克雷判别法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 当 $p>0$ 时收敛.

(3) $\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\int_e^b\frac{d\ln x}{(\ln x)^p}$

$$=\begin{cases}\ln(\ln x)\Big|_e^b=\ln(\ln b),\ p=1,\\ \frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_e^b=\frac{1}{1-p}[(\ln b)^{1-p}-1],\ p\neq 1.\end{cases}$$

当 $p=1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)=+\infty,$$

积分发散；当 $p<1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}(\ln b)^{1-p}-1]=+\infty,$$

积分发散；当 $p>1$ 时，有

$$\lim_{b\to+\infty}\int_e^b\frac{dx}{x(\ln x)^p}=\frac{1}{1-p}[\lim_{b\to+\infty}\ln(\ln b)^{1-p}-1]=\frac{1}{p-1},$$

积分收敛.

故 $p\leqslant 1$ 时，$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 发散；$p>1$ 时，$\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$ 收敛.

(4) 因为 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+p}-\dfrac{p}{x+1}=\dfrac{(1-p)x^2+x-p^2}{(x^2+p)(x+1)}$，故当 x 充分大时，$f(x)$ 与 $(1-p)$ 有相同的符号. 所以 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与绝对收敛是一致的.

当 $p=1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2f(x)=1$，故 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；当 $p\neq1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}x|f(x)|=|1-p|\neq0$，故 $\int_1^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 发散，$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

例 10 利用各种判别法，讨论下列积分的敛散性：

(1) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+1}$；　　(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos x\mathrm{d}x\ (k>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$；

(5) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2x}{x^m}\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$；　　(8) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x\ (n\geqslant0)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^3+x^2+1}\Big/\dfrac{1}{1+x^2}=1\neq0$，而 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\dfrac{\pi}{2}$ 收敛，依比较判别法的极限形式知，$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+x+1}$ 收敛.

(2) 因为 $0\leqslant|\mathrm{e}^{-kx}\cos x|\mathrm{d}x\leqslant\mathrm{e}^{-kx}$，而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{k}$ 收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos x\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$，对 $\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^m}\mathrm{d}x$，由于

$$\lim_{x\to0^+}x^{m-1}\frac{\ln(1+x)}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

所以，当 $m<2$ 时积分收敛，当 $m\geqslant2$ 时积分发散.

对$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$，当$m>1$时，取$\alpha$充分小，使$m-\alpha>1$，则

$$x^{m-\alpha}\frac{\ln(1+x)}{x^m}=\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\to 0\ (x\to+\infty),$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$ 收敛；当$m\leqslant 1$时，有

$$x^m\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^m}\to+\infty\ (x\to+\infty),$$

故积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$ 发散.

综上所述，当$1<m<2$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^m}dx$ 收敛.

(4) 因为$0<\frac{1}{x\sqrt{x+1}}<\frac{1}{x^{3/2}}$，而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$收敛.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}dx=\int_0^1\frac{\sin^2x}{x^m}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}dx.$

对$\int_0^1\frac{\sin^2x}{x^m}dx$，当$m\leqslant 2$时为定积分，当$2<m<3$时，$m-2<1$，且

$$\lim_{x\to0^+}x^{m-2}\frac{\sin^2x}{x^m}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x^2}=1,$$

所以积分收敛；当$m=3$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x\frac{\sin^2x}{x^m}=1$，当$m>3$时，$\lim\limits_{x\to0^+}x\frac{\sin^2x}{x^m}=+\infty$，所以积分发散.

对$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}dx$，当$m>1$时，由于$\frac{\sin^2x}{x^m}<\frac{1}{x^m}$，所以积分收敛；当$m\leqslant1$时，由于$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1-\cos2x}{x^m}dx$，而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^m}$发散，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos2x}{x^m}dx$收敛，所以$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^m}dx$发散；又当$m<0$时，$\frac{\sin^2x}{x^m}$

$\geqslant \sin^2 x$，而$\int_1^{+\infty} \sin^2 x \mathrm{d}x$ 发散，所以$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x$ 发散.

综上所述，当 $1 < m < 3$ 时，$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^m}\mathrm{d}x$ 收敛.

(6) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x.$

对$\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，因为 $x^{1-p}(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}) \to 1\ (x \to +\infty)$，所以，当 $p > 0$ 时，积分收敛.

对$\int_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，因为 $x^2(x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}) = x^{p-1}/\mathrm{e}^x \to 0\ (x \to +\infty)$，所以对一切 p 值，积分恒收敛.

综上所述，当 $p > 0$ 时，积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛.

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x.$

对$\int_0^1 \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$，因为 $x^{-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \to 1\ (x \to 0^+)$，所以，积分当 $m > -1$ 时收敛.

对$\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$，因为 $x^{n-m} \cdot \frac{x^m}{1+x^n} \to 1\ (x \to +\infty)$，所以，积分当 $n - m > 1$ 时收敛.

综上所述，积分$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 当 $m > -1, n - m > 1$ 时收敛.

(8) 当 $a \neq 0$ 时，设 $f(x) = \cos ax, g(x) = \frac{1}{1+x^n}$，则 $\forall\ A > 0$，均有 $\left|\int_0^A f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{a}$；又当 $n > 0$ 时，$g(x)$ 单调减少并趋于零 $(x \to +\infty)$，故积分$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 当 $a \neq 0, n > 0$ 时收敛.

当 $a = 0$ 时，因为 $x^n \cdot \frac{1}{1+x^n} \to 1\ (x \to +\infty)$，所以积分$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \mathrm{d}x}{1+x^n}\mathrm{d}x$ 当 $a = 0, n > 1$ 时收敛.

例 11 用各种判别法，讨论下列积分的敛散性：

(1) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$;　　(2) $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

(3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$;　　(4) $\int_0^{\pi/2}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$;

(5) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}dx$;　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ $(p,q>0)$.

解　(1) $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ 是瑕点，将原积分写为

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}.$$

对 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\frac{1}{x^p}=0$，且 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{x^p}$ 当 $0<p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant1$ 时发散，故 $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^p\cos^q x}$ 当 $0<p<1$ 时收敛.

对 $\int_{\pi/4^-}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to\pi/2^-}\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\Big/\frac{1}{(\pi/2-x)^2}=1\neq0$，且 $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{(\pi/2-x)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant1$ 时发散，故 $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当 $q<1$ 时收敛.

综上所述，$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 当 $p<1, q<1$ 时收敛.

(2) $\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{1/2}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_{1/2}^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

对 $\int_0^{1/2}\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$，因为 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{-n}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}=1$，所以当 $n>-1$ 时，积分收敛.

对 $\int_{1/2}^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$，因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^n}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt2}$ 在 n 为任意值时成立，故 $\int_{1/2}^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 对任意 n 收敛.

综上所述，当 $n>-1$ 时，$\int_0^1\frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 收敛.

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$

$$= \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} + \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}.$$

对 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} = 1$，而 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x)^2}$ 收敛，所以 $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 收敛.

对 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$，因为 $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2} \Big/ \frac{1}{(1-x)^2} = 1 \neq 0$，但 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ 发散，所以 $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 发散.

综上所述，$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(1-x)^2}$ 发散.

(4) 因为 $x = 0$ 是瑕点，有

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x^{2/3}} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/6}\ln\sin x = \lim_{x\to 0^+} \ln\sin x / x^{-1/6}$$

$$\overset{L'}{=\!=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-x^{-7/6}/6} = -6 \lim_{x\to 0^+} x^{1/6} \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x = 0,$$

而 $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^{2/3}}$ 收敛. 所以 $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}} dx$ 收敛.

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-3x+2}}$

$$= \int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}.$$

对 $\int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 因为 $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} \Big/ \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{8} \neq 0$，且 $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$ 收敛，所以 $\int_2^3 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

对 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$，因为 $0 < \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}} < \frac{1}{x^4}$，且 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ 收敛，所以 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

综上所述，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-3x+2}}$ 收敛.

(6) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}=\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}+\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$.

对 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{(x-1)^q}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)^q=\left(\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1}{\ln x}\right)^q\xlongequal{L'}(\lim\limits_{x\to1^+}x)^q=1\neq0$，且 $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^q}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant1$ 时发散. 所以 $\int_1^2\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 当 $q<1$ 时收敛，当 $q\geqslant1$ 时发散.

对 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\Big/\frac{1}{x^p}\xlongequal{p>1}0$，且 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，所以当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛. $\forall x\in[2,+\infty)$，当 $0<p\leqslant1, q>1$ 时，因为 $x^p\ln^q x\leqslant x\ln^q x\Longrightarrow\frac{1}{x^p\ln^q x}\geqslant\frac{1}{x\ln^q x}$，而 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^q x}=+\infty$，所以此时积分发散.

综上所述，当 $p>1, q<1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p\ln^q x}$ 收敛.

例 12 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，$\forall x\in[x,+\infty)$，有 $f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$. 证明：若 $\lambda>1$，则 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A>1$，当 $x>A$ 时，有 $\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\lambda+\varepsilon$，即

$$\ln f(x)<(-\lambda+\varepsilon)\ln x=\ln x^{-\lambda+\varepsilon}\Longrightarrow0<f(x)<1/x^{\lambda-\varepsilon}.$$

又因 $\lambda>1$，故可取 $0<\varepsilon<\lambda-1$，于是 $\lambda-\varepsilon>1$. 依比较判别法知，$\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

例 13 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上且恒正，并在任意有

限区间$[-a,b]$上可积 $(a,b>0)$. 又$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|/k}dx \leqslant M$($M$为常数) 对任意 $k>0$ 成立. 证明:$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

证 要证明$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,因为 $f(x)>0$,所以只需证$\int_{-a}^{b} f(x)dx$ 对 $a,b>0$ 有界.

因为$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-|x|/k}dx \leqslant M$ 对任意 $k>0$ 成立,则若令 $c=\max\{a,b\}$,取 $k>c$,有

$$0 \leqslant \int_{-a}^{b} f(x)dx \leqslant \int_{-a}^{b} f(x)e^{(c-|x|)/k}dx$$
$$= e^{c/k}\int_{-a}^{b} f(x)e^{-|x|/k}dx \leqslant e^{c/k}M \leqslant 3M.$$

故$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

例 14 设 $f(x)>0$ 且单调减少,证明:$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 敛散性相同.

证 由 $f(x)>0$ 且单调减少,则 $f(x)\to 0$,或 $f(A)\to A>0$.

(1) 若 $f(x)\to 0$,由狄利克雷判别法,$\int_{a}^{+\infty} f(x)\cos 2x dx$ 收敛,于是由

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{a}^{+\infty} f(x)dx - \frac{1}{2}\int_{a}^{+\infty} f(x)\cos 2x dx$$

知,$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 同时收敛.

(2) 若 $f(x)\to A>0$, 则$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 发散, 从而$\int_{a}^{+\infty} f(x)\sin^2 x dx$ 与$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ 同时发散.

例 15 证明下列等式：

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}$；

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{16}$.

证 因为 $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\,\frac{\ln x}{1+x^2} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{3/2}\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = 0$，故依比较判别法的极限形式，题(1)、题(2)、题(3) 三个积分都收敛.

(1) $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \xlongequal{x=1/t} \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

移项得
$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 由分部积分法知

$$\int_0^1 x^n \ln x\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2},\ \int_0^1 x^n \ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)^3},$$

故
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\Big[\ln x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(3) $$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\Big[\ln^2 x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\Big]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}\ln^2 x\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)\frac{2}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{16}.$$

最后一个等式可由 $f(x) = x^2$ 在$[-,1]$上的傅里叶级数展开式

$$x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{\cos\pi x}{n^2}\quad(|x| \leqslant 1)$$

逐项积分后取 $x = 1/2$ 得到.

三、非正常积分的其它问题

非正常积分的其它几个问题都比较复杂，因此，我们只举几个例子介绍一下.

例 16 证明：若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 为单调函数，则

$$f(x) = o(1/x).$$

证 不妨设 $f(x)$ 单调减少. 先证当 $x \geqslant a$ 时，$f(x) \geqslant 0$. 否则，$\exists$ 点 $c \geqslant a$，使 $f(c) < 0$. 而 $x > c$ 时，$f(x) \leqslant f(c)$，从而

$$\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_c^{+\infty} f(c)\mathrm{d}x = -\infty.$$

得出 $\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛矛盾. 故 $f(x)$ 为非负的单调函数.

由 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ A > 0$，使当 $x > A$ 时，恒有 $\left|\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. 但是

$$\left|\int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right| = \int_{x/2}^{x} f(t)\mathrm{d}t \geqslant f(x)\cdot\left(x - \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}f(x).$$

所以，当 $x > A$ 时，$0 \leqslant xf(x) < \varepsilon$，即

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = o(1/x).$$

当 $f(x)$ 单调增加时，只要考虑 $-f(x)$，同样可证得

$$f(x) = o(1/x).$$

例 17 证明：若函数 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 内单调，且 $\int_0^a x^p f(x) = 0$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{p+1}f(x) = 0$.

证 不妨设 $f(x)$ 在 $0 < x < a$ 内单调减少. 设 $\exists\ 0 < \delta < a$，使 $0 < x < \delta$ 时 $f(x) > 0$. 此时，

$$\int_{x/2}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t > f(x)\int_{x/2}^{x} t^p\mathrm{d}t = c_p x^{p+1} f(x) > 0,$$

其中 $$c_p=\begin{cases}\dfrac{1-(1/2)^{p+1}}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 $c_p>0$ 为常数. 则由 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在，得

$$\lim_{x\to 0^+}\int_{x/2}^{x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0.$$

若上述 δ 不存在，由 $f(x)$ 单调减少知，当 $0<x<a$ 时，恒有 $f(x)<0$. 于是，当 $0<x<a/2$ 时，

$$\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x)\int_x^{2x} t^p\mathrm{d}t=c_p^* x^{p+1}f(x)<0,$$

其中 $$c_p^*=\begin{cases}\dfrac{2^{p+1}-1}{p+1}, & p\neq -1,\\ \ln 2, & p=-1.\end{cases}$$

故 $c_p^*>0$ 为常数.

于是 $|x^{p+1}f(x)|<\dfrac{1}{c_p^*}\left|\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t\right|$，依 $\int_0^a x^p f(x)\mathrm{d}x$ 存在，知 $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{2x} t^p f(t)\mathrm{d}t=0$. 故 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{p+1}f(x)=0$.

例 18 设 $\varphi(x)$ 为有界的周期函数，周期为 T，且 $\dfrac{1}{T}\int_0^T\varphi(x)\mathrm{d}x=c$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_n^{+\infty}\dfrac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=c$.

证 因为

$$n\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(n\cdot t/n)}{(t/n)^2}\mathrm{d}\,\frac{t}{n}\xrightarrow{u=t/n}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2}\varphi(nu)\mathrm{d}u,$$

由黎曼定理：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上绝对可积，$g(x)$ 是周期为 T 的函数，在 $[0,T]$ 上正常可积，则有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

因此，令 $f(u)=\dfrac{1}{u^2}$，$g(nu)=\varphi(nu)$，得

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_n^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(t)\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=c.$$

例 19 设 $f(x)=\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$,求 $f'(0)$.

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\cos(1/t)\mathrm{d}t}{x}$,

但 $\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t \xlongequal{1/t=u} \int_{1/x}^{+\infty}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

$=\frac{\sin u}{u^2}\Big|_{1/x}^{+\infty}+\int_{1/x}^{+\infty}\frac{2\sin u}{u^3}\mathrm{d}u=-x^2\sin\frac{1}{x}+2\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u^3}\mathrm{d}u$,

故 $\left|\dfrac{\int_0^x\cos(1/t)\mathrm{d}t}{x}\right|\leqslant |x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+\frac{2}{|x|}\int_{1/x}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^3}$

$=|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|+|x|\to 0\ (x\to 0)$.

所以 $$f'(0)=0.$$

例 20 证明:若 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证 由 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续知,$\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,\delta>0$(不妨设 $\delta\leqslant\varepsilon$),当 $x_1,x_2\in[a,+\infty)$,且 $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ 时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

又由 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛知,对上述 δ,$\exists\,N>a$,当 $x',x''>N$ 时,有 $\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

对任何 $x>N$,取 $x',x''>N$,使 $x'<x<x''$ 且 $x''-x'=\delta$,则由

$$|f(x)\delta|=\left|\int_{x'}^{x''}f(x)\mathrm{d}t-\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{x'}^{x''}|f(x)-f(t)|\mathrm{d}t+\left|\int_{x'}^{x''}f(t)\mathrm{d}t\right|\right|<\frac{\varepsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2},$$

即得 $$|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{2}\leqslant\varepsilon,\quad x>N.$$

所以

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

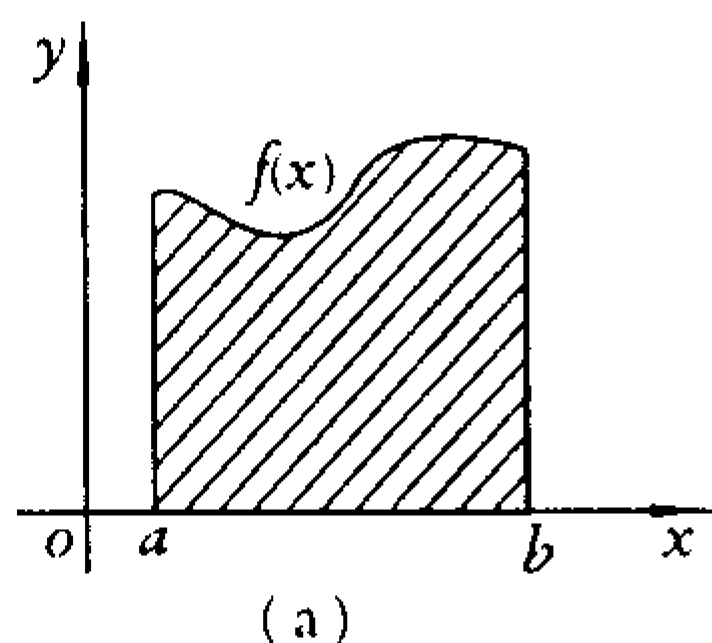
第五节　定积分的应用

主要内容

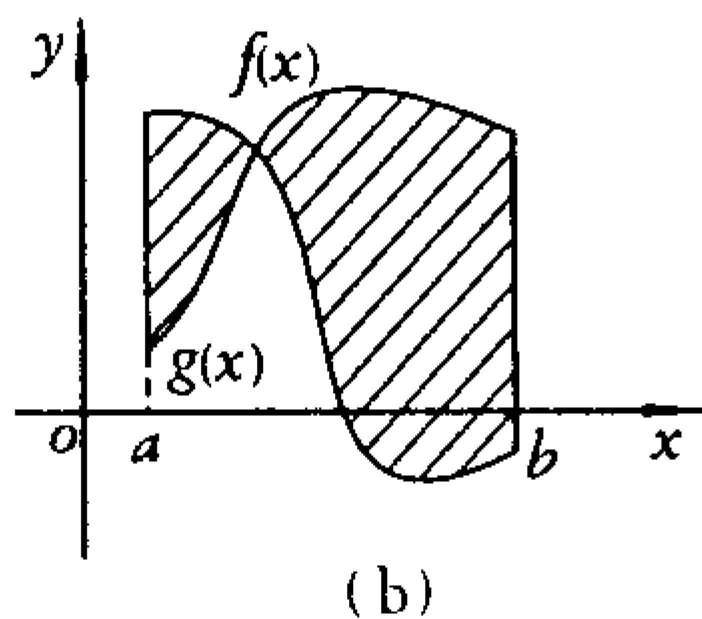
一、定积分的几何应用

1. 平面图形的面积

(1) 当图形由 $x = a, x = b\ (b > a), y = f(x)$ 以及 x 轴围成(见图 6.2(a))时,其面积 $S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.



(a)



(b)

图 6.2

(2) 当图形由 $x = a, x = b\ (b > a), y = f(x)$ 以及 $y = g(x)$ 围成(见图 6.2(b))时,其面积 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$.

(3) 当图形由 $x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 和 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成(见图 6.3(a))时,其面积 $S = \int_\alpha^\beta |y(t)| x'(t) \mathrm{d}t$.

(4) 当图形由 $r = r_1(\theta)$ 和 $r = r_2(\theta)$ 及 $\theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta$ 围成(见图 6.3(b))时,其面积 $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)] \mathrm{d}\theta$.

2. 由平面截面面积求体积

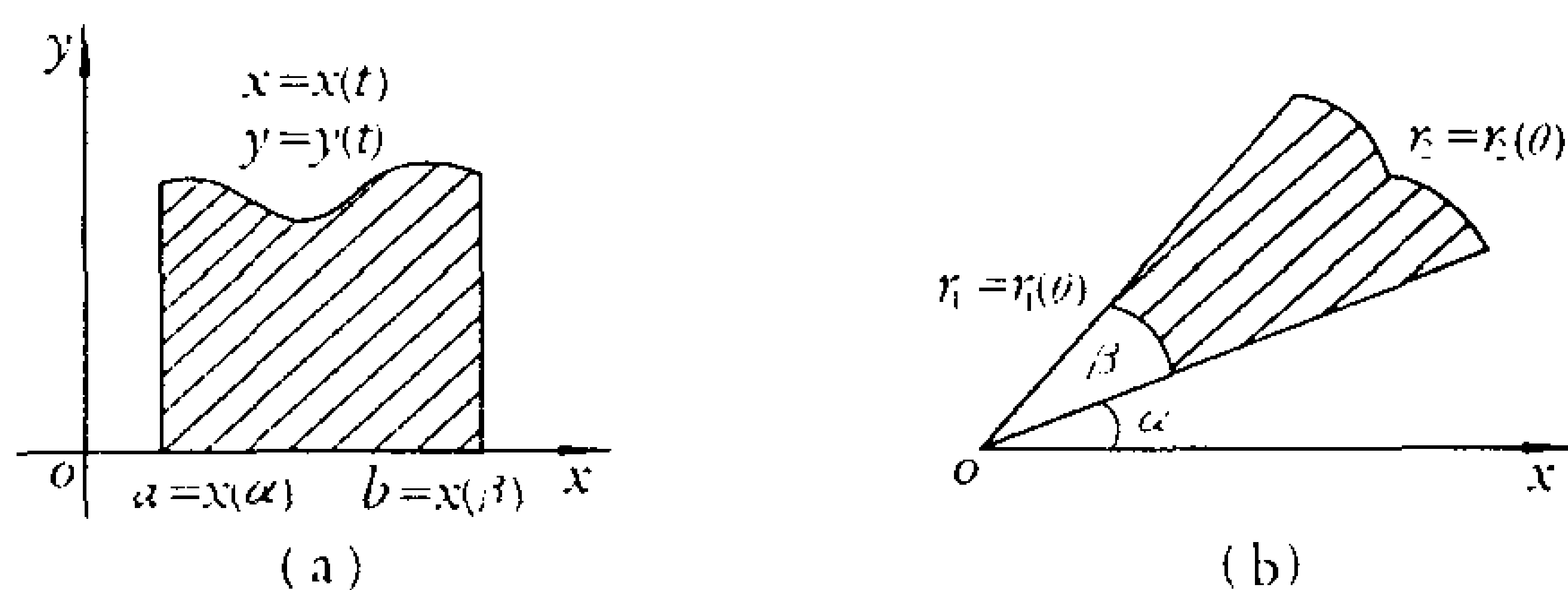


图 6.3

(1) 位于平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间($b>a$),在任一点 $x\in[a,b]$ 处,垂直于 x 轴的平面与立体 Ω 的截面面积为 $A(x)$,则立体 Ω 的体积 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$(见图 6.4(a)).

(2) 以直线 $x=a,x=b$,曲线 $y=f(x)$ 和 x 轴围成的曲边梯形,绕 x 轴旋转所得旋转体(见图 6.4(b))的体积 $V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$;绕 y 轴所得旋转体(见图 6.4(c))的体积 $V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

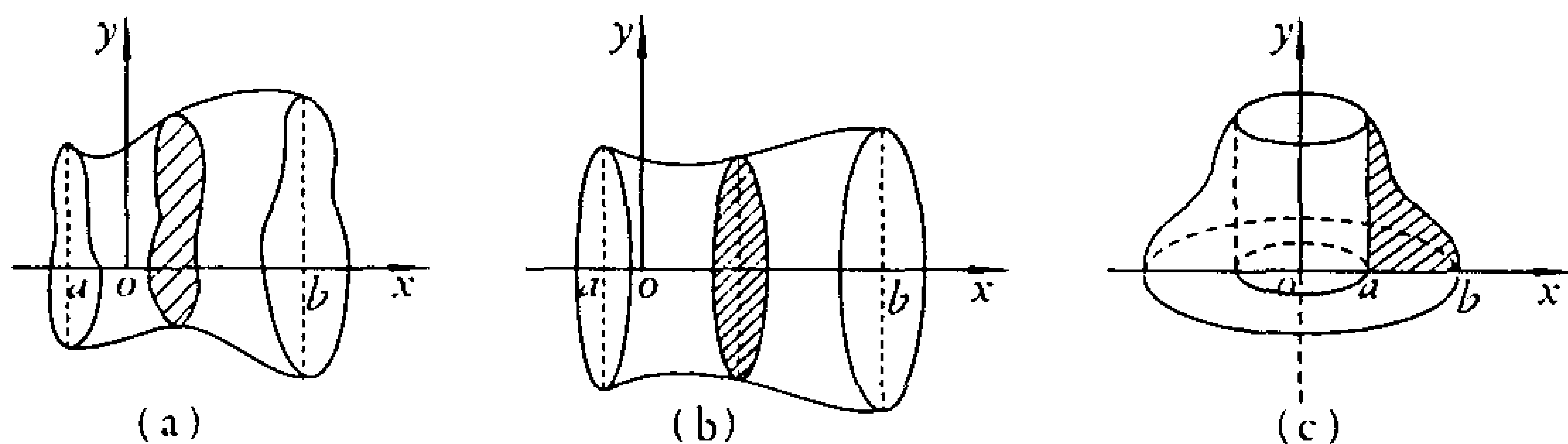


图 6.4

3. 平面光滑曲线的弧长

(1) 曲线 C 方程由方程由 $y=f(x),x\in[a,b]$ 表示,则弧长 $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$;若 C 方程由 $x=g(y),y\in[c,d]$ 表示,则弧长 $s=\int_c^d \sqrt{1+x'^2}\mathrm{d}y$.

(2) 曲线 C 由参数方程 $x=x(t),y=y(t),t\in[\alpha,\beta]$ 表示,

则弧长 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t$.

(3) 曲线 C 由极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 表示,则弧长 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r_\theta'^2}\mathrm{d}\theta$.

4. 光滑曲线的曲率、曲率半径与曲率圆

(1) 光滑曲线 C 由方程 $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ 给出,当 $f(x)$ 二阶可导时,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

(2) 光滑曲线 C 由方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ 给出,当 $x(t)$, $y(t)$ 二阶可导时,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{|x_t'y_t''-x_t''y_t'|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}$.

(3) 光滑曲线 C 由方程 $r=r(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ 给出,曲线的曲率 $\kappa=\dfrac{r^2+2r_\theta'^2-rr_\theta''}{[r^2+r'^2]^{3/2}}$.

(4) 若曲线 C 在其中一点 P 的曲率 $\kappa\neq 0$,在点 P 处的曲线的法线上所作的半径为 $1/\kappa$ 的圆与 C 切于 P,这个圆称为曲线的曲率圆.曲率圆的半径 $R=1/\kappa$ 称为曲率半径.

5. 旋转曲面的面积

(1) 若曲面 S 是平面光滑曲线 C: $y=f(x)$, $x\in[a,b]$,绕 x 轴旋转一周所得,则曲面的面积

$$S=2\pi\int_a^b|f(x)|\sqrt{1+f'^2(x)}\mathrm{d}x.$$

(2) 若曲面 S 是由光滑曲线段 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$,绕 x 轴旋转一周所得,则曲面的面积

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|y(t)|\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t.$$

二、定积分的物理应用

1. 液体的压力　当平面薄板放置在密度为 ρ 的液体中时,薄板每面上所受静压力与放置角度、深度和薄板面积有关,可用定积

分计算.

2. 变力做功 变力 $F(x)$ 在直线方向上从 $x=a$ 到 $x=b$ 所做的功 $W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x$.

3. 静力矩与质心(重心)

(1) 光滑曲线段 $y=f(x), x\in[a,b]$,线密度为 μ(常数),则曲线段质量

$$m=\int_b^a \mu\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}t.$$

$$M_x=\int_a^b \mu y\sqrt{1+x'^2}\mathrm{d}x,\quad M_y=\int_a^b \mu x\sqrt{1+y_t'^2}\mathrm{d}x,$$

质心 $P_0(x_0,y_0)$ 为

$$x_0=M_y/m,\ y_0=M_x/m.$$

(2) 平面图形 $y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x), a\leqslant x\leqslant b$,面密度为 μ(常数),则图形质量

$$m=\int_a^b \mu(y_2(x)-y_1(x))\mathrm{d}x,$$

$$M_x=\int_a^b \frac{\mu}{2}(y_2^2(x)-y_1^2(x))\mathrm{d}x,$$

$$M_y=\int_a^b \mu x(y_2(x)-y_1(x))\mathrm{d}x$$

质心 $P_0(x_0,y_0)$ 为

$$x_0=M_y/m,\ y_0=M_x/m.$$

4. 古尔金定理

(1) 第一定理:弧 C 绕不与其相交的轴旋转而成的旋转面的面积,等于这个弧的长度与这弧的质心所划出的圆周之长的乘积.

(2) 第二定理 面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体,其体积等于面积 S 与这面积的质心所划出的圆周之长的乘积.

疑难解析

1. 定积分的微元法的理论基础是什么?

答　定积分的微元法的理论基础指的是:能用定积分微元法所求解的量应具备什么条件.

(1) 总量具有区间可加性. 即总量是定义在某一区间上的,当将区间进行分割时,总量被分割为小区上的部分量,总量等于小区间上部分量的和.

面积、弧长、功等具有区间可加性,而速度、温度不具有区间可加性.

(2) 部分量的近似值具有线性性. 定积分是积分和式 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限,$f(\xi_i)\Delta x_i$ 是部分量的近似值,是关于 Δx 的线性 函数. 即部分量的近似值必须能表示为定义在区间上的某一函数 $f(x)$ 在小区间上一点 ξ_i 的值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积(Δx 的线性函数).

当总量具有以上两个性质时,一般可以用定积分的微元法来求解.

2. 实施定积分的微元法有哪些步骤?

答　定积分计算某个量是用某个函数 $F(x)$ 在区间上的改变量(增量)$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 来表示的,通常的四个步骤是:细分、取近似、求和、取极限.

实施定积分的微分法一般也遵循这四个步骤:(1) 细分区间 $[a,b]$ 为 n 个小区间;(2) 求部分量的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$;(3) 作和式 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i)\Delta x_i$;(4) 取极限 $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$,得到 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

也可以归纳提炼为两步:(1) 求出 $F(x)$ 的微分式(微元):

$\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$（由 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 抽象得出）；(2) 将微分式积分，得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$（由 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 得到）. 微元法就是求微元得到积分的方法.

对于应用问题，找出微分式 $f(x)\mathrm{d}x$ 是最关键的，其次是确定积分的区间. 至于怎样计算积分的问题，已经在不定积分与定积分等章解决了，不再赘述.

方法、技巧与典型例题分析

定积分应用的方法和技巧主要是指取微元的方法和技巧，这要求读者对具体问题有相当的了解，能通过几何、物理概念找到最合适的微元；其次是利用对称性、奇偶性、周期性等概念，将积分变得尽可能的简单.

一、定积分在几何中的应用

1. 平面图形的面积

例 1 设 $y=f(x)$ 是 $[a,a+h]$ 上的单调连续曲线，证明：在 $(a,a+h)$ 中总存在一点 ξ 使得图 6.5 中两阴影部分面积相等.

若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，记 $\xi=a+\theta h$，并求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

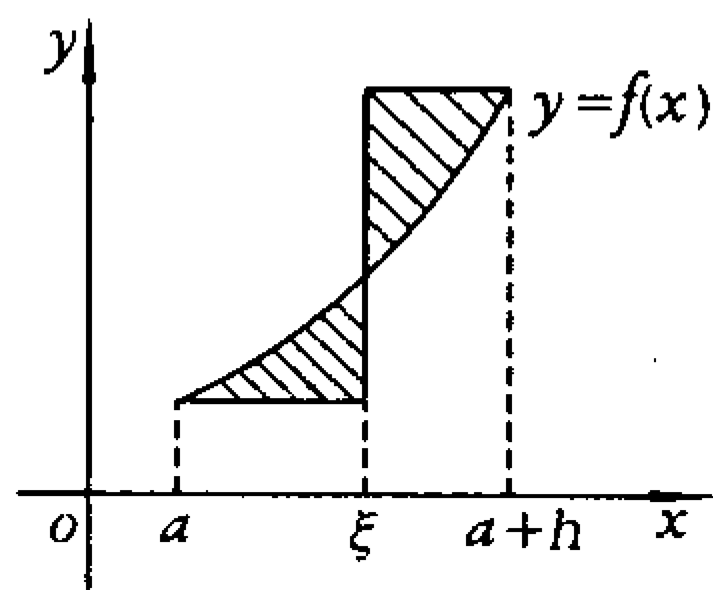


图 6.5

证 若两阴影部分面积相等，则

$$\int_a^{\xi}[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x=\int_{\xi}^{a+h}[f(a+h)-f(x)]\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x\\&=f(a+h)(a-\xi)-\int_{\xi}^{a+h}[f(a+h)-f(x)]\mathrm{d}x\\&\quad+f(a)(\xi-a)+\int_a^{\xi}[f(x)-f(a)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= (a+h)f(a+h) + - af(a) - \xi[f(a+b) - f(a)].$$

得 $\xi = \dfrac{(a+h)f(a+h) - af(a) - \int_a^{a+h} f(x)\mathrm{d}x}{f(a+h) - f(a)}$ （依中值定理）

$$= \frac{a[f(a+h) - f(a)] + hf(a+h) - h - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} \ (a < \eta < a+h)$$

$$= a + h \cdot \frac{f(a+h) - f(\eta)}{f(a+h) - f(a)} > a,$$

且 $$\xi < a + h.$$

若 $f(x)$ 单调增加，则上式中分子、分母均大于零；若 $f(x)$ 单调减少，则上式中分子、分母均小于零.

若 $f(x) = \mathrm{e}^x, \xi = a + \theta h$，则由 ξ 的第一个等式可得

$$\theta = \frac{h\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^{a+h} + \mathrm{e}^a}{h(\mathrm{e}^{a+h} - \mathrm{e}^a)} = \frac{\mathrm{e}^h(h-1)+1}{h(\mathrm{e}^h - 1)},$$

故 $$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h(h+1)+1}{h(\mathrm{e}^h-1)} \xlongequal{L'} \lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^h h}{\mathrm{e}^h - 1 + h\mathrm{e}^h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{1 - \mathrm{e}^{-h} + h} \xlongequal{L'} \lim_{h\to 0}\frac{1}{\mathrm{e}^{-h}+1} = \frac{1}{2}.$$

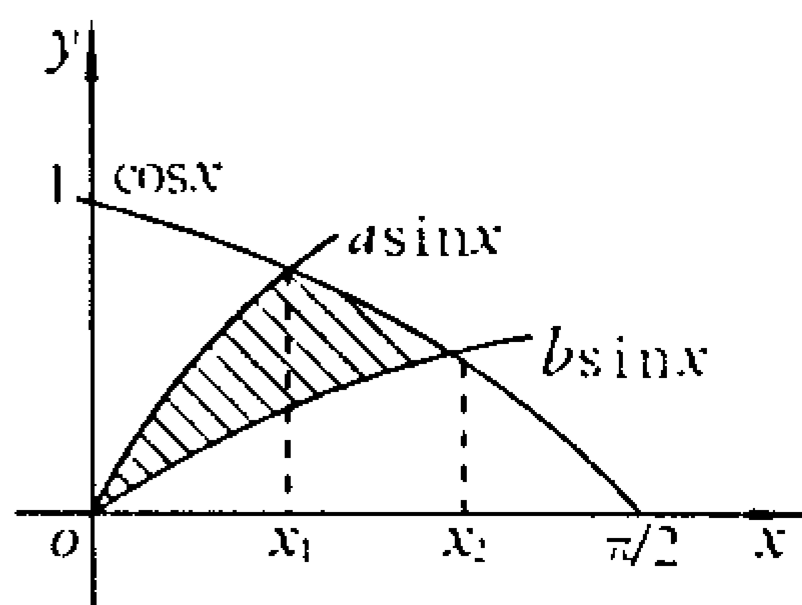


图 6.6

例 2 若由曲线 $y = \cos x\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$ 与两坐标轴所围成的图形被曲线 $y = a\sin x$ 与 $y = b\sin x$ $(a > b > 0)$ 三等分，求出 a, b 的值（见图 6.6）.

解 设曲线 $y = \cos x$ 与曲线 $y = a\sin x$ 和 $y = b\sin x$ 的交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2.

由 $\cos x_1 = a\sin x_1, \cos x_2 = b\sin x_2$ 得，$\tan x_1 = \dfrac{1}{a}, \tan x_2 = \dfrac{1}{b}$.

由 $a > b$ 及在 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $y = \tan x$ 的单调性知

$$\int_0^{x_1}\cos x\mathrm{d}x - \int_0^{x_1} a\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_1} a\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \cos x\mathrm{d}x - \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{x_2} b\sin x\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{\pi/2} \cos x\mathrm{d}x.$$

得
$$\begin{cases} 2\sin x_1 + 2a\cos x_1 - 2a = \sin x_2 + b\cos x_2 - b, \\ \sin x_1 + a\cos x_1 - a = - b\cos x_2 + b + 1 - \sin x_2, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} \sin x_1 = 1/\sqrt{1+a^2}, \quad \cos x_1 = a/\sqrt{1+a^2}, \\ \sin x_2 = 1/\sqrt{1+b^2}, \quad \cos x_2 = b/\sqrt{1+b^2}. \end{cases}$$

代入上面等式,得

$$\begin{cases} 2\sqrt{1+a^2} - 2a = \sqrt{1+b^2} - b, \\ \sqrt{1+a^2} - a = b + 1 - \sqrt{1+b^2}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 4/3, \\ b = 5/12. \end{cases}$$

例 3 在等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上任取点 (x,y),求由双曲线与点 (x,y) 和 $(x,-y)$ 同原点的连线所围成的曲边三角形的面积(见图 6.7).

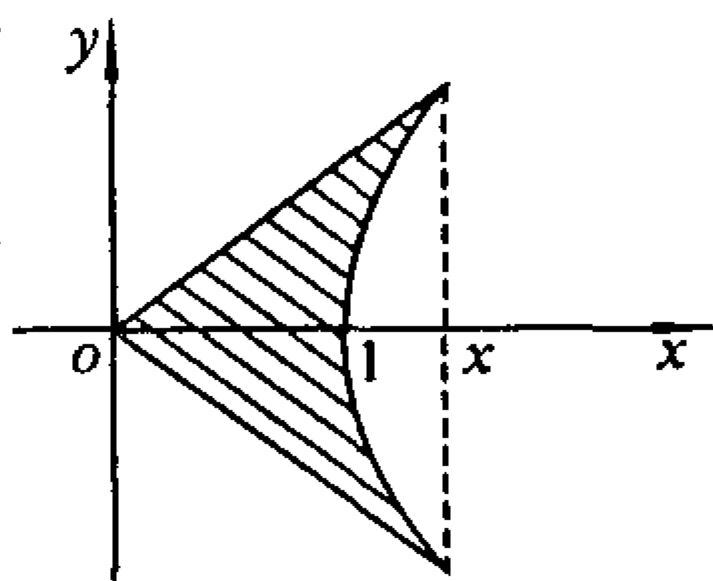


图 6.7

解 由 $x > 0$,显见图形对称于 x 轴,则

$$S = 2\left(\frac{xy}{2} - \int_1^x \sqrt{t^2-1}\mathrm{d}t\right)$$

$$= xy - [x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|]$$

$$= xy - xy + \ln(x+y) = \ln(x+y)$$

$$\Longrightarrow x + y = \mathrm{e}^S.$$

由
$$x^2 - y^2 = 1 \Longrightarrow x - y = \mathrm{e}^{-S},$$

知
$$x = \frac{\mathrm{e}^S + \mathrm{e}^{-S}}{2} = \cosh S, \quad y = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-S}}{2} = \sinh S.$$

例 4 利用图形(见图 6.8)面积计算定积分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}.$$

解 因为 $f(x) = \dfrac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$ 经过点 $A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$,$C(0,1)$,

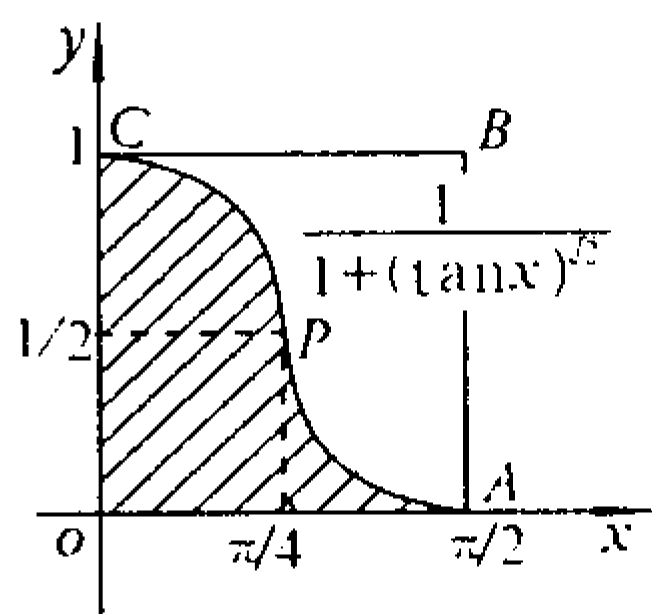


图 6.8

$P\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$，所以积分$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}$在数值上恰为矩形 $ABCo$ 面积的一半，即

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times 1=\frac{\pi}{4}.$$

可以通过证明点$P\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$是点$(x,f(x))$和点$\left(\frac{\pi}{2}-x,f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$的中点来证明曲线 $f(x)$ 关于 P 对称. 因为

$$f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{1+[\tan(\pi/2-x)]^{\sqrt{2}}}=\frac{1}{1+(\cot x)^{\sqrt{2}}}$$
$$=\frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+\tan^{\sqrt{2}}},$$

所以
$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}+\frac{(\tan x)^{\sqrt{2}}}{1+(\tan x)^{\sqrt{2}}}\right]=\frac{1}{2},$$

即曲线 $f(x)$ 过点$\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$.

例 5 在抛物线 $C_1:y=x^2-4x+3$ 上任取一点 P，向抛物线 $C_2:y=x^2-4x+7$ 作两切线，记两切点为 A,B. 证明：曲边三角形 PAB 面积 S 为常数(见图 6.9).

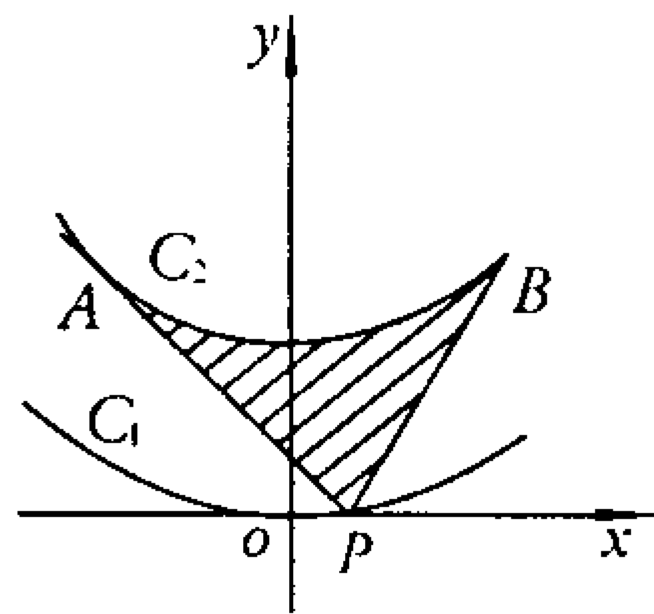


图 6.9

证 因为 $C_1:y=(x-1)^2-1$，$C_2:y=(x-1)^2+3$，不妨化为 $y=x^2$ 和 $y=x^2+4$. 下面我们就更一般的情形 $C_1:y=ax^2$ 和 $C_2:y=ax^2+b$ $(a>0,b>0)$ 来进行讨论.

设点 P 的坐标为 (t,at^2)，则过点 P 的直线与 C_2 相切于点 (x,ax^2+b)，从而切线斜率为

$$\frac{(ax^2+b)-at^2}{x-t}=2ax.$$

解得两切点坐标为

$$A\left(t-\sqrt{b/a},a\left(t-\sqrt{b/a}\right)^2+b\right),$$

$$B\left(t+\sqrt{b/a},a\left(t+\sqrt{b/a}\right)^2+b\right).$$

两切线为 PA,PB,切线方程分别为

$$y=2a(t-\sqrt{b/a})(x-t)+at^2,$$

$$y=2a(t+\sqrt{b/a})(x-t)+at^2.$$

从而,曲边三角形 PAB 面积

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{t-\sqrt{b/a}}^{t}\{(ax^2+b)-[2a(t-\sqrt{b/a})(x-t)+at^2]\}\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{t}^{t+\sqrt{b/a}}\{(ax^2+b)-[2a(t+\sqrt{b/a})(x-t)+at^2]\}\mathrm{d}x\\&=a\int_{t-\sqrt{b/a}}^{t}(x+\sqrt{b/a}-t)^2\mathrm{d}x+a\int_{t}^{t+\sqrt{b/a}}(x-\sqrt{b/a}-t)^2\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{3}\left[(x+\sqrt{b/a}-t)^3\right]\Big|_{t-\sqrt{b/a}}^{t}+\frac{a}{3}\left[(x-\sqrt{b/a}-t)^2\right]\Big|_{t}^{t-\sqrt{b/a}}\\&=\frac{b}{3a}\sqrt{ab}+\frac{b}{3a}\sqrt{ab}=\frac{2b\sqrt{ab}}{3a}.\end{aligned}$$

可知,曲边三角形面积与 t 无关,与 P 点的取法也无关,是一个常数.

例 6 由点 $M(2a,0)$ 向椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 作切线 MP 和 MQ,求曲边三角形 MPQ 所围图形的面积(见图 6.10).

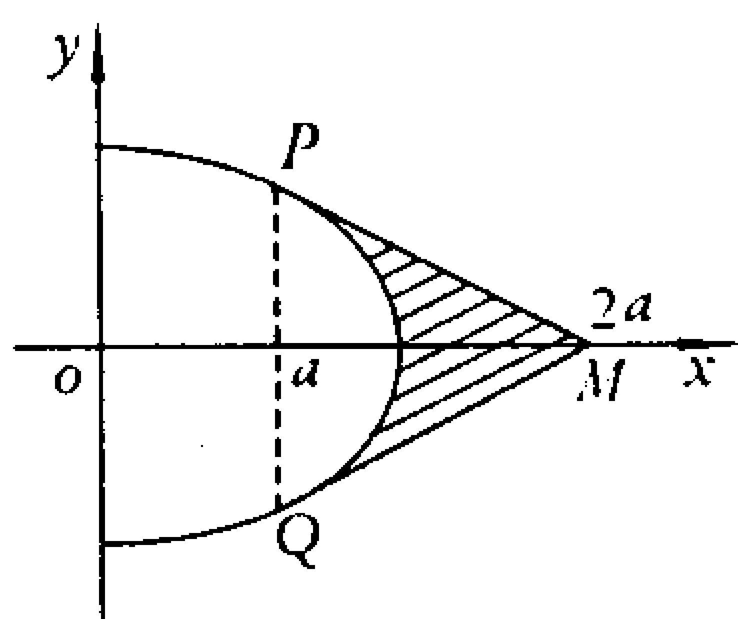


图 6.10

解 先求切线 MP,MQ 的方程. 对椭圆方程两边关于 x 求导,得

$$2b^2+2a^2yy'=0\Rightarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y},$$

则过任意点 (x,y) 的切线方程为

$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)\Rightarrow a^2y(Y-y)+b^2x(X-x)=0.$$

将 (X,Y) 以 $(2a,0)$ 代入,得

$$2ab^2x = b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

所以,点 P 坐标为$\left(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$,点 Q 坐标为$\left(\frac{a}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$.

由面积关于 x 轴的对称性,得

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}b/2}\left(2a - \frac{\sqrt{3}a}{b}y - \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=2\left[2ay - \frac{\sqrt{3}a}{3b}y^2 - \frac{a}{2b}\left(y\sqrt{b^2-y^2} + b^2\arcsin\frac{y}{b}\right)\right]_0^{\sqrt{3}b/2}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)ab.$$

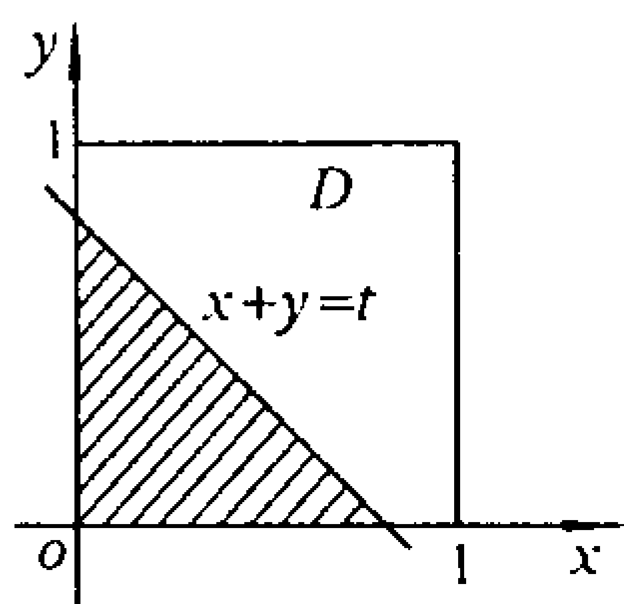


图 6.11

例 7 设 xoy 平面上有正方形 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$ 及直线 $l:x+y=t\ (t\geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分面积(见图 6.11),求$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\,(x\geqslant 0)$.

解 因为

$$S(t)=\begin{cases} t^2/2, & 0\leqslant t\leqslant 1,\\ -t^2/2+2t-1, & 1<t\leqslant 2,\\ 1, & t>2,\end{cases}$$

所以

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x t^2/2\mathrm{d}t\\ \int_0^1 t^2/2\mathrm{d}t+\int_1^x(-t^2/2+2t-1)\mathrm{d}t\\ \int_0^1 t^2/2\mathrm{d}t+\int_1^2(-t^2/2+2t-1)\mathrm{d}t+\int_2^x\mathrm{d}t\end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^3/6, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -x^3/6+x^2-x+\frac{1}{3}, & 1<x\leqslant 2,\\ x-1, & x>2.\end{cases}$$

例 8 已知抛物线 $y=px^2+qx\ (p<0,q>0)$ 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,设抛物线与 x 轴所围的平面图形面积为 S(见图 6.12).

(1) p 和 q 为何值时，S 达到最大值？

(2) 求出此最大值.

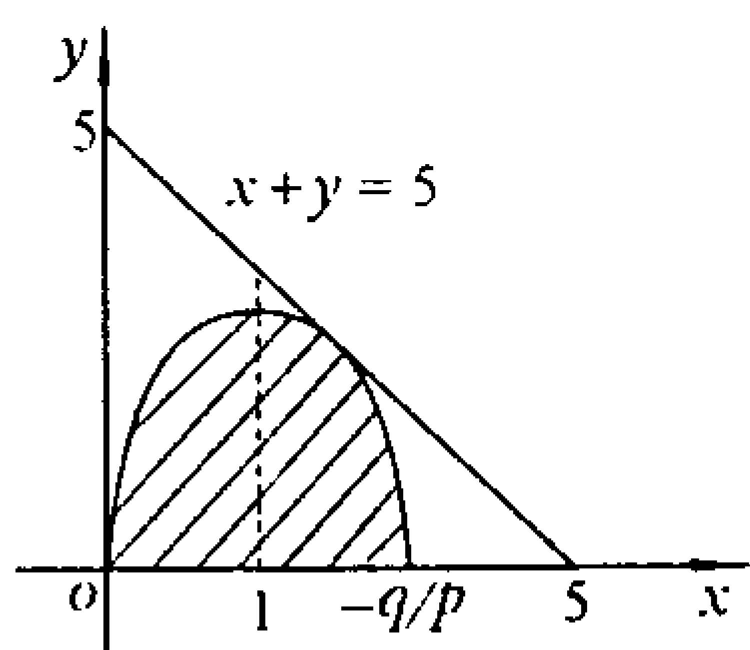


图 6.12

解 由 $y=px^2+qx$ 和 $y=0$ 求得抛物线与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0$，$x_2=-q/p$. 故

$$S=\int_0^{-q/p}(px^2+qx)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right)\Big|_0^{-q/p}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

由 $x+y=5$ 和 $y=px^2+qx$ 相切，得方程 $px^2+(q+1)x-5=0$ 只有惟一解，故判别式必等于零. 即

$$\Delta=(q+1)^2+20p=0\Longrightarrow p=-\frac{1}{20}(1+q)^2,$$

所以
$$S=S(q)=\frac{200q^3}{3(q+1)^4},$$

且
$$S'(q)=\frac{200q^3(3-q)}{3(q+1)^5}=0\Longrightarrow q=3.$$

当 $0<q<3$ 时，$S'(q)>0$；当 $q>3$ 时，$S'(q)<0$. 于是当 $q=3$ 时，$S(q)$ 有极大值，即最大值.

当 $q=3$ 时，$p=-\frac{1}{20}(1+3)^2=-\frac{4}{5}$，$S=\frac{225}{32}$.

例 9 求曲线 $y=x(x-1)(x-2)$ 与直线 $y=3(x-1)$ 所围图形面积(见图 6.13).

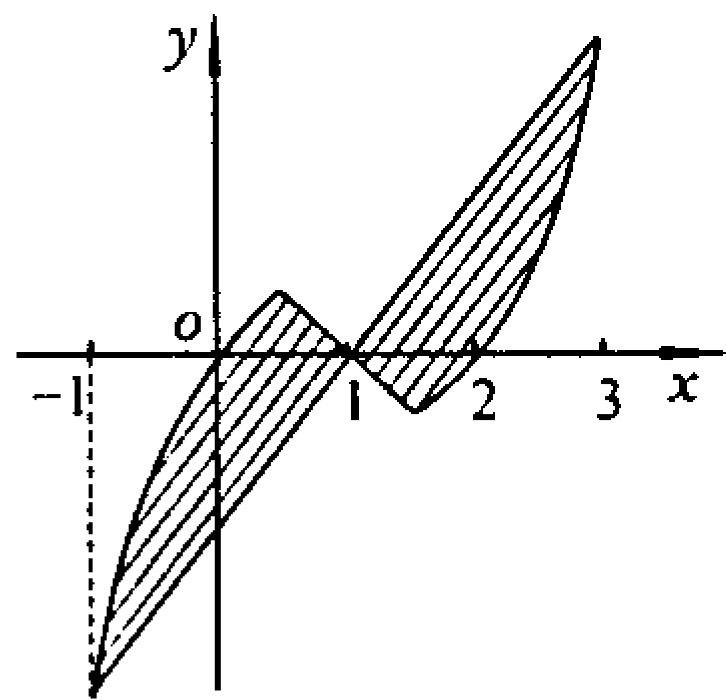


图 6.13

解 面积微元为

$$\mathrm{d}S=|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|\mathrm{d}x,$$

所以，所求图形面积

$$S=\int_{-1}^{3}|x(x-1)(x-2)-3(x-1)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{3}|x-1||(x-3)(x+1)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^{1}(1-x)(x-3)(x+1)\mathrm{d}x$$

$$+\int_1^3 (x-1)(x-3)(x+1)\mathrm{d}x = 8.$$

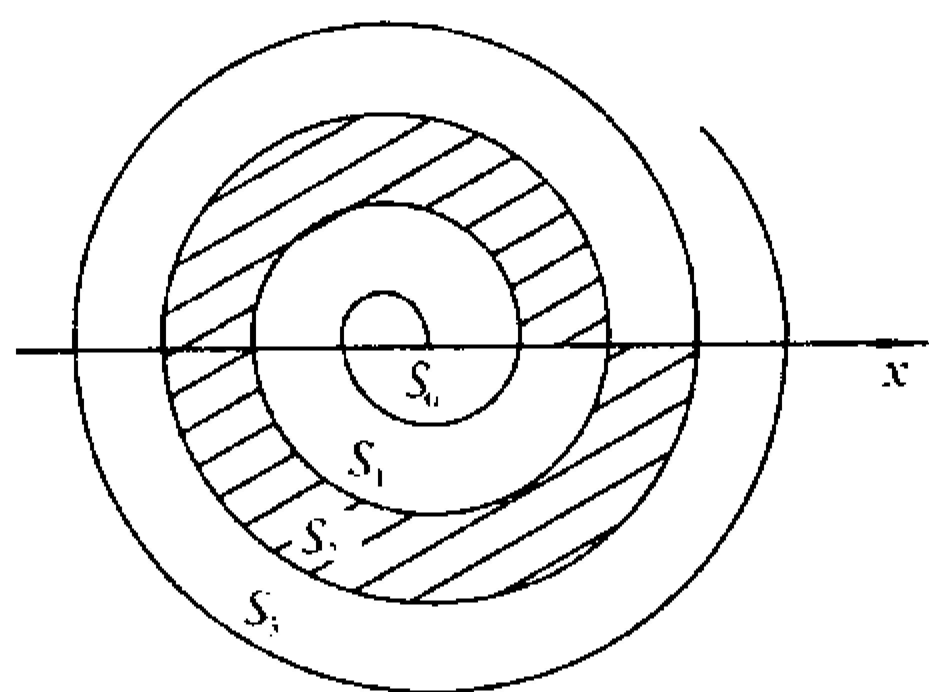


图 6.14

例 10 设阿基米德螺线 $r = a\theta$ $(a \geqslant 0, \theta \geqslant 0)$ 每相邻两圈间的面积为 $S_0, S_1, S_2, \cdots$（见图 6.14），证明：$S_1, S_2, S_3, \cdots$ 成等差数列.

证 利用极坐标下的面积计算公式，得

$$A_k = \frac{1}{2}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} (a\theta)^2 \mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}a^2\pi^3(3k^2+3k+1),$$

$$k = 0,1,2,\cdots.$$

因为 $S_0 = A_0, S_1 = A_1 - A_0, S_2 = A_2 - A_1, \cdots$，所以

$$S_k = A_k - A_{k-1} = \frac{4}{3}a^2\pi^3[3k^2+3k+1-(3k^2-3k+1)] = 8a^2\pi^3 k,\ k = 1,2,\cdots.$$

可知，$S_1, S_2, S_3, \cdots$ 是公差为 $8a^2\pi^3$ 的等差数列.

例 11 求闭曲线 $y^2 = x^2 - x^4$ 所围图形的面积.

解 此图形特征可由方程得出，它关于 x, y 轴对称. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，得出曲线方程为

$$r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta - r^4\cos^4\theta \Longrightarrow r^2\cos^4\theta = \cos 2\theta \geqslant 0,$$

所以 $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ 或 $3\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/4$. 故

$$\mathrm{d}S_1 = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta,$$

于是，由图形的对称性，得

$$S = 4S_1 = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\theta}{\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}(1-\tan^2\theta)\mathrm{d}\tan\theta$$

$$= 2\left(\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta\right)\Big|_0^{\pi/4} = 2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

类似地，可求得闭曲线 $(x^2+y^2) = a^2(x^4+y^4)$ 所围图形的面积. 曲线的极坐标方程为 $r^2 = a^2\left[1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right]$. 由图形关于 x 轴

和 y 轴的对称性,可得

$$S = 4 \times \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} r^2 \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2} a^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} a^2 \mathrm{d}\theta + a^2\int_0^{\pi/2} \cos 4\theta \mathrm{d}\theta = \frac{3}{4}\pi a^2.$$

例 12 求封闭曲线 $r = \dfrac{2at}{1+t^2}, \theta = \dfrac{\pi t}{1+t}$ 所围图形的面积.

解 因为当曲线封闭时,t 由 0 变到 $+\infty$,所以,所围图形面积为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} r^2 \mathrm{d}\theta = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left[\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4}\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\int_0^b \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right]$$

$$= 2\pi a^2 \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4}\arctan t - \frac{1}{4(1+t^2)}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \pi a^2(1 - \pi/4).$$

2. 其它几何应用

例 13 已知曲线为星形线(见图 6.15):$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t\ (a > 0, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. 求:

(1) 所围成图形的面积 S_1.

(2) 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V;

(3) 绕直线 $y = x$ 旋转所得旋转曲面面积 S_2.

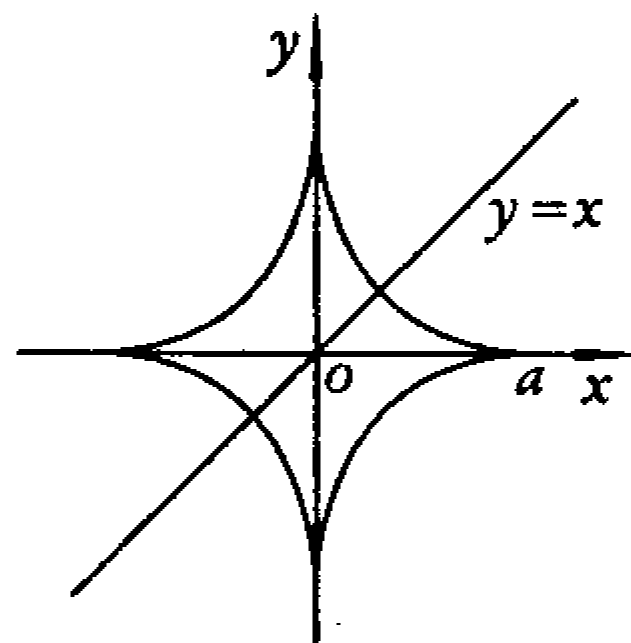


图 6.15

解 (1) 由对称性,得

$$S_1 = 4\int_{\pi/2}^0 y(t)x'(t)\mathrm{d}t = 4\int_0^{\pi/2} a\sin^3 t 3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t = 12a^2\int_0^{\pi/2} (\sin^4 t - \sin^6 t)\mathrm{d}t$$

$$= 12a^2\left(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) $V = 2\pi\int_0^{\pi/2} |a^2\sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)|\mathrm{d}t$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin^7 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi a^3\left(\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}-\frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\right)=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

(3) $\mathrm{d}S_2=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t$

$$=\begin{cases}3a\sin t\cos t\mathrm{d}t, & \pi/4\leqslant t\leqslant\pi/2,\\ -3a\sin t\cos t\mathrm{d}t, & \pi/2\leqslant t\leqslant 3\pi/4.\end{cases}$$

由对称性，得旋转曲面面积

$$S_2=2\left(2\pi\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\frac{y-x}{\sqrt{2}}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\cdot 3a^2\left[\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\mathrm{d}t\right.$$

$$\left.-\int_{\pi/2}^{3\pi/4}(\sin^3 t-\cos^3 t)\sin t\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{12\pi}{\sqrt{2}}a^2\left(\frac{\sin^5 t+\cos^5 t}{5}\bigg|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{\sin^5 t+\cos^5 t}{5}\bigg|_{\pi/2}^{3\pi/4}\right)$$

$$=\frac{3}{5}\pi a^2(4\sqrt{2}-1).$$

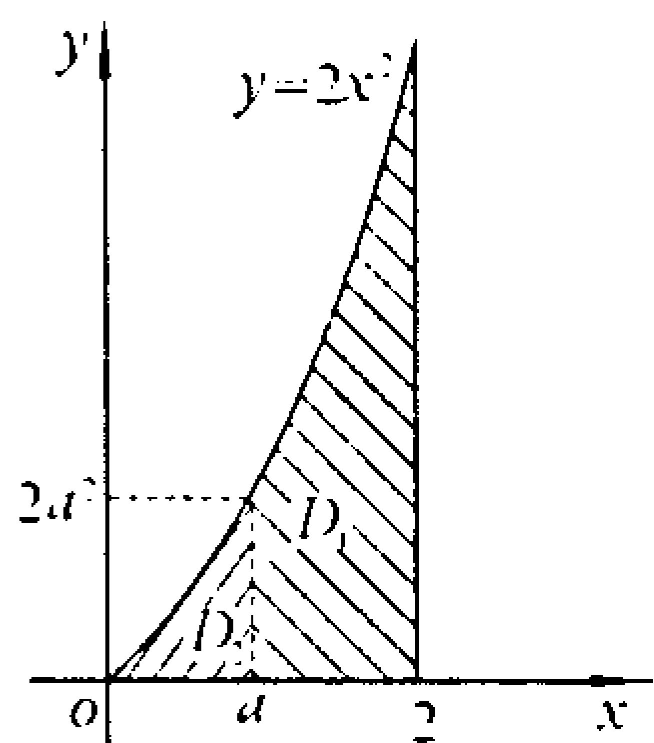


图 6.16

例 14 设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a, x=2$ 和 $y=0$ 所围成的区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0, x=a$ 所围成的区域，其中 $0<a<2$（见图 6.16）.

(1) 求由 D_1 绕 x 轴旋转所成旋转体体积 V_1 和由 D_2 绕 y 轴旋转成旋转体体积 V_2；

(2) 问：当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

解 (1) $V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{5}\pi(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=2\pi a^4-\pi a^4=\pi a^4.$$

(2) $V = V_1 + V_2 = \frac{4}{5}\pi(32 - a^5) + \pi a^4$,

$$V'_a = 4\pi a^3(1 - a),$$

令 $V'_a = 0$，知 $a = 1$ 为惟一驻点.

当 $0 < a < 1$ 时，$V'_a > 0$；当 $a > 1$ 时，$V'_a < 0$. 故 $a = 1$ 时有极大值，即最大值，所以最大值 $V(1) = \frac{129}{5}\pi$.

例 15 求微分方程 $x\mathrm{d}y + (x - 2y)\mathrm{d}x = 0$ 的一个解 $y = y(x)$，使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

解 将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x}y = -1$，即得

$$y = \mathrm{e}^{\int 2/x\mathrm{d}x}\left[-\mathrm{e}^{\int 2/x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right] = x^2\left(\frac{1}{x} + c\right) = x + cx^2,$$

故旋转体体积

$$V(c) = \int_1^2 \pi(x + cx^2)^2\mathrm{d}x = \pi\left(\frac{31}{5}c^2 + \frac{15}{2}c + \frac{7}{3}\right),$$

$$V'(c) = \pi\left(\frac{62}{5}c + \frac{15}{2}\right),$$

令 $V'(c) = 0$，知 $c = -\frac{75}{124}$.

因为 $V''(c) = \frac{62}{5} > 0$，所以 $x = -\frac{75}{124}$ 为惟一极小值点，即最小值点. 于是

$$y = x - \frac{75}{124}x^2.$$

例 16 求曲线 $y = x^2 - 2x, y = 0, x = 1, x = 3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V（见图 6.17）.

解 $S = S_1 + S_2$.

$$S_1 = \int_1^2 (2x - x^2)\mathrm{d}x = \left(x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3},$$

$$S_2 = \int_2^3 (x^2 - 2x)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_2^3 = \frac{4}{3},$$

所以，所求图形面积 $S = S_1 + S_2 = 2$.

平面图形 S_1 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_1 = \pi\int_{-1}^{0}(1 + \sqrt{1 + y})^2 \mathrm{d}y - \pi = \frac{11}{6}\pi;$$

平面图形 S_2 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积

$$V_2 = 27\pi - \pi\int_{0}^{3}(1 + \sqrt{1 + y})^2 \mathrm{d}y = \frac{43}{6}\pi.$$

所以，所求旋转体体积 $V = V_1 + V_2 = 9\pi$.

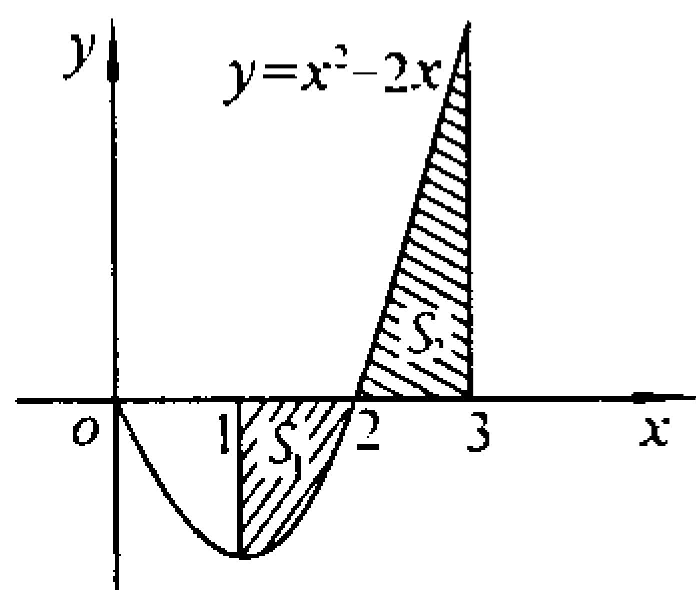


图 6.17

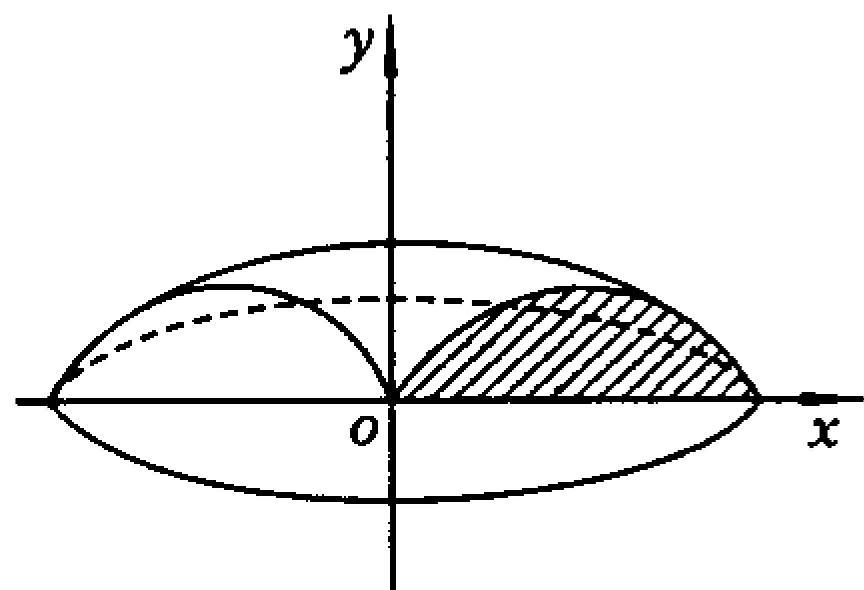


图 6.18

例 17 求摆线：$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leqslant 2\pi$ 与 x 轴围成的平面图形绕 y 轴旋转所得旋转体的体积 V(见图 6.18).

解

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_{0}^{2\pi a} x \cdot y \mathrm{d}x = 2\pi\int_{0}^{2\pi} a^3(t - \sin t)(1 - \cos t)^2 \mathrm{d}t \\ &= 2\pi a^3\int_{0}^{2\pi}(t - \sin t)\left[1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\right]\mathrm{d}t \\ &= 2\pi a^2\int_{0}^{2\pi}(\frac{3}{2}t - \frac{3}{2}\sin t - 2t\cos t + \sin 2t + t\cos 2t \\ &\quad - \sin t\cos 2t)\mathrm{d}t = 2\pi a^3 \cdot 2\pi^2 \\ &= 6\pi^3 a^3. \end{aligned}$$

例 18 立体底面为抛物线 $y = x^2$ 与直线 $y = 1$ 围成的平面图形，如图 6.19 所示，而任一垂直于 y 轴的截面分别是：(1) 正方形（见图(a))；(2) 等边三角形(见图(b))；(3) 半圆形(见图(c)).求这三种情形下立体的体积.

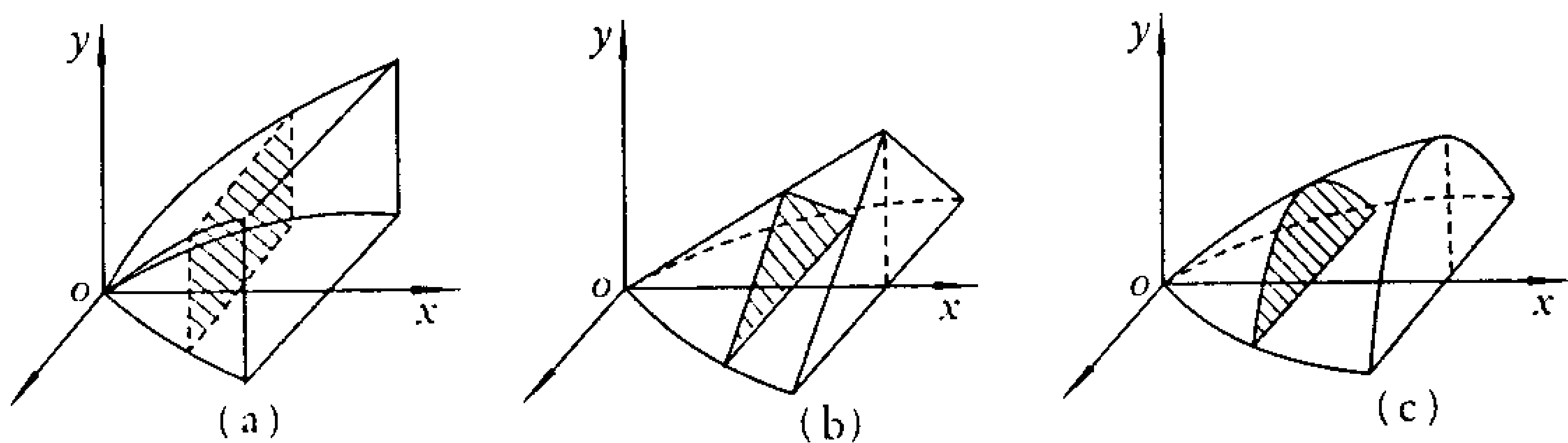


图 6.19

解　先求出三种情形下的截面积 S_1, S_2, S_3，再利用公式求体积 V_1, V_2, V_3.

(1) $S_1(y) = (2\sqrt{y})^2 = 4y$，故

$$V_1 = \int_0^1 S_1(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 4y\mathrm{d}y = 2.$$

(2) $S_2(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{y})^2 = \sqrt{3}y$，故

$$V_2 = \int_0^1 S_2(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{3}y\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3) $S_3(y) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{y})^2 = \frac{1}{2}\pi y$，故

$$V_3 = \int_0^1 S_3(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2}\pi y\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\pi.$$

例 19　两个半径为 r 的圆柱的轴垂直相交，求其所围成的立体的体积(见图 6.20). 若两半径分别为 R 和 r $(R > r)$，体积有何变化?

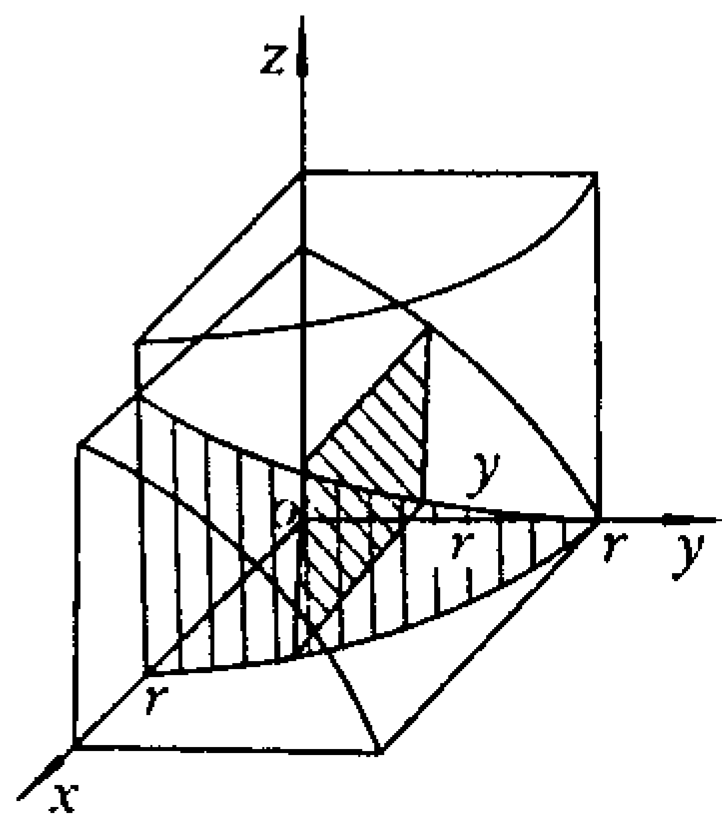


图 6.20

解　作平行于 x 轴、与 x 轴距离为 y 且垂直 xoy 平面的平面，与两圆柱体公共部分的截面积为 $S(y) = r^2 - y^2$，于是

$$V = 8\int_0^r (r^2 - y^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}r^3.$$

若两圆柱有不同半径，则截面为矩形，截面积

$$S(y) = \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)},$$

立体体积 $$V = 8\int_0^r \sqrt{(r^2 - y^2)(R^2 - y^2)}\mathrm{d}y$$

是一个椭圆积分. 作代换 $y = r\sin\theta$,且令 $k = r/R$,则

$$\begin{aligned} V &= 8Rr^2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8}{3}R^3[(1 + k)^2E(k) - (1 - k^2)F(k)], \end{aligned}$$

其中 $E(k)$ 和 $F(k)$ 是完全椭圆积分,可查表得出.

例 20 设悬链线 $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ 在 $[0,u]$ 上一段弧长和曲边梯形面积分别为 $s(u)$ 和 $S(u)$,如图 6.21 所示;该曲边梯形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积和侧面积分别为 $V(u)$ 和 $S_{\mathrm{C}}(u)$;旋转体在 $x = u$ 一端的底面积为 $S_{\mathrm{D}}(u)$. 证明:$\forall\ u > 0$.

(1) $s(u) = S(u), S_{\mathrm{C}}(u) = 2V(u)$;

(2) $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{S_{\mathrm{C}}(u)}{S_{\mathrm{D}}(u)} = 1$.

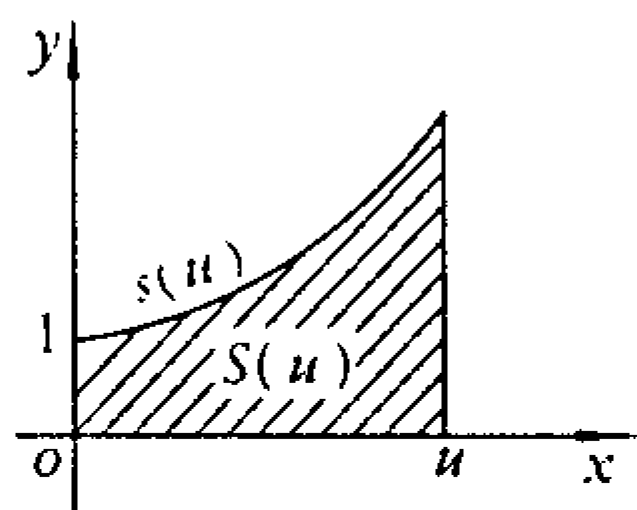


图 6.21

证 (1) 由于 $y' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$,所以

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + [(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2]^2} = y,$$

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = \int_0^u y\mathrm{d}x = S(u),$$

$$S_{\mathrm{C}}(u) = 2\pi\int_0^u y\sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^u y^2\mathrm{d}x = 2V(u).$$

$$\begin{aligned} (2)\ S_{\mathrm{C}}(u) &= 2\pi\int_0^u y^2\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^u(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} + 2)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{2u} - \mathrm{e}^{-2u} + 4u), \end{aligned}$$

$$S_{\mathrm{D}}(u) = \pi y^2(u) = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u})^2 = \frac{\pi}{4}(\mathrm{e}^{2u} + \mathrm{e}^{-2u} + 2),$$

故
$$\lim_{u\to+\infty}\frac{S_C(u)}{S_D(u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{e^{2u}-e^{-2u}+4u}{e^{2u}+e^{-2u}+2}=1.$$

例21 求半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 所截得的一段弧长 s(见图 6.22).

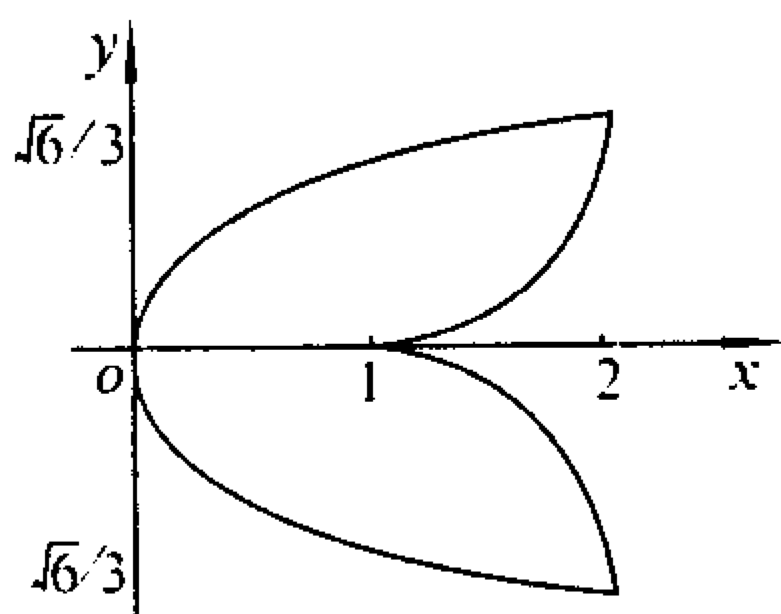


图 6.22

解 求得两曲线的交点为 $\left(2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(2,-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,且知弧关于 x 轴对称. 所以,
$$y'=\left(\frac{2}{3}(x-1)^2\right)'=\frac{(x-1)^2}{y},$$
$$s=2\int_1^2\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_1^2\sqrt{3x-1}\mathrm{d}x=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{3/2}-1\right].$$

例 22 求外摆线一拱的长. 外摆线方程为
$$\begin{cases}x=(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t,\\ y=(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t,\end{cases}\quad 0<b<a.$$

解 先求出外摆线一拱 t 的变化区间. 因为外摆线一拱的始点与终点都在圆周 $x^2+y^2=a^2$ 上,所以解方程
$$a^2=x^2+y^2=\left[(a+b)\cos t-b\cos\frac{a+b}{b}t\right]^2$$
$$+\left[(a+b)\sin t-b\sin\frac{a+b}{b}t\right]^2$$
$$=(a+b)^2+b^2$$
$$-2b(a+b)\left(\sin t\sin\frac{a+b}{b}t+\cos t\cos\frac{a+b}{b}t\right)$$
$$=a^2+2ab+2b^2-2b(a+b)\cos\frac{a}{b}t,$$

得 $\cos\frac{a}{b}t=1\Longrightarrow t=0$ 与 $t=\frac{2b}{a}\pi$. 即外摆线的一拱，参数 $0\leqslant t\leqslant\frac{2b}{a}\pi$. 于是

$$x_t'=-(a+b)\left(\sin t-\sin\frac{a+b}{b}t\right)\mathrm{d}t,$$

$$y_t'=(a+b)\left(\cos t-\cos\frac{a+b}{b}t\right)\mathrm{d}t,$$

$$x_t'^2+y_t'^2=\left[4(a+b)^2\sin^2\frac{a}{2b}t\right]\mathrm{d}t^2.$$

得
$$s=\int_0^{2b\pi/a}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2b\pi/a}2(a+b)\sin\frac{a}{2b}t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{4(a+b)b}{a}\cos\frac{a}{2b}t\Big|_0^{2b\pi/a}=\frac{8b}{a}(a+b).$$

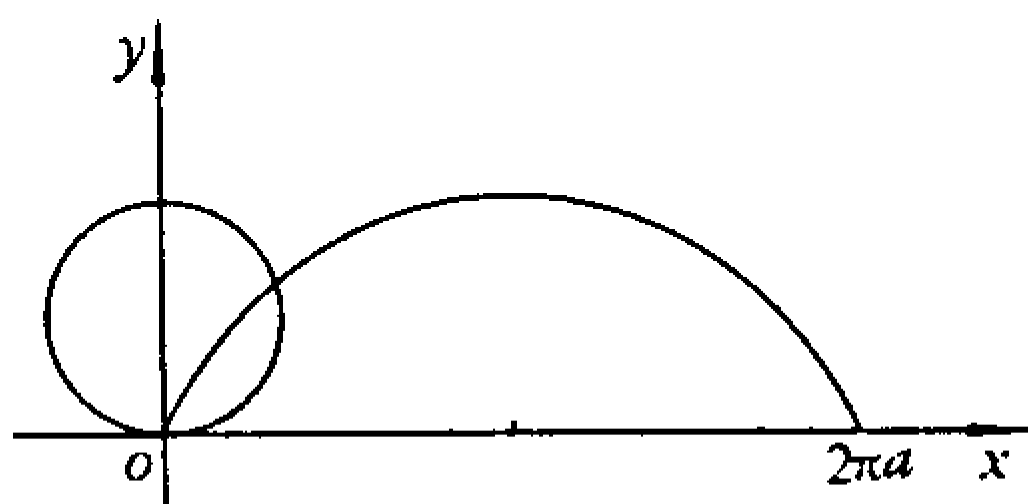


图 6.23

例 23 如图 6.23 所示，在摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$ 上，求分摆线第一拱为 1∶3 的点的坐标.

解 因为 $x_t'=a(1-\cos t)$，$y_t'=a\sin t$，所以

$$x_t'^2+y_t'^2=4a^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

当 t 从 0 变到 2π 时，摆线划出第一拱，有

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=8a.$$

设分点 $t=t_0$，则由

$$s(t_0)=\int_0^{t_0}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=4a\left(1-\cos\frac{t_0}{2}\right)=2a,$$

得 $t_0=\frac{2}{3}\pi$，于是

$$x_0=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\ y_0=\frac{3}{2}a,$$

即所求分点坐标为$\left(\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x, \frac{3}{2}a\right)$.

二、定积分在物理中的应用

定积分的物理应用的关键同样是微元的确定，要根据物理定律和问题的具体条件确定坐标系，选择物理量，确定定积分微元.

例 24 某闸门的大小和形状如图 6.24 所示，闸门的上部为矩形 $ABCD$，下部由二次抛物线与线段 AB 所围成. 当水面与闸门的上端相平时，欲使闸门矩形部分承受的水压力与闸门下部承受的水压力之比为 5∶4，闸门矩形部分的高应为多少米？

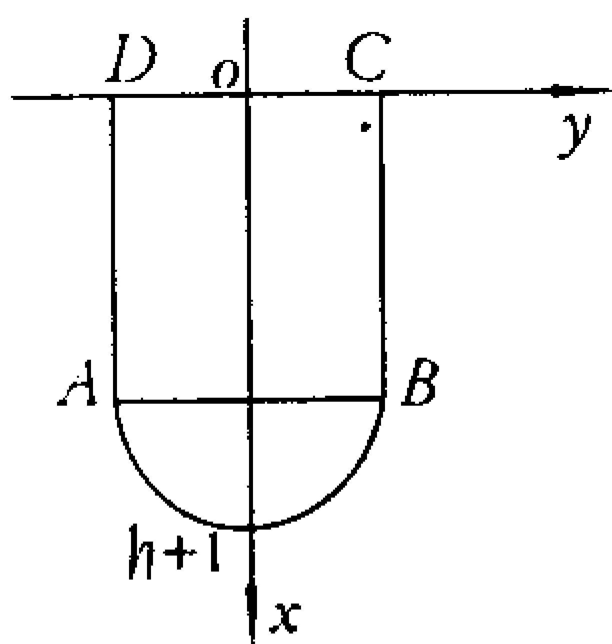


图 6.24

解 取坐标系如图，则抛物线方程为

$$x = h + 1 - y^2.$$

闸门矩形部分所受水压力

$$p_1 = 2\int_0^h \rho g x \mathrm{d}x = \rho g h^2,$$

闸门下部承受水压力

$$p_2 = 2\int_h^{h+1} \rho g x \sqrt{h+1-x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\xlongequal{\sqrt{h+1-x}=t} 4\rho g \int_0^1 (h+1-t^2)t^2 \mathrm{d}t$$

$$= 4\rho g \left[(h+1)\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]\Big|_0^1 = 4\rho g\left(\frac{h}{3}+\frac{2}{15}\right).$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{5}{4} \Longrightarrow \frac{h^2}{4(h/3+2/15)} = \frac{5}{4} \Longrightarrow h = 2.$$

即闸门矩形部分高应为 2m.

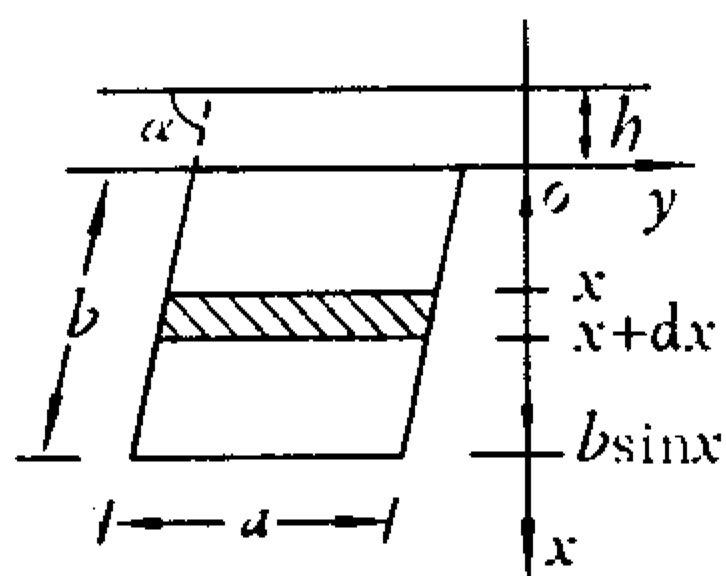


图 6.25

例 25 一边长为 a 和 b $(a>b)$ 的矩形薄板与液面成 α 角沉入液体内，其长边平行于液面，位于深 h 处. 若液体的密度为 ρ. 求薄板每面上的液体压力.

解 如图 6.25 建立坐标系. x 的变化区间为 $[0,b\sin\alpha]$, $\mathrm{d}S = a\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\mathrm{d}x$, 压力微元 $\mathrm{d}p=\rho(h+x)\frac{a\mathrm{d}x}{\sin\alpha}$, 于是

$$p=\int_0^{b\sin\alpha}\rho(h+x)\frac{a\mathrm{d}x}{\sin\alpha}=\frac{a\rho}{\sin\alpha}\left(hx+\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_0^{b\sin\alpha}$$

$$=\rho ab\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right).$$

例 26 有一装满密度为 $960\mathrm{kg/m^3}$ 的油料的贮油罐, 在其下部有一个半径为 $R=380\mathrm{mm}$ 的检修孔. 设孔的中心与液面的距离 $h=6800\mathrm{mm}$, 孔口挡板用每个能承 500kg 力的螺钉紧固, 问此检修孔需用多少个螺钉.

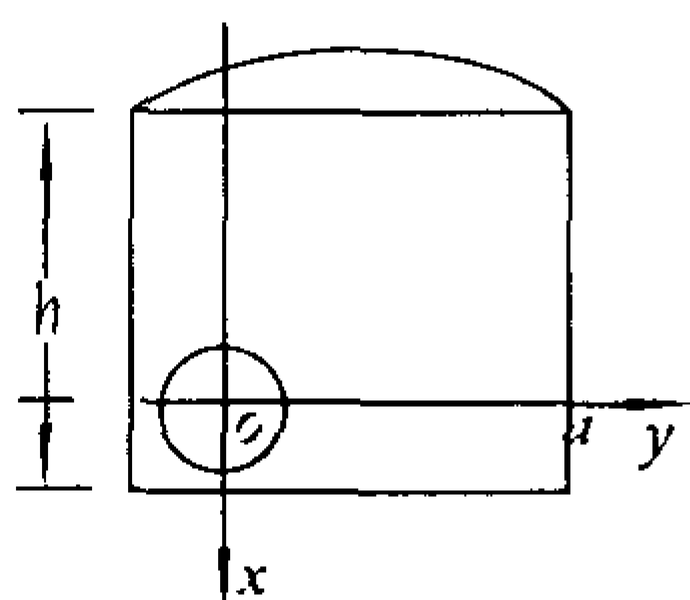


图 6.26

解 如图 6.26 建立坐标系. 圆孔方程为 $x^2+y^2=R^2$, 积分区间为 $[-R,R]$. 对应于小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的压力微元

$$\mathrm{d}p=\rho(h+x)2\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

故孔口挡板所受压力

$$p=\int_{-R}^{R}2\rho(h+x)\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x=4\rho h\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\rho h\cdot\frac{\pi}{4}R^2=\rho h\pi R^2.$$

将题给数据代入得

$$p=960\times6.8\times3.4\times0.38^2\approx2952\ (\mathrm{kg})$$

$$\Longrightarrow n=\left[\frac{2952}{500}\right]+1\approx6.$$

所以至少需要 6 个紧固螺钉.

例 27 一个半径 $R=3$、密度 $\rho=2$ 的实心球完全沉没在水中, 球顶部到水面的距离为 16, 求把球提高到底部与水面相齐需做的功.

解 因为球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$, 球的质量 $M=V\rho=$

72π，当球完全沉没水中时，浮力为 36π. 所以，球提升到顶部与水面相切时所做的功

$$W_1 = (72 - 36)\pi \times 16 = 576\pi.$$

如图 6.27 建立坐标系，考虑将球提升出水面需做功 W_2. 设将球顶从点(0,0) 提到点$(0,y)$ $(0 \leqslant y \leqslant 6)$，记此时水面上球的体积为 V_1，水面下部体积为 $36\pi - V_1$. 用平行截面积方法求 V_1，在点(0,0) 与点$(0,y)$ 间任取一点$(0,Y)$ 作截面圆，设其半径为 X，则应有

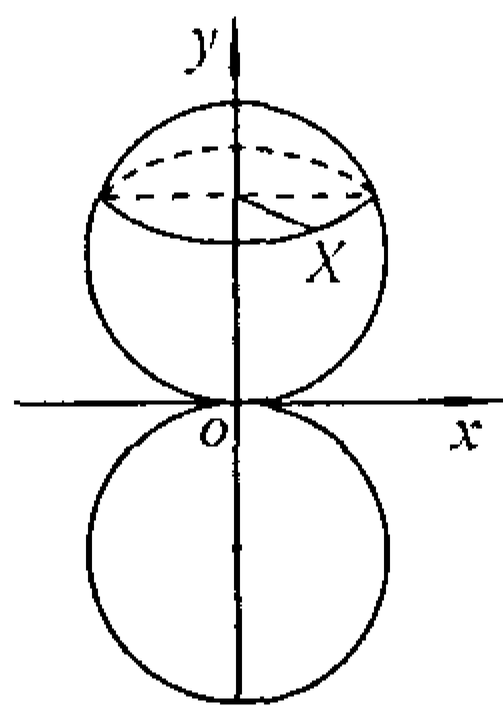


图 6.27

$$X^2 + (Y - y + 3)^2 = 3^2,$$

故 $$V_1 = \pi\int_0^y X^2 \mathrm{d}y = \pi\int_0^y [9 - (Y - y + 3)^2]\mathrm{d}y$$
$$= \pi\left[9Y - \frac{1}{3}(Y - y + 3)^3\right]\Bigg|_0^y$$
$$= \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2.$$

于是提升力

$$F = V\rho - (36\pi - V_1) \times 1 = 36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2.$$

故 $$W_2 = \int_0^6 F\mathrm{d}y = \int_0^6\left[36\pi + \frac{\pi}{3}(9 - y)y^2\right]\mathrm{d}y$$
$$= \left[36\pi y + \pi y^3 - \frac{\pi}{12}y^4\right]\Bigg|_0^y = 36 \times 9\pi = 324\pi.$$

所以，总功 $$W = W_1 + W_2 = 900\pi.$$

例 28 用铁锤将一铁钉钉入木块，设木块对铁钉的阻力与铁钉钉入木块的深度成正比. 锤击第一次时，铁钉钉入 1cm. 若铁锤每次锤击时所做的功相等，问第二次锤击钉子时钉入多深.

解 设锤击第二次时，锤入深度为 h. 因为

$$F = kx, \quad \mathrm{d}W = F\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x.$$

第一次锤击所做的功

$$W_1 = \int_0^1 kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}k;$$

第二次锤击所做的功

$$W_2 = \int_1^{1+h} kx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h).$$

由题设 $W_1 = W_2 \Longrightarrow \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}k(h^2 + 2h) \Longrightarrow h^2 + 2h - 1 = 0$，解得 $h = \sqrt{2} - 1$ (cm)(负值舍去).

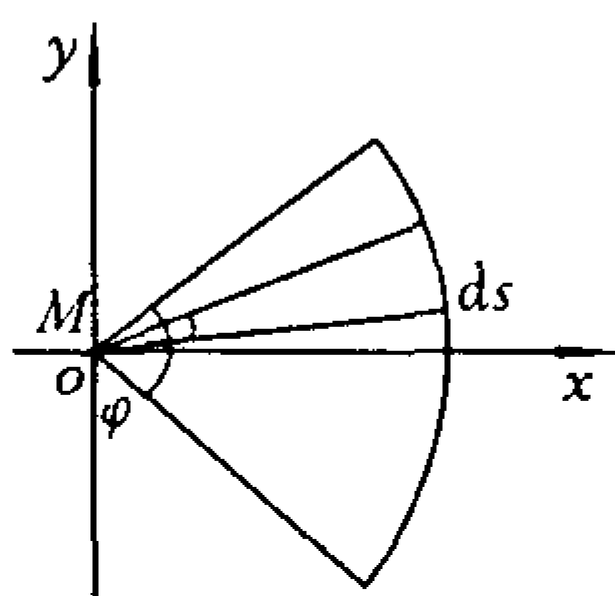


图 6.28

例 29 设有一半径为 R，中心角为 φ 的圆弧形细棒，其线密度为常数 ρ，在圆心处有一质量为 m 的质点 M，求这细棒对质点 M 的引力.

解 如图 6.28，建立坐标系. 圆弧中一小段 $\mathrm{d}s$ 对质点 M 的引力微元

$$\mathrm{d}F = \frac{m\rho\mathrm{d}x}{R^2} = \frac{km\rho}{R^2}(R\mathrm{d}\theta) = \frac{km\rho}{R}\mathrm{d}\theta.$$

故
$$F_x = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \mathrm{d}F\cos\theta = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{km\rho}{R}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2km\rho}{R}\sin\theta\Big|_0^{\varphi/2} = \frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$F_y = \int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \mathrm{d}F\sin\theta = 2\int_{-\varphi/2}^{\varphi/2} \frac{km\rho}{R}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0.$$

所以，引力的大小为 $\frac{2km\rho}{R}\sin\frac{\varphi}{2}$，方向自点 M 指向圆弧中点.

例 30 有一质量为 M、长为 l 的均匀细棒 AB 和一质量为 M_0 的质点. 质点位于坐标原点，AB 垂直于 x 轴，$\angle CoA = \alpha$，$\angle CoB = \beta$，$oC = a$. 求此棒对质点的引力.

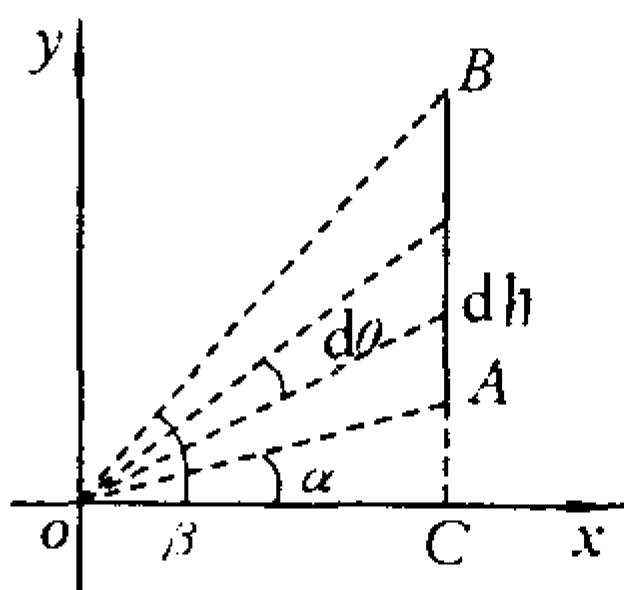


图 6.29

解 如图 6.29 建立坐标系. 细棒上微元 $\mathrm{d}h$ 对质点的引力

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{1}{r^2}M_0 \cdot \frac{M}{l}\mathrm{d}h \cdot \boldsymbol{r}_0,$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = \{\cos\theta, \sin\theta\}$. 而

$$r = \frac{a}{\cos\theta}, \quad h = a\tan\theta, \quad \mathrm{d}h = a\sec^2\theta.$$

于是 $\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \frac{M_0 M}{al}\mathrm{d}\theta \boldsymbol{r}_0$,从而

$$F_x = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}F_x = \frac{M_0 M}{al}\int_\alpha^\beta \cos\theta \mathrm{d}\theta = \frac{M_0 M}{al}(\sin\beta - \sin\alpha),$$

$$F_y = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}F_y = \frac{M_0 M}{al}\int_\alpha^\beta \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{M_0 M}{al}(-\cos\beta + \cos\alpha).$$

故
$$F = \sqrt{F_x + F_y} = \frac{M_0 M}{al}\sqrt{2 - 2\cos(\beta - \alpha)}$$
$$= \frac{2M_0 M}{al}\sin\frac{\beta - \alpha}{2},$$

方向
$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\left(\tan\frac{\beta + \alpha}{2}\right) = \frac{\beta + \alpha}{2}.$$

例 31 一个半径为 R 的圆环形导线均匀带电,电荷密度为 δ,在过圆心且垂直于圆环所在平面的直线上与圆心相距为 a 处有一带电量为 q 的点电荷.求导线与电荷之间的作用力.

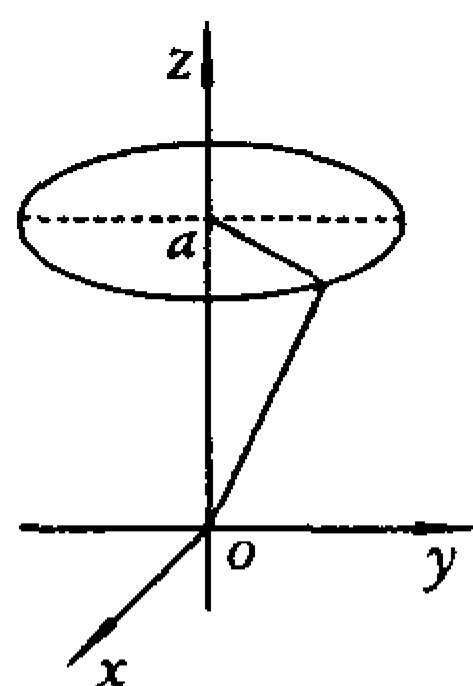


图 6.30

解 如图 6.30 建立坐标系.点电荷位于原点,圆环方程为

$$x^2 + y^2 = R^2, \ z = a.$$

在圆环上点 (x,y,z) 处取微元 $\mathrm{d}s$,将其视作带电量为 $\delta\mathrm{d}s$ 的点电荷,由库仑定律,引力微元

$$\mathrm{d}F = \frac{kq\delta\mathrm{d}s}{(x^2 + y^2 + a^2)}r^0$$
$$= \frac{kq\delta(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k})}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\sqrt{1 + (x/y)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{kqR\delta(\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + a\boldsymbol{k})}{|y|(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x.$$

故
$$\mathrm{d}F_x = \frac{kqR\delta x}{|y|(R^2 + a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{kqR\delta x}{(R^2 + a^2)^{3/2}\sqrt{R^2 - x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}F_y = \frac{kqR\delta y}{|y|(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{kqR\delta}{(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, & y \geqslant 0, \\ -\dfrac{kqRs}{(R^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, & y < 0, \end{cases}$$

$$\mathrm{d}F_z = \frac{kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

所以 $\quad F_x = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_x = 0,\ F_y = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_y = 0,$

$$F_z = 2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}F_z = \frac{2kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}.$$

于是,所求引力为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = \frac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}\boldsymbol{k},$$

引力大小为$\dfrac{2\pi kqR\delta a}{(R^2+a^2)^{3/2}}$,方向竖直向上.

例 32 证明古尔金第一定理:弧 $C(\overset{\frown}{AB})$ 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积等于这个弧的长度与这弧的质心所画出的圆周之长的乘积.

证 设弧 $C(\overset{\frown}{AB})$ 的方程是 $y = y(x)$ $(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)$,则 C 绕 x 轴所得旋转面面积为 $S_x = 2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s$.

又曲线 C 的弧长为 $s = \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s$,而弧的质心的纵坐标为 $\eta = \int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s \Big/ \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s$,所以

$$2\pi\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s = \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s \cdot 2\pi\left[\int_{(A)}^{(B)} y\mathrm{d}s \Big/ \int_{(A)}^{(B)}\mathrm{d}s\right] = s \cdot 2\pi\eta.$$

例 33 证明古尔金第二定理:面积 S 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转体体积等于面积 S 与这面积的质心所画出的圆周长的乘积.

证 设面积的边界曲线由 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 组成(其中 $y = y_1(x) < y = y_2(x)$),则面积 S 绕 x 轴旋转所得旋转体体积

为 $V_x = \pi\int_{x_1}^{x_2}(y_2^2 - y_1^2)\mathrm{d}x$.

而面积质心的纵坐标 $\eta = \int_{x_1}^{x_2}(y_2^2 - y_1^2)\mathrm{d}x/(2S)$. 所以

$$V_x = 2\pi \cdot \left[\int_{x_1}^{x_2}(y_2^2 - y_1^2)\mathrm{d}x \Big/ (2S)\right]S = S \cdot 2\pi\eta.$$

例 34 旋转体容器是什么形状时,才能使液体流出时,液体表面的下降是均匀的?

解 如图 6.31 建立坐标系. 设孔的半径为单位厘米. 小孔中流出液体流量为

$$\mathrm{d}Q = \pi v\mathrm{d}t = \pi c\sqrt{2gy}\mathrm{d}t.$$

而容器内减少的液体量为 $A(y)\mathrm{d}y$.

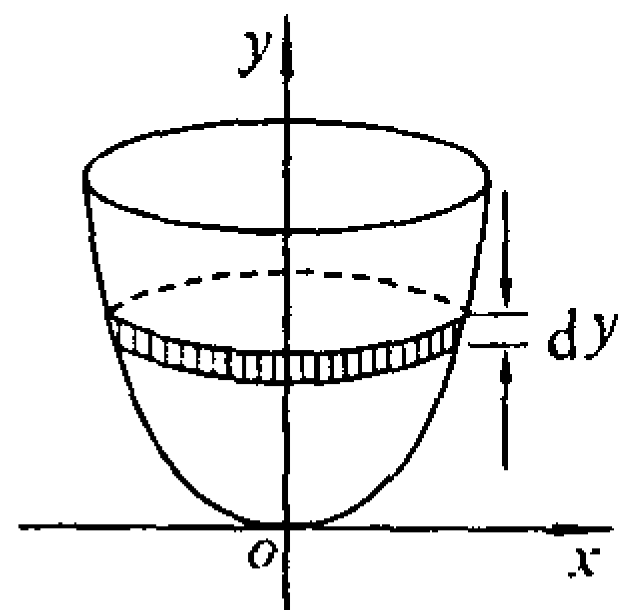


图 6.31

故由
$$\pi c\sqrt{2gy}\mathrm{d}t = A(y)\mathrm{d}y$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{A(y)}{\pi c\sqrt{2gy}}.$$

由题设 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$ 是常数,令 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = k$,则有

$$\frac{A(y)}{\pi c\sqrt{2gy}} = k \Rightarrow A(y) = k_1\sqrt{y}\ (k_1\text{ 为常数}).$$

因为旋转体是由 $y = f(x)$ 绕 y 轴旋转所得,故 $A(y) = \pi x^2$,所以

$$y = cx^4(c\text{ 为常数}).$$

即旋转曲面是由曲线 $y = cx^4$ 旋转而成的.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析　　内容、方法与技巧　　（上册）
作者＝孙清华　　孙昊
页数＝４８９
ＳＳ号＝１１２１９８４４
出版日期＝２００３年０７月第１版

前言
目录

内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书.本书的编写顺序与一般的数学教科书同步,本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法.本书在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

内容简介

本书是学习数学分析课程的一本极好的指导书.本书的编写顺序与一般的数学教科书同步,本册内容包括级数、函数项级数与幂级数、傅里叶级数、多元函数微分学、隐函数定理及应用、向量函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分.读者可以通过学习它循序渐进地理解和掌握数学分析的概念和方法.本书在归纳内容、释疑解难的基础上,用大量、全面的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者可以更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法.因此,读者有必要认真学习本书,通过它化教科书上的抽象概念为自己的切实有用的知识.

希望本书能成为你的良师益友,欢迎你选用本系列丛书.

前 言

数学分析是高等学校 数学专业的主要基础课程. 数学初学者来说,数学分析课程的概念难懂,方法抽象,解题难以入手,思维难以展开. 为了帮助大家学好数学分析,解决学习中的困难,指导学习的方法,提高学习的效率,我们编写了本书.

为了使读者能循序渐进,扎扎实实地从理论上、思维上、方法上掌握数学分析的概念与内容、方法及技巧,我们采用与教材同步、以章节为序的方法,对问题逐个地进行讨论、分析、举例、归纳,在提升知识、解析疑难的基础上,用大量的例题为读者诠释概念、演绎技巧、举证方法,使读者通过例题边分析、边练习、边讨论、边总结,从而更好地融会知识、理解概念、熟悉技巧和掌握方法,将书本上的抽象理论真正化为自己的切实有用的知识,更为后续课程打下良好的数学基础.

本书不像某些重点讲授方法的参考书那样,以问题归类来讨论方法. 因此希望读者学习以后,自己做一些归纳提高、整理加工的工作,以增强自己的实践能力.

数学分析的题目及其解法浩如烟海,编者只能选编其中一小部分比较普遍的和比较典型的献给读者. 有些例题是为了举证方法而选用的,因此不一定是该例的最佳方法. 本书以较多的篇幅来讨论命题的论证,这是数学分析的理论基础,但也用了相当篇幅来叙述计算方法,希望能以此提高读者的计算和证明能力.

本书的编写出版得到了华中科技大学出版社的热心支持和帮助,在此向他们表示衷心的感谢. 在本书写作中,曾参阅了一些作

者关于数学分析问题的著作,我们借此机会向他们表示诚挚的谢意.

由于经验不足和学识所限,本书的失误之处在所难免,望同行和读者热心指正.

孙清华　孙　昊

2003年11月

目　　录

第七章　级　　数

无穷级数是数学分析理论的重要组成部分，在应用数学与工程技术中有广泛的应用.无穷级数又分为数项级数和函数项级数，本书着重研究数项级数中的正项级数、一般项级数以及函数项级数中的幂级数.

第一节　级数的敛散性与正项级数

主 要 内 容

一、级数的敛散性

1. 给定一个数列$\{u_n\}$，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为数项级数或无穷级数. u_n 称为级数的一般项.

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

称为上述数项级数的第 n 个部分和，简称部分和.

2. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列$\{S_n\}$有极限 S，即$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. S 称为无穷级数的和，记作

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若$\{S_n\}$没有极限，则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

3. 柯西(Cauchy)审敛原理　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，对任意的自然数 p 均有

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

推论　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

4. 收敛级数的基本性质

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于 S，k 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}ku_n$ 也收敛，其和为 kS.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S 和 T，c，d 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$ 也收敛，其和为 $cS+dT$.

(3) 去掉、增加或改变级数的有限个项，不改变级数的敛散性.

(4) 对收敛级数的项任意加括号，不改变级数的敛散性，也不改变级数的和.

若加括号后的级数发散，则原级数也发散.

5. 常用结论

(1) 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+\cdots+aq^n+\cdots\ (a\neq 0)$，当$|q|<1$ 时收敛，当$|q|\geqslant 1$ 时发散.

(2) 调和级数 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\cdots$是发散的.

二、正项级数

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的一般项 $u_n\geqslant 0$，则称$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数. 负项级

数可以化为正项级数来研究.

1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是:部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

2. 正项级数的比较原则　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,如果存在某个 $N > 0$,对一切 $n > N$ 都有 $u_n \leqslant v_n$,则

(1) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

3. 比较原则的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数,若 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,则

(1) 当 $0 < l < +\infty$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 有相同的敛散性;

(2) 当 $l = 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛;

(3) 当 $l = +\infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

4. 达朗贝尔(D'Alembert) 比式判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且存在某自然数 N_0 及常数 q $(0 < q < 1)$,则

(1) 若对一切 $n > N_0$,有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

(2) 若对一切 $n > N_0$,有 $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

5. 比式判别法的极限形式　若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,且 $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$,则:

(1) 当 $q < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $q > 1$ 或 $q = +\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

6. 柯西根式判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在某正数 N_0 及常数 $l > 0$，则

(1) 若对一切 $n > N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n} \leqslant l < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若对一切 $n > N_0$，有 $\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

7. 根式判别法的极限形式　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$，则：

(1) 当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

8. 对极限不存在，而上、下极限存在情形，有以下结论.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则

(1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{q} < 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \bar{q} > 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

9. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = l$，则当 $l < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；当 $l > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

10. 积分判别法　设 $f(x)$ 为$[1, +\infty)$上的非负单调减少函

数，则正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与非正常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散.

11. 拉贝(Raabe)判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)=r$，则

(1) 当 $r>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 当 $r<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

疑 难 解 析

1. 怎样理解无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛?

答　无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 是无穷多项的和，可能是有限数，也可能是无限数，或者是不确定的数. 如

有限数　$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$，

无限数　$1+2+3+\cdots+n+\cdots=+\infty$，

不确定数　$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$.

当和是有限数 S 时，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S. 否则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

特别要注意的是，级数的和是无限项的和(简称无限和)与有限项的和(简称有限和)有本质区别. 有限和是一定存在的，但无限和不一定存在. 然而，两者又有十分密切的联系，即无限和可以通过有限和的极限表示. 一般地，级数求和要先求部分和 S_n(有限

和)，再求部分和的极限$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$，确定级数的和 S(无限和)是否存在.

2. 判别正项级数敛散性的条件是否都是充分必要的条件?

答 一切判别正项级数敛散性的条件都是充分条件，但不一定是必要条件.

如对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$一定收敛，反之则不一定收敛. 例如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

是一个收敛的正项级数，但$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$有两种情形:

$$\frac{1}{3^n}\Big/\frac{1}{2^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

$$\frac{1}{2^{n+1}}\Big/\frac{1}{3^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to\infty}\infty.$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$不存在.

方法、技巧与典型例题分析

一、级数的敛散性问题

数项级数敛散性问题是级数研究中的一个基本问题. 由级数的敛散性定义知，判别级数的敛散性实质上是判别级数部分和数列的敛散性，求级数的和就是求级数部分和数列的极限. 因此，研究级数的基本思想方法就是将级数的问题转化为其部分和数列的相应问题. 同时，在实际问题中，我们还需利用已知敛散性的级数和级数的性质来帮助确定级数的敛散性及推断级数的一些性质.

例 1 一弹性小球从高 h_0 处落下，落地后弹起的高度为前次下落高度的一半. 如此往复起落，问小球的起落是否会停止.

解 从理论上讲，小球的起落次数是无穷的. 是否停止跳动，要看完成这无数次起落的时间是否是有限的. 于是，问题可以归结为一个无穷级数的敛散性问题.

依自由落体基本规律有，$h=\frac{1}{2}gt^2$，所以小球从高 h_0 处落地所需时间为 $t=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$，小球弹起 $\frac{h_0}{2}$ 再落地所需时间为 $t_1=2\sqrt{\frac{h_0}{g}}$，小球第 i 次弹起再落地所需时间为 $t_i=2\sqrt{\frac{h_0}{2^{i-1}g}}$，于是，小球从开始下落至第 n 次落地所用时间为

$$\begin{aligned}T_n &= t+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}\\ &=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{2g}}+\cdots+2\sqrt{\frac{h_0}{2^{n-1}g}}\\ &=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2\sqrt{\frac{h_0}{g}}\frac{1-(1/\sqrt{2})^n}{1-1/\sqrt{2}}\to(4+3\sqrt{2})\sqrt{\frac{h_0}{g}}.\end{aligned}$$

故 $T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n=(4+3\sqrt{2})\sqrt{h_0/g}$. 由此可知，完成这无数次起落所用的时间是有限的，因此，小球的弹跳过程一定会停止.

例 2 判断下列命题的真伪，给出证明或举出反例.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+|u_n|}$ 发散.

解 (1) 真. 用反证法证明. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

收敛知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n + v_n) - u_n]$ 也收敛. 这与题设矛盾.

(2) 伪. 例如，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ 发散，但是，$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n + (-1)^{n+1}]$ 收敛.

(3) 伪. 比式判别法的极限形式只对正项级数适用. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，令 $v_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{(-1)^n/\sqrt{n}}{(-1)^n/\sqrt{n} + 1/n} = 1 \neq 0.$$

但是，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，依题(1) 知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

(4) 真. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. 于是 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + |u_n|} = 1$. 由级数收敛的必要条件知，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + |u_n|}$ 发散.

例 3 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a + n - 1)(a + n)} = \frac{1}{a}\ (a > 0)$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2a + 2n - 1}{(a + n - 1)(a + n)} = \frac{1}{a}\ (a > 0)$.

证 利用 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 证明.

(1)
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) + \cdots \\ &\quad + \left(\frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{a+n}\right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a+n}, \end{aligned}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a}$. 所以命题成立.

$$(2)\ S_n=\frac{2a+1}{a(a+1)}-\frac{2a+3}{(a+1)(a+3)}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)}$$
$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{a+n-1}+\frac{1}{a+n}\right)$$
$$=\frac{1}{a}+(-1)^{n+1}\frac{1}{a+n},$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a}$. 所以命题成立.

例 4 证明：

(1) 若 $b_n\to\infty\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散；

(2) 若 $u_n\to 0\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{2k-1}-u_{2k})$ 收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3) 若 $a_n\to a\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$；

(4) 若 $b_n\to\infty\ (n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{b_1}$.

证 利用数列的敛散性研究级数的敛散性.

(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1\to\infty\ (n\to\infty)$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1}-b_n)$ 发散.

(2) 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，$T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(u_{2k-1}+u_{2k})$，则

当 $n=2k$ 时，$S_n=T_k$， $k=1,2,\cdots$，

当 $n=2k-1$ 时，$S_n=T_{k-1}+u_n$， $k=1,2,\cdots$.

故当 $n\to\infty$时，$k\to\infty$，$u_n\to 0$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{k\to\infty}T_k = \lim_{k\to\infty}T_{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(u_{2k-1} + u_{2k}),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(3) $S_n = (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})$

$= a_1 - a_{n+1} \to a_1 - a \ (n\to\infty, a_{n+1}\to a)$.

(4) $S_n = \left(\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_2}\right)+\left(\frac{1}{b_2}-\frac{1}{b_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} \to \frac{1}{b_1} \ \left(n\to\infty, \frac{1}{b_{n+1}}\to 0\right)$.

例 5 证明:若 $\lim_{n\to\infty}na_n = a$,$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n - a_{n+1})$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 令 $S_n = \sum_{k=1}^{n}k(a_k - a_{k-1})$

$$= (a_1 - a_0) + (2a_2 - 2a_1) + \cdots + (na_n - na_{n-1})$$

$$= -a_0 - a_1 - \cdots - a_{n-1} + na_n,$$

于是 $\sum_{k=0}^{n-1}a_k = na_n - S_n$. 设 $\lim_{n\to\infty}S_n = S$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}a_k = a - S \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k \to a - S.$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 6 设级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 都收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

证 设 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$, $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和分别为 $S_n(1)$, $S_n(2)$ 和 S_n,因为 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}$ 收敛,有 $\lim_{n\to\infty}S_n(1) = S'$, $\lim_{n\to\infty}S_n(2) = S''$. 显然

$$S_{2m} = S_m(1) + S_m(2), \quad S_{2m-1} = S_m(1) + S_{m-1}(2).$$

于是 $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m}=S'+S''$, $\lim\limits_{m\to\infty}S_{2m-1}=S'+S''$.

依收敛级数的性质,$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S'+S''$,即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 7 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且

$$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n,\ n=1,2,\cdots,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.

证 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,由柯西审敛原理,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N_1$ 时,有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$;$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$,使得当 $n>N_2$ 时,有 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}b_k\right|<\varepsilon$.

于是,取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,上面两不等式都成立.从而

$$-\varepsilon<\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}c_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}b_k<\varepsilon,$$

即 $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}c_k\right|<\varepsilon$.故依柯西审敛原理,$\sum\limits_{n-1}^{\infty}c_n$ 收敛.

例 8 证明:若级数 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}a_n(a_n\geqslant 0)$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛.

证 若级数 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}a_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.因此,当 $n>N_0$ 时,必有 $a_n<1$,从而 $a_n^2<a_n<1$,则

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k^2<\sum_{k=1}^{n}a_k=B_n\to B.$$

所以,$\{A_n\}$ 是单调增加有上界的数列,由此可知,数列 $\{A_n\}$ 收敛,即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛.

逆命题不成立. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛,但是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$却发散.

如果$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N>0$, 对一切$p>N$和$q>N$, 恒有$|S_p-S_q|<\varepsilon$,则称数列$\{S_n\}$为柯西数列. 由柯西审敛原理(见第一章),柯西数列是收敛数列;反之,若数列收敛,则必为柯西数列. 级数收敛的充分必要条件是:级数的部分和数列$\{S_n\}$是柯西数列.

例 9 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,且$a_n>0$,证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1-a_n}$收敛,$a_n\neq 1$.

证 利用柯西数列证明.

(1) 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$也收敛,记其部分和数列为$\{T_n\}$,则$\{T_n\}$为柯西数列, 而

$$\sqrt{a_na_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1}),$$

故$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N>0$,对一切$p>q>N$,有

$$\begin{aligned}|S_p-S_q|&=\sum_{k=q+1}^{p}\sqrt{a_ka_{k+1}}\leqslant\sum_{k=q+1}^{p}\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\\&=|T_p-T_q|<\varepsilon.\end{aligned}$$

即$\{S_n\}$也是柯西数列,故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}$收敛.

(2) 因级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,故存在$N>0$,对一切$n>N$,有$a_n<1/2$, 于是

$$0<\frac{a_n}{1-a_n}<2a_n.$$

从而由原级数收敛知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1-a_n}$也收敛.

例 10 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，数列 $\{\lambda_n\}$ 具有性质：存在常数 k，对一切 n，恒有 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ 也收敛.

证 记 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，$T_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$，当 $m > n$ 时，有

$$\begin{aligned} T_m - T_n &= \lambda_m a_m + \cdots + \lambda_{n+1} a_{n+1} \\ &= \lambda_m (S_m - S_{m-1}) + \cdots + \lambda_{n+1}(S_{n+1} - S_n) \\ &= \lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n + S_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) + \cdots \\ &\quad + S_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+2}), \end{aligned}$$

$$|T_m - T_n| \leqslant |\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| + \sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| \, |S_i|.$$

现在来证明 $\{T_m\}$ 是柯西数列.

先证 $\{S_n\}$ 和 $\{\lambda_n\}$ 有界. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\{S_n\}$ 有界，即对一切 n，$\exists\, M > 0$，使得 $|S_n| < M$. 又由 $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k$ 知，级数 $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - \lambda_{i+1}|$ 收敛（因为级数单调增加且有上界），故数列 $\{|\lambda_i - \lambda_{i+1}|\}$ 是柯西数列. 因此，$\forall\, \varepsilon > 0$，$\exists\, N_1 > 0$，使得对一切 $m > n > N_1$，总有

$$\sum_{i=n+1}^{m} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

从而
$$\sum_{i=n+1}^{m-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| \, |S_i| < \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \frac{\varepsilon}{3}. \qquad ①$$

又
$$\begin{aligned} |\lambda_i - \lambda_1| &= |(\lambda_n - \lambda_{n-1}) + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1)| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i - \lambda_{i+1}| < k, \end{aligned}$$

即对一切 n，有 $|\lambda_n| < k + |\lambda_1| = L$.

由 $\sum_{i=n+1}^{m}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|\leqslant\frac{\varepsilon}{3M}$ 还可得到

$$|\lambda_m-\lambda_{n+1}|=|(\lambda_m-\lambda_{m-1})+\cdots+(\lambda_{n+2}-\lambda_{n+1})|$$
$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由于$\{S_n\}$是柯西数列，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2>0$，使得对一切$m>n>N_2$，总有 $|S_m-S_n|<\frac{\varepsilon}{3L}$. 于是，对一切 $m>n>N=\max\{N_1,N_2\}$，总有

$$|\lambda_mS_m-\lambda_{n+1}S_n|=|\lambda_m(S_m-S_n)+(\lambda_m-\lambda_{n+1})S_n|$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}. \qquad ②$$

将式①、式②代入$|T_m-T_n|$式，得$|T_m-T_n|<\varepsilon$.

故$\{T_n\}$是柯西数列，于是知$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$收敛.

由本例命题立即可以得到阿贝尔(Abel)判别法：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，数列$\{\lambda_n\}$单调有界，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$收敛.

例 11 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列$\{S_n\}$有界，即$\exists\ M>0$，使得对一切$|S_n|<M$. 在数列$\{\lambda_n\}$满足$|S_m-S_n|<\varepsilon/(3L)$ ($\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当$m>n>N$时，而$|\lambda_n|<L$) 且$\lambda_n\to 0$时，证明$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_na_n$收敛.

证 同例10可证得

$$|T_m-T_n|\leqslant|\lambda_mS_m-\lambda_{n+1}S_n|+\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}||S_i|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

及

$$\sum_{i=n+1}^{m-1}|\lambda_i-\lambda_{i+1}||S_i|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad ③$$

又由题设$\lambda_m\to 0$知，$\exists\ N>0$，当$m>n>N$时，$|\lambda_m|$和$|\lambda_n|$均小于$\varepsilon/(3M)$，从而

$$|\lambda_m S_m - \lambda_{n+1} S_n| \leqslant |\lambda_m| |S_m| + |\lambda_{n+1}| |S_n| < 2\varepsilon/3. \tag{4}$$

将式③、式④代入$|T_m - T_n|$式，得$|T_m - T_n| < \varepsilon$.

故$\{T_n\}$是柯西数列，于是知$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$收敛.

由本例命题立即可得狄利克雷(Dirichlet)判别法：

若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$的部分和数列有界，数列$\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$收敛.

例 12 试用狄利克雷判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$;

(2) $\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin n\theta$，$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos n\theta$ $(\theta \neq 2k\pi)$.

解 (1) 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$的部分和$\{S_n\}$有界，取$\lambda_n = 1/n$，则$\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$. 由狄利克雷判别法知级数收敛.

(2) $\{\lambda_n\}$单调且$\lambda_n \to 0$，又有

$$S_n = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \left[\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta\right] \Big/ \sin \frac{\theta}{2},$$

$$\begin{aligned} T_n &= \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \\ &= \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right] \Big/ \left(2\sin \frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

均有界. 依狄利克雷判别法，两级数均收敛.

例 13 设$a_n > 0$，证明：级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

收敛.

证 用收敛的定义证明. 因为

$$\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_{n-1})}-\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)},$$

所以 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

$$=\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

又 $a_n>0$，故 $\{S_n\}$ 单调减少且有下界，故收敛. 从而级数收敛.

例 14 求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}[x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})], 0<x<1$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{2}{4n^2-4n+1}$.

解 本例的解法称为连锁消去法. 即，将通项分解，利用前后项连锁相消的方法求出部分和 S_n，再取 $n\to\infty$ 时 S_n 的极限，求级数的和.

$$(1)\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ 的和是 $\frac{1}{2}$.

$$(2)\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{4},$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和是 $\frac{1}{4}$.

(3) $S_n = \sum_{k=0}^{n}[x^{2^k}/(1-x^{2^{k+1}})]$

$$= \sum_{k=0}^{n}[1/(1-x^{2^k}) - 1/(1-x^{2^{k+1}})]$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1/(1-x^{2^{n+1}}) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{1-x},$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[x^{2^n}/(1-x^{2^{n+1}})]$ $(0<x<1)$ 的和是 $\frac{x}{1-x}$.

(4) 由公式 $\arctan\frac{x-y}{1+xy} = \arctan x - \arctan y$ 知

$$\arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k+1},$$

$$\arctan\frac{2}{4k^2-4k+1} = \arctan\frac{1}{2(k-1/2)^2}$$

$$= \arctan\frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan\frac{1}{2(k-1/2)+1},$$

得
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\arctan\frac{1}{2k-1} - \arctan\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$= \arctan 1 - \arctan\frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4}.$$

$$T_n = \sum_{k=2}^{n}\left[\arctan\frac{1}{2(k-1/2)-1} - \arctan\frac{1}{2(k-1/2)+1}\right]$$

$$=\arctan\frac{1}{2\cdot 3/2-1} - \arctan\frac{1}{2(n-1/2)+1} \xrightarrow{n\to\infty} \arctan\frac{1}{2}.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$ 的和是 $\frac{\pi}{4}$，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\arctan\frac{1}{4n^2-4n+1}$ 的和是 $\arctan\frac{1}{2}$.

例 15 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})$ 的和.

解 仍用连锁消去法.

$$S_n = (1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{4})$$
$$+ (\sqrt{3} - 2\sqrt{4} + \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}$$

$$+\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$$
$$=1-\sqrt{2}-\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$$
$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\xrightarrow{n\to\infty}1-\sqrt{2},$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})$的和是$1-\sqrt{2}$.

例 16 计算下列级数的和：

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$;

(2) $\frac{8}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{14}{3^3}+\cdots+\frac{3n+5}{3^n}+\cdots$.

解 可用组合法计算，即利用S_n与aS_n的组合(适当选取$a\neq 0$)，求出S_n，再求出S.

(1) $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$2S_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

于是 $S_n=2S_n-S_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{2n-1}{2^n}\xrightarrow{n\to\infty}3,$$

所以原级数的和是3.

(2) $S_n=\frac{8}{3}+\frac{11}{3^2}+\frac{14}{3^3}+\cdots+\frac{3(n-1)+5}{3^{n-1}}+\frac{3n+5}{3^n}$,

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{8}{3^2}+\frac{11}{3^3}+\frac{14}{3^4}+\cdots+\frac{3(n-1)+5}{3^n}+\frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$\frac{2}{3}S_n=\frac{8}{3}+3\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{8}{3}+3\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{3}\right)-\frac{3n+5}{3^{n+1}},$$

$$S_n=4+\frac{27}{4}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{(3n+5)}{3^{n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}4+\frac{3}{4}=\frac{19}{4},$$

所以原级数的和是$\frac{19}{4}$.

类似地,利用$S_n = 2S_n - S_n$,可求出$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$的和是2;利用$(1-e^{-x})S_n$,可求出$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$的和是$e^{-x}/(1-e^{-x})^2$.

例 17 计算:

$$q\cos\alpha + q^2\cos 2\alpha + \cdots + q^n\cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

解 建立关于S_n的方程式,解出S_n,再求S_n的极限.因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k \cos k\alpha,$$

$$2q\cos\alpha S_n = \sum_{k=1}^{n} 2q^{k+1}\cos\alpha\cos k\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^{n} q^{k+1}[\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha],$$

即

$$2q\cos\alpha S_n = [q^{n+1}\cos(n+1)\alpha + S_n - q\cos\alpha] + [q^2 + q^2 S_n - q^{n+2}\cos n\alpha],$$

得

$$S_n = \frac{q^{n+2}\cos n\alpha - q^{n+1}\cos(n+1)\alpha + q\cos\alpha - q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{q\cos\alpha - q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}.$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$的和是$\frac{q\cos\alpha - q^2}{1+q^2-2q\cos\alpha}$.

类似可得,级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$的和是$\frac{q\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha}$.

本例可由复变函数中的欧拉(Euler)公式$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$得

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\alpha})^n \quad (\text{等比级数})$$

$$= \frac{q\cos\alpha - q^2 + iq\sin\alpha}{1+q^2-2q\cos\alpha}.$$

比较等式两边的实部与虚部即得两级数的和.

例 18 证明：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$，$m\in\mathbf{Z}$.

证 由上册第一章知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C\ (C\text{ 称为欧拉数}),$$

故有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\alpha_n\quad(\alpha_n\to 0)$.

当 $n=2m$ 时，有

$$\begin{aligned}S_{2m}&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2m}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)\\&=\ln 2m+C+\alpha_{2n}-\ln m-C-\alpha_n\\&=\ln 2+(\alpha_{2n}-\alpha_n)\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2,\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时，有

$$S_{2m+1}=S_{2m}+\frac{1}{2m+1}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$.

(2)
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+m}\right)\\&=\frac{1}{m}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right.\\&\qquad\left.-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)\right],\end{aligned}$$

当 $n>m$ 时，有

$$S_n=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{m+n}\right)$$

$$=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+m}\right)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right).$$

例 19 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的和.

解 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_{2n-1}-a_{2n}+\cdots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+\cdots,$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-(a_2+a_4+\cdots+a_{2n}+\cdots)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+5=8.$$

例 20 由级数的性质确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\Big/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}\neq 0$，不满足收敛的必要条件，所以级数发散.

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}\Big/\frac{\pi}{2^n}\cdot\pi=\pi\neq 0$，不满足收敛的必要条件，所以级数发散.

(3) 依拉格朗日(Lagrange)中值定理，有

$$\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{n+\theta}<\frac{1}{n}\ (0<\theta<1).$$

对 n 作不等式和，得

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}>\ln(N+1)\xrightarrow{N\to\infty}\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(4) 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n$, 所以

$$S_n=\ln(1+n)\xrightarrow{n\to\infty}+\infty.$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 发散.

例 21 用柯西审敛原理证明下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$； (2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$； (4) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$.

证 利用柯西审敛原理解题，有时要注意 p 的取法和 N 的取法，取法正确可使证明过程简单.

(1) 因为 $\forall\ n,p\in\mathbf{N}$，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p+1)(n+p)}\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},\end{aligned}$$

故只需取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，即有

$$0<\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

(2) 由级数正负项的规律性,取 $p=3n$,则

$$|S_{n+p}-S_n| = \left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+5}-\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}\right|$$

$$>\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{4n-2}\right|$$

$$>\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\cdots+\frac{1}{4n}=n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}.$$

所以,原级数当 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,$\exists\ p=3n$,使得 $|S_{n+p}-S_n|>\varepsilon_0$,故级数发散.

(3) $\forall\ n\in\mathbf{N}$,取 $p=n$,使得 $\forall\ \varepsilon_0<\frac{1}{2}$,则

$$|S_{n+p}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon_0.$$

所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

(4) $\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}-S_n|$$

$$=\left|\frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}$$

$$=\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2^n},$$

故 $\forall\ \varepsilon>0$,只需取 $N=[\log_2(1/\varepsilon)]+1$,则当 $n>N$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,都有上式成立,即知级数收敛.

(5) $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N$,当 $n>N$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$
\begin{aligned}
|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right.\\
&\quad -\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}\\
&\quad \left.-\cdots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}\right|\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+p}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}\\
&\quad +\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{2}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0.
\end{aligned}
$$

所以,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

二、正项级数的敛散性问题

正项级数的显著特点是其部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加.因此,如果能确定 $\{S_n\}$ 有上界,级数的敛散性就确定了.判别正项级数敛散性的方法很多,读者只有牢记各个方法的条件与结论,才能运用自如.遇到敛散性不能确定的情形,应另觅良法.

例 22 证明:若 $u_n\geqslant 0, u_n\geqslant u_{n+1}$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^k u_{2^k}$ 收敛.

证 记 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i, T_k=\sum\limits_{j=1}^{n}2^j u_{2^j}$,则 $\forall\, n$,总有 $k\in\mathbf{N}$,使得 $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$,所以

$$
\begin{aligned}
S_n &= u_1+u_2+\cdots+u_n\leqslant u_1+u_2+\cdots+u_{2^k}\\
&\leqslant u_1+(u_2+u_3)+(u_4+\cdots+u_7)+\cdots\\
&\quad +(u_{2^{k-1}}+\cdots+u_{2^k-1})+(u_{2^k}+\cdots+u_{2^{k+1}-1})\\
&\leqslant u_1+2u_2+4u_4+\cdots+2^k u_{2^k}=T_k,
\end{aligned}
$$

而 $\forall\, k\in\mathbf{N}$,必有 n,使得 $2^k<n<2^{k+1}$,所以

$$
\begin{aligned}
S_n &\geqslant u_1+u_2+\cdots+u_{2^k}\\
&= u_1+u_2+(u_3+u_4)+(u_5+\cdots+u_8)+\cdots
\end{aligned}
$$

$$+(u_{2^{k-1}}+\cdots+u_{2^k})$$
$$\geqslant u_1+u_2+2u_4+4u_8+\cdots+2^{k-1}u_{2^k}$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(u_1+2u_2+2^2u_4+\cdots+2^ku_{2^k})=\frac{1}{2}T_k.$$

于是，由 $S_n\leqslant T_k\leqslant 2S_n$ 表明两级数的敛散性相同.

例 23 用比较原则确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$（$p$ 级数）；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$；　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln n/(\sqrt{n}\cdot 2^n)$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}/n\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\text{收敛，且 }a_n\geqslant 0\right)$.

解 利用比较原则的关键是选择一个已知敛散性的级数进行比较，常用作比较对象的是等比级数与 p 级数（见本例题(2)）.

(1) $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}<2^n\frac{\pi}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi$ 是收敛级数，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$ 也收敛.

(2) 当 $p>1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant 0$，$\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{(2^n)^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{p-1})^n}=\frac{1}{2^{p-1}}\Bigg/\left(1-\frac{1}{2^{p-1}}\right)=\frac{1}{2^{p-1}-1},$$

所以依例 21，p 级数当 $p>1$ 时收敛.

当 $p\leqslant 1$ 时，$\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 p 级数当 $p\leqslant 1$ 时发散.

也可以用加括号的方法来证：

$$1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{7^p}\right)+\cdots$$

$$\leqslant 1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{4^p}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2+\cdots$$

是公比为 $1/2^{p-1}<1$ 的等比级数，当 $p>1$ 时级数收敛.

还可用积分判别法证明：令 $f(x)=\dfrac{1}{x^p}$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}\overset{p>1}{=\!=}\frac{1}{p-1}.$$

(3) 当 $p>1$ 时，$\dfrac{1}{n(\ln n)^p}>0$，且

$$\frac{1}{n(\ln n)^p}>\frac{1}{(n+1)[(\ln(n+1)]^p},$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\dfrac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln 2)^p n^p}$ 收敛，依例21结论，级数收敛；当 $p\leqslant 1$ 时级数发散.

(4) 当 n 充分大时，有

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln n\cdot\ln(\ln n)}}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}^{2\ln n}}=\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n/\sqrt{n}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x/\sqrt{x}=0$，所以当 n 充分大时，$0<\ln n/\sqrt{n}<1$，即 $0<\dfrac{\ln n}{2^n\sqrt{n}}<\dfrac{1}{2^n}$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 是收敛级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln n/(2^n\sqrt{n})$ 也收敛.

(6) 因为

$$1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(7) 因为 $0<\frac{\sqrt{a_n}}{n}=\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)<a_n+\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}/n$ 收敛.

例 24 判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n{}^2}$，$x_n$ 是方程 $x=\tan x$ 的正根(按递增顺序排列).

解 (1) 直接找可比级数很困难，利用 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$(当 $n\to\infty$ 时，$1/n\to 0$)处的二阶泰勒(Taylor)公式，得

$$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

所以，$\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 是同阶无穷小($n\to\infty$)，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 也收敛.

(2) 因为 $x_n\in\left(\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi,\frac{\pi}{2}+n\pi\right)$，$n=1,2,\cdots$，所以

$$x_n>\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\frac{1}{x_n{}^2}<\frac{1}{(n-1/2)^2\pi^2}<\frac{1}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x_n^2}$ 也收敛.

例 25 用比式判别法或根式判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\ (a>0)$；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+1/n)^n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a^n}{n^n}\ (a>0)$.

解　比式判别法是最易使用的方法,而根式判别法一般在通项中含因式的 n 次方时才使用. 它们的缺点是,当极限为 1 时无法确定敛散性,需要另辟蹊径.

(1) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n+1}=0<1,$$

所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ (x>0)$ 收敛.

(2) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1.$$

所以,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$收敛.

(3) 用比式判别法. 因为 $a=0$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 显然收敛. 当 $a\neq 0$ 时,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}a, & 0<a<1,\\ 1/2, & a=1,\\ 0, & a>1.\end{cases}$$

所以,当 $a\geqslant 0$ 时,原级数均收敛.

(4) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2})=\sqrt{2}-1<1,$$

所以,原级数收敛.

(5) 用根式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2/(2+1/n)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{2+1/n}$$

$$= 1/2 < 1,$$

所以，原级数收敛.

(6) 用比式判别法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\Big/\frac{n!a^n}{n^n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{a}{\mathrm{e}}.$$

所以，当 $a<\mathrm{e}$ 时，级数收敛；当 $a>\mathrm{e}$ 时，级数发散.

当 $a=\mathrm{e}$ 时，依斯特林(Stirling)公式(见上册)：$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，故$\frac{n!\ \mathrm{e}^n}{n^n}\sim\sqrt{2\pi n}\to\infty$，所以级数发散.

例 26 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$. 反之不成立.

证 求证根式判别法的适用范围比比式判别法更广泛.

设 $l>0$，$\forall\ \varepsilon>0\ (\varepsilon<l)$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有

$$0<l-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<l+\varepsilon,$$

则 $l-\varepsilon<\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<l+\varepsilon,\ l-\varepsilon<\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}<l+\varepsilon,\cdots,l-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<l+\varepsilon.$

将以上不等式对应项相乘，得

$$(l-\varepsilon)^{n-N-1}<\frac{a_n}{a_{N+1}}<(l+\varepsilon)^{n-N-1},$$

$$(l-\varepsilon)^n\frac{a_{N+1}}{(l-\varepsilon)^{N+1}}<a_n<(l+\varepsilon)^n\frac{a_{N+1}}{(l+\varepsilon)^{N+1}},$$

$$(l-\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l-\varepsilon)^{N+1}}}<\sqrt[n]{a_n}<(l+\varepsilon)\sqrt[n]{\frac{a_{N+1}}{(l+\varepsilon)^{N+1}}},$$

当 $n\to\infty$时，由 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，可得

$$l-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant l+\varepsilon\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l.$$

当 $l=0$ 或 $l=+\infty$时，类似可证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

反之，可举例说明. 如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}<1,$$

所以级数收敛. 但是，若依比式判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^{n+1}}{2[2+(-1)^n]}=\begin{cases}3/2,\ n\text{ 为奇数},\\ 1/6,\ n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$不存在. 可见，此时比式判别法失效.

例 27 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1\Big/\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}\mathrm{d}x\right]$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$，并求和.

解 (1) 因为 $a_n=\int_0^{1/n}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$，有

$$0\leqslant a_n\leqslant\int_0^{1/n}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}.$$

而级数$\dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$是 p 级数，$p>1$，级数收敛，故原级数收敛.

(2) 因为 $0<a_n<1\Big/\int_0^n x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以原级数收敛.

(3) 因为 $a_n=\int_0^1 x^2(1-x^2)^n\mathrm{d}x=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1/n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}=2.$$

所以原级数收敛.

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{n+3}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{6},$$

故级数的和是 1/6.

例 28 证明导数判别法：设 $f(1/n)=a_n>0, f(0+0)=0$，$f'(x)$在 $x=0$ 的右邻域存在.

若∃ $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 时，有$\frac{xf'(x)}{f(x)}\geqslant G>1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(1/n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；若$\frac{xf'(x)}{f(x)}\leqslant 1$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f(1/n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

其极限形式是：设 $f(1/n)=a_n>0, f(x+0)=0$. 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{xf'(x)}{f(x)}=G$，则当 $G>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $G\leqslant 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}ca_n(c\neq 0)$ 敛散性相同，且改变有限项不影响级数的敛散性，故不妨设 $a_n=1$，即 $f(1)=1$. 于是

(1) 取 r：使得 $G>r>1$，作辅助函数 $F(x)=\ln f(x)-\ln x^r$，则

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{r}{x}\ (0<x<\delta).$$

因为$\frac{xf'(x)}{f(x)}\geqslant G>r$，即$\frac{f'(x)}{f(x)}>\frac{r}{x}$，所以 $F'(x)>0$. 从而 $F(x)$在$(0,1]$上严格单调增加. 又 $F(1)=\ln f(1)-\ln 1^r=0$，即得 $F(x)<0$，所以 $f(x)<x^r\Rightarrow a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n^r}$. 而 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^r}\ (r>1)$ 收敛，从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 若$\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\leqslant 1$，则$\dfrac{f'(x)}{f(x)}\leqslant\dfrac{1}{x}$，作辅助函数 $F(x)=\ln f(x)-\ln x$，有

$$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{1}{x}\leqslant 0.$$

从而 $F(x)$ 在$(0,1]$上严格单调减少，$F(x)>F(1)=0\ (0<x<1)$，即 $f(x)\geqslant x$，得 $a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)\geqslant\dfrac{1}{n}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$发散.

由导数判别法可得正项级数收敛的一个充要条件：

设 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=a_n>0$，$f''(0)$ 存在，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是 $f(0)=f'(0)=0$.

例 29 用导数判别法判别下列级数敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2(\ln n)^p}\ (p\in\mathbf{Z}^+)$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$.

解 (1) 令 $f(x)=\dfrac{x^\alpha}{(-\ln x)^p}$，则

$$f'(x)=\frac{\alpha x^{\alpha-1}(-\ln x)^p+kx^{\alpha-1}(-\ln x)^{p-1}}{(\ln x)^{2p}},$$

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\alpha-\frac{p}{\ln x}\xrightarrow{x\to 0^+}\alpha.$$

由导数判别法的极限形式知，当 $\alpha>1$ 时，原级数收敛；当 $\alpha<1$ 时，原级数发散；当 $\alpha=1$ 时，同例 22 题(3)，当 $p>1$ 时收敛，当 $p=1$ 时发散.

(2) 令 $f(x)=1-\cos x$，则 $f'(x)=\sin x$，$f''(x)=\cos x$. 于是 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)$存在. 由正项级数的导数判别法知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$收敛.

例 30 用根式判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b}{a_n}\right)^{n}$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$a\neq b$，$a,b,a_n>0$.

解　(1) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$，所以，原级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$收敛.

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-1/n}=\frac{1}{9}<1$，所以，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$收敛.

(3) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(b/a_n)^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(b/a_n)=b/a$，所以，当$b<a$时，级数收敛；当$b>a$时，级数发散；当$b=a$时，敛散性不能确定.

例 31　用积分判别法确定下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$；　　(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}}$.

解　能用积分判别法判别的级数很少，这两例用其它方法已求解过，在此再作判别.

(1) 令$f(x)=\frac{1}{x^{p}}$，则$\int_{1}^{n}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x=\frac{n^{1-p}-1}{1-p}\ (p\neq 1)$.

当$p>1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=\frac{1}{p-1}$，原级数收敛；

当$p<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=+\infty$，原级数发散；

当$p=1$时，原级数即调和级数，发散.

(2) 令$f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{p}}$，则$f'(x)=-\frac{(\ln x)^{p}+p(\ln x)^{p-1}}{x^{2}(\ln x)^{2p}}$，故当$x\geqslant 2$时，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$单调减少.

又$\int_{2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^{p}}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_{2}^{+\infty}$. 当$p<1$时，级数和是

$+\infty$,原级数发散;当 $p>1$ 时,级数和是$\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}$,原级数收敛;当 $p=1$ 时,级数和是 $\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=\infty$,原级数发散.

例 32 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-\lambda\ln n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^{n+p}}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ $(p,q>0)$;

(5) $\frac{a}{b}+\frac{a(a+d)}{b(b+d)}+\frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)}+\cdots$ $(a,b,d>0)$.

解 先求出 $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$,再讨论极限.

(1) $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left(\frac{2^{-\lambda\ln n}}{2^{-\lambda\ln(n+1)}}-1\right)=n(2^{\lambda\ln(1+1/n)}-1)$$
$$=n[e^{\ln 2^{\lambda}\cdot\ln(1+1/n)}-1]\text{(等价无穷小代换)}$$
$$\sim n[\ln 2^{\lambda}\cdot\ln(1+1/n)]$$
$$=n[1/n+o(1/n)]\ln 2^{\lambda}\xrightarrow{n\to\infty}\ln 2^{\lambda},$$

故当 $\ln 2^{\lambda}>1$,即 $\lambda>\log_2 e$ 时,级数收敛;当 $\lambda<\log_2 e$ 时,级数发散;当 $\lambda=\log_2 e$ 时,$a_n=2^{-\lambda\ln n}=1/n$,级数是调和级数.

(2) $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)^2}-1\right]=\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}3/2>1.$$

故知原级数收敛.

(3) $$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]$$
$$=\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]\Big/\frac{1}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right]\Big/\frac{1}{n}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e}(1+x)^{1/x+p}-1\right]\Big/x$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e}\cdot e^{\left(\frac{1}{x}+p\right)\ln(1+x)}-1\right]\Big/x\text{ (利用泰勒公式)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\cdot \mathrm{e}^{1+\left(p-\frac{1}{2}\right)x+o(x)}\right]\Big/x=p-\frac{1}{2}.$$

故当 $p-1/2>1$，即 $p>3/2$ 时，级数收敛.

(4) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^p\left(1+\frac{qx}{1+x}\right)-1\right]\Big/x$$
$$=p+q,$$

故当 $p+q>1$ 时，级数收敛.

(5) $$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{b+nd}{a+nd}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(b-a)^n}{a+nd}=\frac{b-a}{d},$$

故当 $\dfrac{b-a}{d}>1$ 时，级数收敛.

在用拉贝判别法讨论极限时，应特别注意利用等价无穷小代换和泰勒公式.

例 33 证明弗林克(Frink)判别法 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/a_{n-1})^n=k$ 存在，证明：当 $k<1/\mathrm{e}$ 时，级数收敛；当 $k>1/\mathrm{e}$ 时，级数发散.

证 记 $k=\mathrm{e}^{-\lambda}$，则 $\lambda=\ln k$. 若 $k<1/\mathrm{e}$，即 $\lambda>1$，于是存在数 s，$\lambda>s>1$. 引入级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p^s}$，是收敛的 p 级数. 又

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^s\Rightarrow\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{ns},$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot(-s)}=\mathrm{e}^{-s}>\mathrm{e}^{-\lambda}=k.$$

当 N 充分大时，$\forall\, n>N$，有

$$\left(\frac{b_n}{b_{n-1}}\right)^n>\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n,\quad 即\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{b_n}{b_{n-1}},$$

依比式判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

若 $k>\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $\mathrm{e}^{-\lambda}>\mathrm{e}^{-1}$. 引入级数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的调和级数. 又

$$\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n=(1-\frac{1}{n})^s,\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}<\mathrm{e}^{-\lambda}=k,$$

当 N 充分大时，$\forall\ n>N$，有

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n>\left(\frac{c_n}{c_{n-1}}\right)^n,\quad 即\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}>\frac{c_n}{c_{n-1}},$$

依比较原则知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

如果对 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^n=k$ 两边取对数，即得对数判别法：

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，则级数收敛；若 $\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$，则级数发散.

例 34 用对数判别法确定下列级数敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\ln x}\quad(x>0)$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$.

解 (1) $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ln x[\ln n-\ln(n+1)]=\ln x\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}n\ln x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\ln x\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=-\ln x,$$

故当 $-\ln x>1$，即 $x<1/\mathrm{e}$ 时，级数收敛；否则级数发散.

(2) $\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ln\{[\ln(n+1)]^{\ln\ln(n+1)}/(\ln n)^{\ln\ln n}\}$，故 $\exists\ n_0$，当 $n>n_0$ 时，$n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$，所以级数发散.

例 35 证明库默尔(Kummer)判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为

两个正项级数. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛; 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$, 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散, 则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则$\exists N,\forall n\geqslant N$有$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\geqslant k>0\Rightarrow\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\geqslant ka_{n+1}$. 则对$p>q=N$, 有

$$\sum_{i=q}^{p-1}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right)\geqslant\sum_{i=q}^{p-1}ka_{i+1},$$

即
$$k\sum_{i=q}^{p-1}a_{i+1}\leqslant\frac{a_q}{b_q}-\frac{a_p}{b_p}<\frac{a_q}{b_q}=\frac{a_N}{b_N}\Rightarrow\sum_{i=q}^{p-1}\leqslant\frac{1}{k}\cdot\frac{a_N}{b_N}.$$

于是, 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和

$$S_p=a_1+a_2+\cdots+a_N+(a_{N+1}+a_{N+2}+\cdots+a_p)$$
$$\leqslant a_1+a_2+\cdots+a_N+\frac{1}{k}\cdot\frac{a_N}{b_N}=M\ (a_N,b_N\text{不随}p\text{变化}),$$

即$\{S_p\}$单调增加且有上界, 所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$, 则$\exists N,\forall n\geqslant N$, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\leqslant-k\ (k>0)\Rightarrow\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}<\frac{1}{b_{n+1}},$$

即
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>\frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

依比较判别法知, 当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

由库默尔判别法立即可得拉贝判别法(只需取$b_n=1/n$即可证).

例 36 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数, 证明:

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n>1$,则级数收敛;

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n<1$,则级数发散.

证 取$\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$,该级数发散(见例 30 题(2)),则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot n\ln n-(n+1)\ln(n+1).$$

因为$(n+1)\ln(n+1)-(n+1)\ln n=(n+1)\ln(1+1/n)\xrightarrow{n\to\infty}1$,所以

$$\begin{aligned}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n&=\frac{a_n}{a_{n+1}}n\ln n-(n+1)\ln n\\&>\frac{a_n}{a_{n+1}}n\ln n-(n+1)\ln(n+1)\xrightarrow{n\to\infty}1.\end{aligned}$$

依库默尔判别法即得上述命题.

例 37 证明高斯(Gauss)判别法:若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数,从某项开始,有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\sigma}{n}+\frac{c_n}{n^{\lambda}},$$

其中$|c_n|<M<+\infty$, $\lambda>1$, σ,λ,M均与n无关,则当$\sigma>1$时,级数收敛;当$\sigma\leqslant1$时,级数发散.

证 将$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=1+\dfrac{\sigma}{n}+\dfrac{c_n}{n^{\lambda}}$代入例 35 式中,得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\sigma+\frac{c_n}{n^{\lambda-1}}-1\right]\ln n=\begin{cases}+\infty>1, & \sigma>1,\\ 0, & \sigma=1,\\ -\infty<1, & \sigma<1,\end{cases}\end{aligned}$$

所以,当$\sigma>1$时,级数收敛;当$\sigma\leqslant1$时,级数发散.

例 38 用高斯判别法确定下列级数敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!n^{-p}}{q(q+1)(q+2)\cdots(q+n)}\ (p>0,\ q>0)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \dfrac{1}{n^q}$

$(p>0,\ q>0)$.

解 高斯判别法往往与拉贝判别法一起使用. 一般,用来判别参数为定值的敛散性时,还要借助于泰勒公式.

$$
\begin{aligned}
(1)\ &\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(q+n+1)(1+1/n)^p}{n+1}-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)\frac{(1+1/n)^p-1}{1/n}\right] \\
&\quad + \lim_{n\to\infty} n\left[\left(1+\frac{q}{n+1}\right)-1\right] = p+q.
\end{aligned}
$$

故当 $p+q>1$ 时,级数收敛;当 $p+q<1$ 时,级数发散.

当 $p+q=1$ 时,有

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(1+\frac{q}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-q} \\
&= \left[1+\frac{q}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\left[1+\frac{1-q}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\ (\varepsilon>0),
\end{aligned}
$$

依高斯判别法知,当 $p+q=1$ 时,级数发散.

$$
\begin{aligned}
(2)\ &\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{n+1}{p+n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{p+n}\frac{(1+1/n)^q-1}{1/n} + \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{p+n}-1\right) \\
&= q+1-p.
\end{aligned}
$$

故当 $q+1-p>1$,即 $q>p$ 时级数收敛,当 $q<p$ 时级数发散.

当 $q=p$ 时,级数可以化为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^p},$$

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{n+1}{n+p}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \\
&= \left[1+\frac{1-p}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right]\left[1+\frac{p}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\right] \\
&= 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right).
\end{aligned}$$

依高斯判别法知，当 $p=q$ 时，级数发散.

第二节　一般项级数

主要内容

1. 各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots \quad (u_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$$

称为交错级数.

2. 莱布尼茨判别法　若交错级数满足以下条件：

（1）数列$\{u_n\}$单调减少，　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则交错级数收敛.

若交错级数满足莱布尼茨条件，则收敛级数的余项估计式为 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

3. 若级数 $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 各项绝对值组成的级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots$$

收敛，则称原级数绝对收敛.

绝对收敛的级数一定收敛.

可用考察正项级数的各种判别法考察绝对值级数的敛散性.

4. 绝对收敛级数的两个重要性质

(1) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,其和为 S,则任意重排各项后所得级数仍绝对收敛,且其和不变.

(2) 柯西定理　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=A$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=B$ 都绝对收敛,则两级数的每一项的所有可能乘积 u_iv_j 按任意顺序排列所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 也绝对收敛,且其和为 AB.

5. 阿贝尔判别法

(1) 阿贝尔变换　设 ε_i,v_i $(i=1,2,\cdots,n)$为两组实数,若令 $\sigma_k=v_1+v_2+\cdots+v_k(k=1,2,\cdots,n)$,则有

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_iv_i=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n.$$

上式又称为分部求和公式.

(2) 阿贝尔引理　若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为单调数组,且对任一自然数 k $(1\leqslant k\leqslant n)$,有 $|\sigma_k|\leqslant A$ (σ_k 如(1)所定义),则当

$$\varepsilon=\max\{|\varepsilon_k|\}$$

时,有 $\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_iv_k\right|\leqslant 3\varepsilon A$.

(3) 阿贝尔判别法　若$\{a_n\}$为单调有界数列,且级数 $\sum_{n=1}^{n}b_n$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

6. 狄利克雷判别法　若数列$\{a_n\}$单调减少,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,又级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

疑难解析

1. 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，怎样判别其敛散性？

答 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若其绝对收敛，则一定收敛. 因此可将正项级数判别法用于绝对收敛的级数上. 对条件收敛级数，需要更加精细的判别法，如阿贝尔判别法、狄利克雷判别法. 对特殊情形，如交错级数，莱布尼茨判别法是狄利克雷判别法的特殊情形.

2. 绝对收敛级数与条件收敛级数有什么不同的特性？表现在哪些方面？

答 绝对收敛级数与条件收敛级数虽然都是收敛级数，但它们有不同的特性，主要表现在运算上. 绝对收敛级数与有限和有相同的运算律（结合律、交换律、分配律），而条件收敛级数不满足交换律.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则可以任意交换 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 各项的位置而不改变其和. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛，且其和分别为 A,B，则乘积 $\sum_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ 也绝对收敛，其和为 AB.

对级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的子级数（数列 $\{u_n\}$ 的子数列形成的级数），绝对收敛级数有以下特性：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛的充要条件是它的一切子级数都收敛.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的一切子级数都收敛，可令

$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2},$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 分别是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正项部分与负项部分，都是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的子级数，由所设知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛. 而 $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 反之，当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛时，由 $0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n|, 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛. 于是对 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的任一子级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$，令

$$v_n = \begin{cases} 0, & n \neq n_k, \\ u_{n_k}, & n = n_k, \end{cases}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$，且 $0 \leqslant v_n^+ \leqslant u_n^+, 0 \leqslant v_n^- \leqslant u_n^-$. 依比较判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^-$ 都收敛，$|v_n| = v_n^+ + v_n^-$，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_{n_k}|$ 收敛，得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n_k}$ 收敛.

条件收敛级数有以下特性：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散到正无穷大.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 有一个收敛，不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 收敛，因 $u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}$，即 $|u_n| = 2u_n^+ - u_n$，由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 从而引出矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散.

方法、技巧与典型例题分析

对于任意项级数，首先是区别其是否为交错级数，这一般可以由 u_n 的形式确定. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为交错级数，通常可以用莱布尼茨判别法确定其敛散性. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为一般的任意项级数，则可以用正项级数的判别法确定 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 的敛散性，从而判别 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否绝对收敛. 而条件收敛的判别则比较复杂，一般可使用阿贝尔判别法、狄利克雷判别法.

例 1 讨论下列交错级数的敛散性，并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n^{1/n}-1)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;　　(6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$.

解 本例的级数均为交错级数.

(1) $u_n=(-1)^{n-1}\cdot 1/n^{1/2}$. 满足 $|u_n|\geqslant|u_{n+1}|$，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，所以，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^{1/2}$ 是 p 级数，$p<1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 不收敛，即原级数条件收敛.

(2) $u_n=\frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{2},$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，原级数不绝对收敛.

但$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\frac{(n+1)^n}{2n^{n+1}}\cdot\frac{2(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}=\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}>1$，且$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}=0$，依莱布尼茨判别法，原级数收敛，即原级数条件收敛.

(3) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{3^{n-1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^n}\cdot\frac{3^{n-1}}{n}=\frac{1}{3}<1,$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，即原级数绝对收敛.

(4) 设$a_n=n^{1/n}-1$，则$a_n>0$. 设$f(x)=x^{1/x}$，则

$$\lim_{n\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{x}\ln x}=e^0=1,$$

所以，$|u_n|=a^n\to0$. 又由$f'(x)=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}$知，当$x>e$时，$f'(x)<0$. 故当$x>e$时，$f(x)$单调减少，即$a_n>a_{n+1}(n=3,4,\cdots)$，依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

(5) 令$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0\ (x>e)$. 故当$n\geqslant3$时，$\{a_n\}=\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$单调减少，且$a_n\to0$. 依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

又当$n\geqslant3$时，$a_n=\frac{\ln n}{n}\geqslant\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 故原级数不绝对收敛，所以原级数条件收敛.

(6) $u_n=(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$，而

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2^n\cdots 2^n}{n(n-1)\cdots 1} = \infty,$$

所以原级数发散.

例 2 讨论下列交错级数的敛散性,并对收敛级数判别是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n+\ln n}$.

解 (1) $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. 因为

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\Big/\frac{1}{n^{1/2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以,原级数不绝对收敛.

但是, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n-1}} = 0$, $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} < \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$, 所以依莱布尼茨判别法,原级数收敛,即条件收敛.

(2) $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$. 因为 $\frac{1}{n-\ln n} > \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,所以,原级数不绝对收敛.

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{L'}{=\!=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1-\ln n/n} = 0.$$

又令 $f(x)=x-\ln x$, 由 $f'(x)=1-1/x>0\ (x>0)$, 知 $n-\ln n$ 单调增加,即 $\frac{1}{n-\ln n}$ 单调减少. 所以依莱布尼茨判别法知,原级数收敛,即条件收敛.

(3) $u_n=(-1)^{n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^p$.

当 $p\leqslant 0$ 时, $|u_n|\geqslant 1$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

当 $0\leqslant p\leqslant 2$ 时，令 $u_n=(-1)^{n-1}a_n$，由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p<1$ 易知

$$a_n>\left[\frac{2n+1}{2(n+1)}\right]^p a_n=a_{n+1}(n=1,2,\cdots),$$

而
$$0<a_n<\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)^p\to 0\ (n\to\infty).$$

依莱布尼茨判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

但是，$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}=\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$，依拉贝判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{[(2n+2)/(2n+1)]^p-1]}{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+p/(2n+1)+o(1/n)-1}{1/n}=\frac{p}{2},$$

所以当 $0<p\leqslant 2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，即原级数条件收敛.

当 $p>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

(4) $u_n=(-1)^n\frac{1}{2^n+\ln n}$. 因为

$$|u_n|=\frac{1}{2^n+\ln n}<\frac{1}{2^n},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

例 3 判别下列级数是否收敛. 若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+1/\ln n)$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$.

解 (1) $u_n=(-1)^n\sin(1/\ln n)$，当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$0<\frac{1}{\ln n}\leqslant\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e<\log_2(2\sqrt{2})=\frac{3}{2}<\frac{\pi}{2}.$$

故 $0<\sin(1/\ln n)<1$，原级数为交错级数. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/\ln n)}{1/\ln n}\cdot\frac{n}{\ln n}=+\infty,$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|u_n|$发散，原级数不绝对收敛.

但当 n 增大时，$1/\ln n$ 单调减少，$\sin(1/\ln n)$ 也单调减少，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(1/\ln n)=0$，故依莱布尼茨判别法知，原级数条件收敛.

(2) $u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})=\sin[n\pi+\pi\sqrt{n^2+a^2}-n\pi)]$

$$=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{n^2+a^2}-n)$$

$$=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n},$$

故原级数是交错级数.

但是，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=0$，$|u_n|>|u_{n+1}|$，所以依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

例 4 判别下列级数是否收敛.若收敛，是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{a}{n}\ (a>0)$; (2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin\dfrac{n\pi}{12}\right)\Big/\ln n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi$，$\alpha,\beta$ 为常数.

解 (1) 当 n 充分大时，$\sin(a/n)>0$，且单调减少并趋向于零，依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

又$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{a}{n}\right)\Big/\dfrac{a}{n}=1$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n}$发散，故原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

(2) 当 $n>2$ 时，$1/\ln n>0$，且单调减少并趋向于零.

$\forall n \in \mathbf{N}$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{12}$ 的部分和的绝对值

$$|S_n| = \left| \sum_{k=2}^{n} \sin \frac{k\pi}{12} \right| = \left| \frac{\cos(3\pi/24) - \cos[(n+1/2)\pi/12]}{2\sin(\pi/24)} \right|$$
$$\leqslant 1/\sin(\pi/24).$$

即 S_n 有界，依狄利克雷判别法知，原级数收敛.

又 $\left| \left(\sin \frac{n\pi}{12} \right) \Big/ \ln n \right| \geqslant \frac{\sin^2(n\pi/12)}{\ln n} = \frac{1 - \cos(n\pi/6)}{2\ln n}.$

$$= \frac{1}{2\ln n} - \frac{\cos(n\pi/6)}{2\ln n},$$

而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2\ln n}$ 发散，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{6} \right) \Big/ (2\ln n)$ 收敛，故原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

(3) 因为 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$，所以原级数是交错级数. 而

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

又设 $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$，则

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x(x+1)}} < 0.$$

所以 $f(x)$ 单调减少，原级数收敛.

(4) $u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^{2k} + 1}}.$

当 $k > 1$ 时，$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} < \frac{1}{n^k}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ 收敛，所以原级数绝对收敛.

当 $0 < k \leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| \Big/ \frac{1}{n^k} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 1$，由比较审敛法的极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 但是

$$\frac{1}{\sqrt{n^{2k}+1}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^{2k}+1}}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^{2k}+1}} = 0,$$

依莱布尼茨判别法知，原级数收敛，即条件收敛.

(5) $u_n = \sin\dfrac{n^2+n\alpha+\beta}{n}\pi = \sin[n\pi+(\alpha+\beta/n)\pi]$

$= (-1)^n \sin(\alpha+\beta/n)\pi$，

当 $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，故原级数发散.

当 $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时，$u_n = (-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n)$. 若 $\beta = 0$，则原级数绝对收敛；若 $\beta \neq 0$，不妨设 $\beta > 0$（当 $\beta < 0$ 时，$u_n = (-1)^{n+\alpha+1}\sin(|\beta|\pi/n)$），$u_n(-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n) \sim (-1)^{n+\alpha}(\beta\pi/n)$.

依莱布尼茨判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}(\beta\pi/n)$ 条件收敛，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+\alpha}\sin(\beta\pi/n)$ 条件收敛.

例 5 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\dfrac{\sin n}{n}$.

解 两级数都是任意项级数.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{k}\sin n = \dfrac{\cos(3/2)-\cos(k+1/2)}{2\sin(1/2)}$，$k = 2,3,\cdots$，

故
$$\left|\sum_{n=2}^{k}\sin n\right| \leqslant 1/\sin(1/2),\ k = 2,3,\cdots.$$

又当 $n \geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{\ln n} > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$，故依狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin n}{\ln n}$ 收敛.

设 $f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)|$，$x \in (-\infty, +\infty)$，

则 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的正值连续周期函数，存在 $c > 0$，使得 $f(x) > c$. 于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\ln n} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{|\sin 2k|}{\ln 2k} + \frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\right]$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin 2k| + |\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}$$

$$\geqslant c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)},$$

而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}$ 发散，故原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

(2) 令 $a_n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，$b_n=\sin n$，则

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)+\frac{n}{n+1}\right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散于正无穷大，故当 n 充分大时，$a_{n+1}-a_n<0$，即 $\{a_n\}$ 单调减少. 又

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=C+\ln n+\varepsilon_n，C\text{ 为欧拉数}，\varepsilon_n\to 0，\text{所以}$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}\left[-(C+\ln n+\varepsilon_n)+\frac{n}{n+1}\right]\to 0\quad(n\to\infty).$$

由题(1) 知 $\sum_{k=1}^{n}\sin k$ 有界. 故依狄利克雷判别法知，原级数收敛.

利用与题(1) 类似方法，可证题(2) 的原级数不绝对收敛，即原级数条件收敛.

类似地，若 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$，$x\neq 2k\pi$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 收敛，并可由此证明：当 $x\neq 2k\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$ 收敛.

事实上，若 $x\neq 2k\pi$，则 $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}$. 于是 $\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx$ 的部分和数列有界，且 a_n 单调减少并趋向于零. 依狄利克雷判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 收敛.

而 $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$ 单调减少并且趋向于零. 故依上述结果知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$ 当 $x \neq 2k\pi$ 时收敛.

例 6 设 $\{a_n\}$ 是实数序列，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 并举例说明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 可能发散.

解 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$，所以 $\exists\ N \in \mathbf{N}$，使得当 $n > N$ 时，$|a_n| < 1$，则 $|a_n| > a_n^2$，依比较审敛法知，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 是条件收敛级数，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是调和级数，是发散的.

例 7 讨论 a(实数)的情况，使得级数 $1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^a} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^a} + \cdots$ 收敛.

解 显然，当 $a \leqslant 0$ 时，不满足 $u_n \to 0$，所以级数发散；当 $a > 1$ 时，有

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^a}\cdot\frac{1}{k^a}.$$

式中第一项趋向于 $+\infty$，第二项趋向于有限数，所以级数发散；当 $a = 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 条件收敛.

当 $0 < a < 1$ 时，因为

$$\frac{1}{(2n)^a} - \frac{1}{(2n+1)} = \frac{1}{(2n)^a}\left[1 - \frac{(2n)^a}{2n+1}\right] \approx \frac{1}{(2n)^a},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^a}$ 发散，即原级数加括号后发散. 故原级数发散.

综上所述知，当 $a=1$ 时，级数收敛，其它情形级数发散.

例 8 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$. 并证明：若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排，先有 p 个正项，后有 q 个负项，如此循环，则新级数和为 $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的交错级数，设其部分和为 S_n，则 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. 不妨求 S_{2n}.

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

由上册第一章中关于欧拉数的定义，有

$$S_{2n}=(\ln 2n+C+r_{2n})-(\ln n+C+r_n)$$
$$=\ln 2+r_{2n}-r_n.$$

其中 C 为欧拉数，r_{2n},r_n 均趋向于零，于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\ln 2.$$

又设依要求重排后的新级数部分和为 S_n，则 $\forall\ k\in\mathbf{N}$，有

$$S_{(p+q)k}$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)$$
$$+\cdots+\left[\frac{1}{2p(k-1)+1}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2q(k-1)+2}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right]$$
$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2qk}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2pk-1}+\frac{1}{2pk}$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{pk}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{qk}\right)$$

$$=\ln 2pk+C+r_{2pk}-\frac{1}{2}(\ln pk+C+r_{pk})-\frac{1}{2}(\ln qk+C+r_{qk})$$

$$=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+r_{2pk}-\frac{1}{2}(r_{pk}+r_{qk}),$$

故
$$\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

又因为$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$,所以

$$\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k+m}=\lim_{n\to\infty}S_{(p+q)k}=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q},$$

故新级数的和 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

于是可得

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2,$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 9 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数,令 $u_n^+=\frac{|u_n|+u_n}{2}$,$u_n^-=\frac{|u_n|-u_n}{2}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都是正项级数,分别称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的正部和负部. 证明:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^-$;

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^-$ 都发散到正无穷大.

证 参看本节疑难解析 2.

例 10 证明黎曼(Riemann)定理 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则对任给 B(有限实数或 $\pm\infty$)，都有级数的一个重排 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，使得 $B = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$.

证 (1) 设 B 为有限实数，不妨设 $B > 0$. 由例 9 知，存在 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ = +\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = -\infty$. 按下述方法对原级数重排：先取 p_1 个正项，使得 $B < \sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ \leqslant B + u_{p_1}^+$，再取 q_1 个负项，使 $B + u_{q_1}^- \leqslant \sum_{n=1}^{p_1} u_n^+ + \sum_{n=1}^{q_1} u_n^- \leqslant B$；然后又取 $p_2 - p_1$ 个正项，再取 $q_2 - q_1$ 个负项；……如此继续下去，得到如下的重排：

$$\begin{aligned}&(u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ &+ (u_{p_1+1}^+ + \cdots + u_{p_2}^+) + (u_{q_1+1}^- + \cdots + u_{q_2}^-) + \cdots \\ &+ (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) + \cdots,\end{aligned}$$

满足

$$\begin{aligned}B &< (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ &\quad + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) \\ &\leqslant B + u_{p_k}^+\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}B + u_{q_k}^- &\leqslant (u_1^+ + \cdots + u_{p_1}^+) + (u_1^- + \cdots + u_{q_1}^-) + \cdots \\ &\quad + (u_{p_{k-1}+1}^+ + \cdots + u_{p_k}^+) + (u_{q_{k-1}+1}^- + \cdots + u_{q_k}^-) \\ &< B.\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^+ = \lim\limits_{n\to-\infty} u_n^- = 0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{p_k}^+ = \lim u_{q_k}^- = 0$. 从而重排后级数收敛于 B，此级数去括号后即为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = B$.

(2) 设 $B = +\infty$($-\infty$ 可类似证明).

先取 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 的前 m_1 项，使得

$$u_1^+ + u_2^+ + \cdots + u_{n_1}^+ > 1 - u_1^-;$$

再取 $m_2>m_1$，使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + u_{m_1+1}^+ + \cdots + u_{m_2}^+ > 2 - u_1^- - u_2^-;$$

更一般地，取 $m_k>m_{k-1}$，使得

$$u_1^+ + \cdots + u_{m_1}^+ + \cdots + u_{m_k}^+ > k - u_1^- - \cdots - u_k^-,$$

其中 $k=2,3,\cdots$. 由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^+$ 是发散的，故上述重排是可行的，所以重排后级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n' = B$.

例 11 判断下列命题是否正确，如正确加以证明，如不正确举出反例.

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1 + a_2 + \cdots a_n)$ 收敛；

(2) 若 $|a_n|$ 收敛于零，则 $\{a_n\}$ 是有界变差的；

(3) 若 $2|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

解 (1) 正确. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \leqslant M \ (M > 0),$$

故

$$|a_n(a_1 + \cdots + a_n)| \leqslant M|a_n|,$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_1 + \cdots + a_n)$ 收敛.

(2) 不正确. 若 $\{a_n\}$ 满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n - a_{n-1}| <+ \infty$，则称 $\{a_n\}$ 是有界变差的. 例如 $a_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$，有 $|a_n| = \dfrac{1}{n} \to 0$，但 $\{a_n\}$ 不是有界变差的.

(3) 正确. 由 $2|a_{n+1}| \leqslant |a_n|$，有 $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|a_1|$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

收敛.

例 12 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} C_m^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_m^2$.

解 $C_m^n=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$.

(1) 当 m 为正整数时,级数只有有限项,所以级数必然收敛.

当 m 不是正整数时,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{m-n}{n+1}=-\frac{n-m}{n+1}.$$

(i) 若 $m\leqslant -1$,有 $n-m\geqslant n+1$,则 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|\geqslant 1$,从而 $|u_n|\geqslant |u_1|=|m|>1$,即$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$,原级数发散.

(ii) 若 $m>-1$,在 $n>m$ 时,$-1<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为交错级数,$|u_n|$ 单调减少,且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0$,于是由莱布尼茨判别法知,原级数收敛.

事实上,因为

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n-m}{n+1}=1-\frac{m+1}{n+1},$$

所以若记 $a_n=\dfrac{m+1}{n+1}$,则 $0<a_n<1$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$. 由 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充要条件是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛(见第三节例 6),有

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=+\infty.$$

但是 $1+a_n=\dfrac{1-a_n^2}{1+a_n}<\dfrac{1}{1+a_n}$,于是

$$\begin{aligned}0&\leqslant\lim_{n\to\infty}(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)\\&<\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+a_1}\cdot\frac{1}{1+a_2}\cdots\frac{1}{1+a_n}=0,\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}\right|\cdot\left|\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}\right|\cdots\left|\frac{u_{m+n+1}}{u_{m+n}}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0.$

(2) 当 m 是正整数时,原级数收敛.

当 m 不是正整数,而 n 充分大时,有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n-m}{n+1}>0,$$

则级数是同号级数(不妨设为正项级数).由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=m+1,$$

依拉贝判别法,当 $m>0$ 时,原级数收敛;当 $m<0$ 时,原级数发散.

例 13 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛,证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 也收敛.

证 由题设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 收敛,则由柯西准则,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|<\varepsilon, \quad ①$$

即
$$|a_{n+p}-a_{n+1}|$$
$$\leqslant|a_{n+p}-a_{n+p-1}|+\cdots+|a_{n+2}-a_{n+1}|<\varepsilon. \quad ②$$

又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛,则其部分和序列 $\{S_n\}$ 收敛.由柯西准则,对前述 $\varepsilon>0$,$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$,当 $n>N_2$ 时,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}-S_p|<\varepsilon. \quad ③$$

故 $\forall\ k\in\mathbf{N}$,有 $b_k=S_k-S_{k-1}$ $(S_0=0)$.

由式②、式③知,数列 $\{b_n\}$ 和 $\{S_n\}$ 都收敛,从而都有界.即 $\exists\ M>0$,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有 $|a_n|\leqslant M$ 与 $|S_n|\leqslant M$.

综上所述知,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N}$,$\forall\ n>N$,$\forall\ p\in\mathbf{N}$,有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+a_{n+2}b_{n+2}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|$$

$$
\begin{aligned}
&=|a_{n+1}(S_{n+1}-S_n)+a_{n+2}(S_{n+2}-S_{n+1})+\cdots \\
&\quad +a_{n+p}(S_{n+p}-S_{n+p-1})| \\
&=|S_{n+1}(a_{n+1}-a_{n+2})+S_{n+2}(a_{n+2}-a_{n+3})+\cdots \\
&\quad +S_{n+p-1}(a_{n+p-1}-a_{n+p})+a_{n+p}S_{n+P}-a_{n+1}S_n| \\
&\leqslant |S_{n+1}||a_{n+1}-a_{n+2}|+|S_{n+2}||a_{n+2}-a_{n+3}|+\cdots \\
&\quad +|S_{n+p-1}||a_{n+p-1}-a_{n+p}| \\
&\quad +|a_{n+p}S_{n+p}-a_{n+p}S_n+a_{n+p}S_n-a_{n+1}S_n| \\
&\leqslant M(|a_{n+2}-a_{n+1}|+|a_{n+3}-a_{n+2}|+\cdots+|a_{n+p}-a_{n+p-1}|) \\
&\quad +M|S_{n+p}-S_n|+M|a_{n+p}-a_{n+1}| \\
&< M\varepsilon+M\varepsilon+M\varepsilon=3M\varepsilon.
\end{aligned}
$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例 14 证明:级数 $1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$ 是收敛的.

证 因为

$$
\begin{aligned}
|u_n| &= \frac{1}{2n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{(2n-1)+2}{(2n-1)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&> \frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=|u_{n+1}|,n=1,2,\cdots,
\end{aligned}
$$

所以 $\{u_n\}$ 单调减少. 又

$$
|u_n|=\frac{1}{2n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n-1}(\ln n+C+\varepsilon_n)\to 0,
$$

其中 C 为欧拉数.

故依莱布尼茨判别法知,原级数收敛.

例 15 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$ 发散,$S_n=a_1+a_2+\cdots+$

a_n，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则其部分和序列 $\{S_n\}$ 单调增加且无上界. $\forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, p \in \mathbf{N}$，使得 $S_{n+p} \geqslant 2S_n$ 或 $S_n/S_{n+p} \leqslant 1/2$. 有

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \\
&> \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{S_{n+p}} \\
&= \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

即 $\exists\, \varepsilon_0 = 1/2 > 0, \forall\, N \in \mathbf{N}, \exists\, n > N, \exists\, p \in \mathbf{N}$（使 $S_{n+p} \geqslant 2S_n$），有

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{S_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant \frac{1}{2},$$

于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 也发散.

例 16 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 收敛，$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ 发散.

证 $\forall\, n \in \mathbf{N}, r_n > 0$，且 $\{r_n\}$ 严格单调减少. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. 故 $\forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, p \in \mathbf{N}$，使得 $2r_{n+p} < r_{n+1}$ 或 $\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} < \frac{1}{2}$. $\forall\, n \in \mathbf{N}, r_n = a_n + r_{n+1}$，或 $r_{n+1} = r_n - a_n$，有

$$\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{r_{n+p}} \\
&> \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}}{r_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_{n+p+1}}{r_{n+1}} \\
&= \frac{r_{n+1} - r_{n+p} + a_{n+p}}{r_{n+1}} = 1 - \frac{r_{n+p}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+p}}{r_{n+1}}
\end{aligned}$$

$$>1-\frac{r_{n+p}}{r_{n+1}}>1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

即$\exists\ \varepsilon_0=1/2>0, \forall\ N\in\mathbf{N}, \exists\ n>N, \exists\ p\in\mathbf{N}$(使 $2r_{n+p}<r_{n+1}$)，有

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{r_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{r_{n+p}}>\frac{1}{2}.$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$发散.

例 17 若记$E(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$，则对任何实数$\lambda$，$E(\lambda)$绝对收敛，证明：

(1) $E(a)E(b)=E(a+b)$； (2) $E(a)E(-a)=1$；

(3) $E\left(\frac{m}{k}\right)=\left[E\left(\frac{1}{k}\right)\right]^m$； (4) $E\left(\frac{1}{k}\right)=[E(1)]^{1/k}$.

证 (1) 由

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\right|\bigg/\left|\frac{\lambda^n}{n!}\right|=\frac{|\lambda|}{n+1}\to 0$$

知，$E(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}$是绝对收敛的. 而积级数$E(a)E(b)$的一般项为

$$\begin{aligned}w_n&=u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_nv_0\\&=1\cdot\frac{b^n}{n!}+\frac{a}{1!}\cdot\frac{b^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{a^n}{n!}\cdot 1\\&=\frac{1}{n!}\left(b^n+\frac{n}{1!}ab^{n-1}+\cdots+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+a^n\right)\\&=\frac{1}{n!}(C_n^0b^n+C_n^1ab^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}a^{n-1}b+C_n^na^n)\\&=\frac{1}{n!}(a+b)^n.\end{aligned}$$

即 $$E(a)E(b)=\sum_{n=0}^{\infty}w_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}=E(a+b).$$

(2) $E(a)E(-a)=E(a-a)=E(0)=1$.

(3) $E\left(\frac{m}{k}\right)=E\left(\frac{1}{k}\right)E\left(\frac{m-1}{k}\right)=E\left(\frac{1}{k}\right)^2E\left(\frac{m-2}{k}\right)=\cdots$

$$=E\left(\frac{1}{k}\right)^m.$$

(4) $[E(1)]^{1/k}=\left[E\left(\frac{k}{k}\right)\right]^{1/k}=\left[E\left(\frac{1}{k}\right)^k\right]^{1/k}=E\left(\frac{1}{k}\right).$

例 18 若 $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 两级数均收敛,且其中至少有一个绝对收敛,证明:积级数 $\sum c_n$ 也收敛,且 $\sum c_n = \sum a_n \sum b_n$.

证 不妨设 $\sum a_n$ 绝对收敛，部分和分别为

$$A_m = \sum_{n=0}^{m} a_n,\quad B_m = \sum_{n=0}^{m} b_n,\quad C_m = \sum_{n=0}^{m} c_n,$$

则 $C_m = a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\cdots+(a_0b_m+a_1b_{m-1}+\cdots+a_mb_0)$

$$=a_0(b_0+b_1+\cdots+b_m)+a_1(b_0+b_1+\cdots+b_{m-1})$$
$$+\cdots+a_{m-1}(b_0+b_1)+a_mb_0$$
$$=a_0B_m+a_1B_{m-1}+\cdots+a_mB_0,$$

记 $\sum a_n = A$, $\sum b_n = B$, 则 $B_k=B+\beta_k(k=0,1,2,\cdots)$, $\beta_m\to 0$.

又 $C_m = a_0(B+\beta_m)+a_1(B+\beta_{m-1})+\cdots+a_m(B+\beta_0)$

$$=(a_0+a_1+\cdots+a_m)B+a_0\beta_m+a_1\beta_{m-1}+\cdots+a_m\beta_0$$
$$=A_mB+R_m,$$

当 $m>N$ 时,有

$$R_m= a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_m\beta_0$$
$$= (a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_N\beta_{m-N})$$
$$+ (a_{N+1}\beta_{m-N-1} + \cdots + a_m\beta_0)$$

由于 $\beta_m \to 0$,故 $\exists\, k > 0$,对任意 n, $|\beta_n| < k$,且当 N 充分大时,只要 $n > N$,就有 $|\beta_m| < \varepsilon$. 又 $\sum a_n$ 绝对收敛,则 $\exists\, N_a > 0$,使得 $\forall\, m > N_a$, 有

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots + |a_m| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

若记 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{N_a}|=M$,可取 N_1,使得对一切 $n>N_1$,有

$|\beta_n|<\frac{\varepsilon}{2M}$. 对上述 N_1 和 N_a 以及 $m>N_1+N_a$，有

$$\begin{aligned}|R_m| &\leqslant |a_0\beta_m + a_1\beta_{m-1} + \cdots + a_{N_a}\beta_{m-N_a}| \\ &\quad + |a_{N_a+1}\beta_{m-N_a-1} + \cdots + a_m\beta_0| \\ &\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M} + k\frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon.\end{aligned}$$

即有 $R_m\to 0$，也就是 $\lim\limits_{m\to\infty}C_m=\lim\limits_{m\to\infty}A_mB=AB$，故

$$\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right).$$

例 19 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，则 $\forall\ \beta>\alpha$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛.

证 因为 $\beta=\alpha+\lambda,\lambda>0$，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha+\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{n^\lambda},$$

而 $\left\{\frac{1}{n^\lambda}\right\}$ 单调减少且有下界（如零），而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，依阿贝尔判别法知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$ 收敛.

例 20 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\alpha}=0.$$

证 依柯西准则，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛，故 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ m\in\mathbf{N},\forall\ p\in\mathbf{N}$，有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^\alpha}+\frac{a_{m+2}}{(m+2)^\alpha}+\cdots+\frac{a_{m+p}}{(m+p)^\alpha}\right|<\varepsilon,$$

而
$$0<\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^\alpha<\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^\alpha<\cdots<\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^\alpha=1.$$

依阿贝尔变换，有

$$\left|\frac{a_{m+1}}{(m+1)^\alpha}\left(\frac{m+1}{m+p}\right)^\alpha+\frac{a_{m+2}}{(m+2)^\alpha}\left(\frac{m+2}{m+p}\right)^\alpha+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_{m+p}}{(m+p)^\alpha}\left(\frac{m+p}{m+p}\right)^\alpha\right|<\varepsilon,$$

即
$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|<\varepsilon.$$

当 m 固定时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{(m+p)^\alpha}\right|\to 0\ (p\to+\infty),$$

即对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall\ p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{(m+p)^\alpha}\right|<\varepsilon.$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$ ($\exists\ m\in\mathbf{N}$)，$\exists\ L\in\mathbf{N}$，$\forall\ p>L$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|+\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}\frac{a_k}{(m+p)^\alpha}\right|>2\varepsilon.$$

由于 $p>L$ 且可任意大，故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\alpha}=0.$$

例 21 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

证 由题设知，$f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.$$

又由 $f''(x)$ 的连续性知，$\exists\ M>0$，使得 $|f''(x)|\leqslant M$，于是

$$|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)x^2|\leqslant\frac{M}{2}x^2,$$

令 $x=\dfrac{1}{n}$，得 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$. 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例 22 证明：(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ 自乘的柯西乘积发散.

证 (1) 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 是收敛的交错级数，

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n.$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 是交错级数，要证明其收敛.

$$c_n-c_{n-1}=\left[\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1}\right]$$

$$-\left[\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2}+\frac{1}{(n+1)\cdot 1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\to 0,$$

即数列 $\{c_n\}$ 单调减少并趋向于零.

又 $$c_{2n}=\frac{1}{1\cdot(2n)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$+\frac{1}{(n+1)n}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2}+\frac{1}{(2n)\cdot 1}$$

$$=2\left[\frac{1}{1\cdot(2n)}+\frac{1}{2(2n-1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$\leqslant 2\left[\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{n+1}(\ln n+C+r_n).$$

其中 C 为欧拉数，$r_n\to 0$，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}c_{2n}=0$. 即单调减少数列 $\{c_n\}$ 的一个偶子列极限为零，因而 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$.

依莱布尼茨判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 自乘的柯西乘积收敛.

(2) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 是收敛的交错级数，

$$c_n=a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}a_kb_{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot(-1)^{n-k-1}\frac{1}{\sqrt{n-k}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

当 $n>k\geqslant 1$ 时，显然有 $\sqrt{k(n-k)}\leqslant\sqrt{n-1}\cdot\sqrt{n-1}$，所以

$$|c_n|=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-k}}\geqslant(n-1)\frac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n-1}}=1,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n\neq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 自乘的柯西乘积发散.

例 23 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n]}\frac{1}{n}$ 的敛散性.

解 将级数中相邻且符号相同的项合并成一项，可得一新的交错级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}\right].$$

而 $k\cdot\frac{1}{k^2+k}<\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2+1}+\cdots+\frac{1}{k^2+(k-1)}<k\cdot\frac{1}{k^2}=\frac{1}{k}$,

$$(k+1)\frac{1}{k^2+k}<\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}$$

$$<(k+1)\frac{1}{(k+1)^2-1}=\frac{1}{k},$$

所以 $\frac{2}{k+1}<\frac{1}{k^2}+\cdots+\frac{1}{k^2+(k-1)}+\frac{1}{k^2+k}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2-1}<\frac{2}{k}$.
于是,新交错级数通项当 $k\to\infty$ 时趋向于零,且绝对值单调减少.依莱布尼茨判别法知,新级数收敛.

又原级数部分和包含在新级数两相邻部分和之间,因而原级数部分和极限存在,即原级数收敛.因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[n]}\frac{1}{n}$ 不绝对收敛,从而确定原级数条件收敛.

下面讨论级数与非正常积分的关系.

例 24 证明下列非正常积分收敛:

(1) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

证 (1) 对给定的 $A>0$,有惟一的 $n>0$,使得 $\sqrt{n}<A<\sqrt{n+1}$,当 $A\to+\infty$ 时,$n\to+\infty$.于是,当 $\sqrt{k-1}\leqslant x<\sqrt{k}$ 时,$k-1\leqslant x^2<k$,$[x^2]=k-1$,从而

$$\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\int_{\sqrt{k-1}}^{\sqrt{k}}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{n}}^{A}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}+(-1)^n(A-\sqrt{n}).$$

由莱布尼茨判别法知,$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ 收敛,又

$$|(-1)^n(A-\sqrt{n})|\leqslant\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0,$$

所以 $\lim\limits_{A\to\infty}\int_0^A(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=S$,即积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 因为 $\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}$ 在 $[0,+\infty)$ 非负,故只需证级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛.为此,先估计

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{(k+1)\pi}{1+(k\pi)^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{k\pi}^{k\pi+\pi/2} \frac{(k+1)\pi \mathrm{d}(\tan x)}{1+[(k\pi)^6+1]\tan^2 x}$$

$$+ \int_{k\pi+\pi/2}^{(k+1)\pi} \frac{(k+1)\pi \mathrm{d}(\tan x)}{1+[(k\pi)^6+1]\tan^2 x}$$

$$= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6+1}}\left[\arctan(\sqrt{(k\pi)^6+1}\tan x)\right]\Bigg|_{k\pi}^{k\pi+\pi/2-0}$$

$$+ \arctan(\sqrt{(k\pi)^6+1}\tan x)\Bigg|_{k\pi+\pi/2+0}^{(k+1)\pi}$$

$$= \frac{(k+1)\pi}{\sqrt{(k\pi)^6+1}} \cdot \pi \leqslant \frac{(k+1)\pi^2}{(k\pi)^3} = \frac{2}{\pi k^2}.$$

而级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{x}{1+x^6\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 收敛. 从而原非正常积分收敛.

例 25 函数 $f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 单调有定义，且非正常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 存在，证明：

$$\lim_{h\to 0^+} h[f(h)+f(2h)+\cdots] = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

证 设 $f(x)$ 单调增加（$f(x)$ 单调减少类似可证或考虑 $-f(x)$），则 $\forall\ h>0$，有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{(k-1)h}^{kh} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} hf(kh)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x)\mathrm{d}x = \int_h^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

令 $h \to 0^+$，得

$$\lim_{h\to 0^+} h\sum_{k=1}^{+\infty} f(kh) = \lim_{h\to 0^+} \sum_{k=1}^{\infty} hf(kh) = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

例 26 利用例 25 计算

$$\lim_{t\to 1-0} (1-t)\left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots\right).$$

解 本例的关键是将级数的通项写为 $f(nh)$，然后说明 $f(x)$ 符合上例的条件.

$$\text{原式} = \lim_{t\to 1-0}(1-t)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \lim_{t\to 1-0}(1-\mathrm{e}^{\ln t})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{n\ln t}}{1+\mathrm{e}^{n\ln t}}$$

$$\xlongequal{\text{令} h=-\ln t} \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{-h}}{h}\cdot h\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nh}}{1+\mathrm{e}^{-nh}}$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{-h}}{h}\cdot\lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nh}}{1+\mathrm{e}^{-nh}}$$

$$= 1\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \ln 2,$$

其中 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$符合例 25 条件.

第三节 无穷乘积

主要内容

1. 对于一个给定的数列$\{f_n\}$ ($f_n\neq 0, n=1,2,\cdots$),称积式

$$f_1 f_2\cdots f_n\cdots = \prod_{n=1}^{\infty} f_n$$

为无穷乘积. 并定义部分乘积$\{P_m\}$:

$$P_m = f_1 f_2\cdots f_m = \prod_{n=1}^{m} f_n.$$

2. 当部分积数列$\{P_m\}$收敛于一个非零常数 P 时,称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛于 P, 即

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{m\to\infty} P_m = P.$$

否则称无穷乘积$\prod\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 发散. 发散包括:

(1) $P_m \to \infty$，记作 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n \to \infty$；

(2) P_m 摆动；

(3) $P_m \to 0$. 称 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 发散于零，记作 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n = 0$.

$$\pi_m = f_{m+1} f_{m+2} \cdots = \prod_{n=m+1}^{\infty} f_n$$

称为 m 项后的余项. 当 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛时，$\pi_m = \dfrac{P}{P_m}$.

3. 若 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛于 P，则

$$\begin{cases} \lim\limits_{m\to\infty} f_m = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P_m}{P_{m-1}} = \dfrac{P}{P} = 1, \\ \lim\limits_{m\to\infty} \pi_m = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{P}{P_{m-1}} = \dfrac{P}{P} = 1. \end{cases}$$

4. 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛的充要条件有

(1) 部分积数列 $\{P_m\}$ 是柯西数列，且存在常数 $k>0$，对一切 P_m，有 $|P_m| \geqslant k > 0$；

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N>0, \forall\ n>N$ 及 $k\geqslant 1$，有

$$|P_{n+k}/P_{n-1}| < \varepsilon.$$

5. 若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛，则称无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛但不绝对收敛的无穷乘积称为条件收敛.

疑 难 解 析

1. 无穷乘积与无穷级数有什么关系？

答 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 与无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ 都是由无穷数列 $\{f_n\}$

引出的，都有收敛和发散、绝对收敛与条件收敛等概念.

无穷乘积的收敛往往与某个无穷级数的收敛有关. 例如：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛（见例 10）；当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛时 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零（见例 11）.

方法、技巧与典型例题分析

无穷乘积的计算主要是证明等式，往往通过先求部分乘积 P_n，然后取 $n\to\infty$ 的极限得到. 其技巧表现为，求部分乘积时要借助一些已知公式与结果，使运算更为简捷. 无穷乘积的另一主要类型习题是研究无穷乘积的敛散性，这可以根据有关定义、命题并经一些转化求解，有一定的难度，因而要求读者熟悉概念和变换.

例 1 证明下列等式：

(1) $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$；　　(2) $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$；

(3) $\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$；　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}$.

证 (1)
$$P_n=\prod_{k=2}^{n}f_k=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{2},$$

故
$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

(2)
$$P_n=\prod_{k=2}^{n}f_k=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{3}.$$

故
$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.$$

(3) $P_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$,

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)P_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},$$

故
$$P_m=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1-1/2}=2,$$

即
$$\prod_{n=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2.$$

(4)
$$\begin{aligned}P_n&=\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2\sin(\pi/2^{n+1})}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\left(\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\\&=\cdots=\frac{\sin(\pi/2)}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}=\frac{2^{\pi/2^{n+1}}}{\sin(\pi/2^{n+1})}\cdot\frac{2}{\pi}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{2}{\pi}.$$

例 2 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$；　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$；

(3) $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}$；

(4) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$.

解 (1) 由瓦里士(Wallis)公式

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\pi,\\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

知
$$P_n=\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2(2n+2)}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!}\right]^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\pi}{4},$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 当 $x\neq 0$ 时，部分积

$$P_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin(x/2^n)}$$
$$=\frac{x/2^n}{\sin(x/2^n)}\cdot\frac{\sin x}{x}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\sin x}{x},$$

故
$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}\quad(x\neq 0).$$

(3) 由 $\sin x$ 的无穷乘积展开 $\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\pi^2}{n^2x^2}\right)$，令 $x=\frac{\pi}{2}$，有

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(3n)^2}\right]=\frac{\pi}{3}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2},$$

于是，有

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}=\frac{\pi/3}{\sin(\pi/3)}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 在题(1)中，令 $x=\pi/2$，利用半角公式，有

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\Big/2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\cdots,$$

得
$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots,$$

故
$$\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

例 3 设 $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ 收敛，讨论下列乘积的敛散性：

(1) $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$；　　(2) $\prod_{n=1}^{\infty}p_n^2$；

(3) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$;　　　　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n/q_n$.

解　设 $P=\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $Q=\prod_{n=1}^{\infty} q_n$, $P_n=\prod_{k=1}^{n} p_k$, $Q_n=\prod_{k=1}^{n} q_k$.

(1) 由无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛的必要条件 $\lim_{n\to\infty} f_n=1$ 知

$$\lim_{n\to\infty} p_n=1, \lim_{n\to\infty} q_n=1,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(p_n+q_n)=2.$$

故 $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ 不收敛.

(2) 因为 $\prod_{k=1}^{n} p_n^2=\left(\prod_{k=1}^{n} p_n\right)^2=P_n^2$,而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n=\lim_{n\to\infty} P_n=P$,故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2=\lim_{n\to\infty} P_n^2=P^2$,即 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛.

(3) 因为 $\prod_{k=1}^{n} p_k q_k=\prod_{k=1}^{n} p_k \prod_{k=1}^{n} q_k=P_n Q_n$,而 $\lim_{n\to\infty} P_n=P$, $\lim_{n\to\infty} Q_n=Q$, 故

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n=\lim_{n\to\infty} P_n \lim_{n\to\infty} Q_n=PQ,$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛.

(4) 因为 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n=Q\neq 0$,故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}=\frac{1}{Q}$. 由题(3)知

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}=\prod_{n=1}^{\infty} p_n\cdot\frac{1}{q_n}=\frac{P}{Q}.$$

例 4　证明: $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分积数列 $\{P_m\}$ 是柯西数列,且 $\exists\, h>0$,对全部 P_m,有 $|P_m|\geqslant h>0$.

证　**必要性**　若 $P_m\to P\neq 0$,则 $\forall\, \varepsilon>0$, $\exists\, N\in\mathbf{N}$,对一切 $n>N$,有 $|P_m-P|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=|P|/2$,则 $|P_n|>|P|/2$,于是,对全部 P_m,有

$$|P_m| \geqslant \min\{|P_1|, |P_2|, \cdots, |P_N|, |P|/2\} = h > 0.$$

充分性 若$|P_m| \geqslant h > 0$,则

$$|P| = \lim_{m\to\infty} |P_m| \geqslant k > 0,$$

从而 $P \neq 0$.

例 5 证明:$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbf{N}$,对一切 $n > N$ 和 $k \geqslant 1$,有 $|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$.

证 **必要性** 若 $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛,则$\{P_m\}$为柯西数列,且有 $|P_m| \geqslant h > 0$(见例 4). 于是 $|P_{n+k} - P_n| < h\varepsilon \Rightarrow |P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$.

充分性 若$|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon$,则取 $\varepsilon = 1/2$,有

$$|P_n/P_N - 1| < 1/2\ (n > N).$$

于是

$$|P_N|/2 < |P_n| < 3|P_N|/2,$$

故$\forall\ P_m$,有

$$|P_m| \geqslant \min\{|P_1|, |P_2|, \cdots, |P_{N-1}|, |P_N|/2\} = h > 0.$$

又

$$|P_m| \leqslant \max\{|P_1|, |P_2|, \cdots, |P_{N-1}|, 3|P_N|/2\} = M.$$

在式中取$|P_{n+k}/P_n - 1| < \varepsilon/M\ (n > N)$,得出$|P_{n+k} - P_n| < \varepsilon$,即$\{P_m\}$是柯西数列,且 $|P_m| \geqslant h > 0$,由例 4 知,$\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ 收敛.

例 6 证明:若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 有相同的敛散性.

证 因为对一切 $a_n > 0$ 和 $1 + a_n < e^{a_n}$,有

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$< (1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) < e^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n},$$

即

$$1 + S_m < P_m < e^{S_m}.$$

这里 S_m 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和,P_m 是 $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ 的部分积.

由于单调有界数列必有极限,且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数,故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与

$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 有相同的敛散性.

例 7 证明:若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛,则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

证 设 $P_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)$,$Q_m=\prod_{n=1}^{m}(1+|a_n|)$,则

$$\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right|=|(1+a_{n+1})(1+a_{n+2})\cdots(1+a_{n+k})-1|$$

$$=\left|\sum_{l=n+1}^{n+k}a_l+(a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}a_{n+3}+\cdots+a_{n+k-1}a_{n+k})\right.$$
$$\left.+\cdots+a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{l=n+1}^{n+k}|a_l|+(|a_{n+1}||a_{n+2}|+|a_{n+1}||a_{n+3}|+\cdots\right.$$
$$\left.+|a_{n+1}||a_{n+k}|)+\cdots+|a_{n+1}||a_{n+2}|\cdots|a_{n+k}|\right|$$

$$=\left|\prod_{l=n+1}^{n+k}(1+|a_l|)-1\right|=\left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n}-1\right|$$

所以,比较 $\left|\frac{P_{n+k}}{P_n}-1\right|$ 与 $\left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n}-1\right|$ 可知:若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛,则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

故由例6可得:若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 也绝对收敛,反之也成立.

例 8 证明:设 $0\leqslant a_n<1$,则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的敛散性,且若 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散,则必发散于零.

证 设 $P_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)$,$Q_n=\prod_{n=1}^{m}(1-a_n)$,由题设知,$P_m$ 单调增加,Q_m 单调减少,且均为正.

设 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 收敛，则 $Q_m \to Q > 0$，又 $1 > a_n \geqslant 0$，故 $1 + a_n \leqslant \frac{1}{1-a_n}$，

有
$$P_m = \prod_{n=1}^{m}(1+a_n) < \left|\prod_{n=1}^{m}(1-a_n)\right|^{-1} = \frac{1}{Q_m} \leqslant \frac{1}{Q},$$

即 $\{P_m\}$ 有界，故 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

又设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $a_n \to 0$. 不妨设 $a_n < \frac{1}{2}$，有

$$(1-a_n)(1+2a_n) = 1 + a_n - 2a_n^2 = 1 + a_n(1-2a_n) > 1.$$

故有 $1 - a_n > \frac{1}{1+2a_n}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}2a_n$ 也收敛，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+2a_n)$ 收敛，设收敛于 R $(R > 0)$. 又设 $R_m = \prod_{n=1}^{m}(1+2a_n)$，则对一切 $m > N$，有

$$\frac{Q_m}{Q_N} = \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) > \left[\prod_{n=N+1}^{m}(1+2a_n)\right]^{-1} = \frac{R_N}{R_m} \geqslant \frac{R_N}{R},$$

即 $Q_m > \frac{R_N Q_N}{R} > 0$. Q_m 单调减少且有下界，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 收敛.

综上所述知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有相同的敛散性.

而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散，由例 6 知 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 也发散，且 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \to \infty$. 故 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbf{N}, \forall\, m > N$，有 $\prod_{n=N+1}^{m}(1+a_n) > \frac{1}{\varepsilon}$，使得

$$0 < \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) < \left[\prod_{n=N+1}^{m}(1+a_n)\right]^{-1} < \varepsilon,$$

从而
$$Q_m = Q_N \cdot \prod_{n=N+1}^{m}(1-a_n) < Q_N \cdot \varepsilon \xrightarrow{m\to\infty} 0,$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散.

由本例可知，对于 $0 \leqslant a_n < 1$ 的情形，正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 有相同的敛散性，且 $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ 发散于零，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于无穷大.

例 9　设 $a_m > -1$，证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 有相同的敛散性，且对 $P=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 有 $P=\mathrm{e}^S$（或 $S=\ln P$）.

证　设 $P_m=\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)$，$S_m=\sum_{n=1}^{m}\ln(1+a_n)$，则

$$P_m=\mathrm{e}^{S_m} \quad \text{或} \quad S_m=\ln P_m,$$

可知，等式两边有相同的敛散性. 在收敛时，对等式两边取 $m\to\infty$ 的极限，即得

$$P=\lim_{m\to\infty}P_m=\mathrm{e}^{\lim\limits_{m\to\infty}S_m}=\mathrm{e}^S(\text{或 } S=\ln P),$$

还可写作
$$\ln\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n).$$

例 10　证明：$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛.

证　由例 9 知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 有相同的敛散性. 现证 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 有相同的敛散性. 因为，当 $a_n \geqslant 0$ 时，有

$$\ln(1+|a_n|)=\ln(1+a_n)=|\ln(1+a_n)|;$$

当 $a_n<0$ 时，有 $1-|a_n|<1/(1+|a_n|)$. 而

$$\ln(1+a_n)=\ln(1-|a_n|)<-\ln(1+|a_n|).$$

所以 $$|\ln(1+a_n)|>\ln(1+|a_n|).$$

故当 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 收敛.

反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+|a_n|)$ 收敛，则 $\ln(1+|a_n|)\to 0$，即 $1+|a_n|\to 1$，$a_n\to 0$. 如例 8，设 $|a_n|<1/2$，则

$$1+a_n=1-|a_n|>\frac{1}{1+2|a_n|}.$$

于是 $$\ln(1+a_n)>-\ln(1+2|a_n|),$$

从而 $$|\ln(1+a_n)|<\ln(1+2|a_n|)\leqslant\ln(1+2|a_n|+|a_n|^2)$$
$$=2\ln(1+|a_n|),$$

知 $\sum_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 也收敛，即

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)\text{ 绝对收敛}\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)\text{ 绝对收敛}.$$

由本例与例 9 可知：无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 具有项的可交换性的充要条件是 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛等价于 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛，而级数绝对收敛具有项的可交换性，且交换后的级数和不变. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n')=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$，故

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n')=\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n')}=\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

从而知条件是充分必要的（$\{a_n'\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个重排）.

例 11 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收

敛；若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，则 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散，且发散于零.

证 因为 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\overset{\text{L}'}{=\!=}\frac{1}{2}$，由 $a_n\to 0$，故 $\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N_1$，有 $|\ln(1+a_n)-a_n|<ka_n^2(k>1/2)$. 于是

$$\left|\sum_{l=n}^{n+k}\ln(1+a_l)-\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|\leqslant\sum_{l=n}^{n+k}|\ln(1+a_l)-a_l|<k\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2.$$

当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛时，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N_2$ 及 $k\geqslant 0$，有

$$\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2<\frac{\varepsilon}{2k},\qquad\left|\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而，对 $n>\max\{N_1,N_2\}$，有

$$\left|\sum_{l=n}^{n+k}\ln(1+a_l)\right|\leqslant\left|\sum_{l=n}^{n+k}a_l\right|+k\sum_{l=n}^{n+k}a_l^2<\varepsilon,$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛，则依例 9 知，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散时，由第一个极限式可得 $a_n-\ln(1+a_n)>k_1a_n^2$ $(0<k_1<1/2)$. 于是，当 $n>N$ 时，有

$$\sum_{l=N}^{n}\ln(1+a_l)<\sum_{l=N}^{n}a_l-k_1\sum_{l=N}^{n}a_l^2.$$

显然，$\sum_{l=N}^{n}a_l$ 为有限数（因为 $\sum_{l=N}^{n}a_l$ 收敛），而 $\sum_{l=N}^{n}a_l^2$ 发散使得 $k_1\sum_{l=N}^{n}a_l^2\to\infty$，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_l)\to-\infty$，故 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散，而

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\ln\prod_{n=1}^{m}(1+a_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum_{n=1}^{m}\ln(1+a_n)}=\mathrm{e}^{-\infty}=0.$$

即 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散于零.

第八章　函数项级数与幂级数

第一节　一致收敛性

主要内容

一、函数列的一致收敛性

1. 定义在同一数集 E 上的一列函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n,\cdots$ 称为定义在 E 上的函数列，记作 $\{f_n\}$.

2. 若函数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛 $(x_0\in E)$，则称 $\{f_n\}$ 在 x_0 收敛，x_0 称为 $\{f_n\}$ 的收敛点. 若 $\{f_n\}$ 在数集 $D\subset E$ 上每一点都收敛，则称 $\{f_n\}$ 在数集 D 上收敛. $\{f_n(x)\}$ 称为 $\{f_n\}$ 的极限函数，记作

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in D \quad 或 \quad f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}f(x),\ x\in D.$$

使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点的集合称为函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域.

3. 设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 都定义在数集 D 上，若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使 $n>N$ 时，$\forall\ x\in D$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛于 f，记作

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\ (n\to\infty),\ x\in D.$$

4. 函数列一致收敛的柯西准则　函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上一致收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，对 $n,m>N$ 和一切 $x\in$

D，有 $|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

5. 函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0.$$

二、函数项级数的一致收敛性

1. 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义于数集 E 上的一个函数列，则表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),\ x\in E$$

称为 E 上的函数项级数.

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\ x\in E,\ n=1,2,\cdots$$

称为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列.

2. 若 $x_0\in E$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛，则称 x_0 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛点. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数值 $D\subset E$ 上每一点收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上收敛. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的全体收敛点的集合称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的收敛域.

对 $x\in D$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和 $S(x)$ 是定义在 D 上的一个函数，称为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数. 记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x),\quad 即\quad \lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

3. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在数集 D 一致收敛于函数 $S(x)$，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$.

4. 函数项级数收敛的柯西准则　函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在数集$D$上一致收敛的充要条件是:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使$n>N$时,$\forall\ x\in D$和$p\in\mathbf{N}$,有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon.$$

当$p=1$时,即得函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在数集$D$上一致收敛的必要条件:函数列$\{u_n(x)\}$在$D$上一致收敛于零.

5. 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在数集$D$上一致收敛于$S(x)$的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0,$$

其中$R_n(x)=S(x)-S_n(x)$称为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的余项.

6. 维尔斯特拉斯判别法　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$为数集$D$上的函数项级数,$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$是收敛的正项级数.若对一切$x\in D$,有

$$|u_n(x)|\leqslant M_n,\ n=1,2,\cdots,$$

则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$D$上一致收敛.维尔斯特拉斯判别法又称为M判别法或优级数法,$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的优级数.

7. 阿贝尔判别法　设(1)$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在数集$D$上一致收敛;(2)$\forall\ x\in D$,$|v_n(x)|$单调;(3)$|v_n(x)|$在$D$上一致有界,即存在正数$M$,对一切$x\in D$和一切正整数$n$,有$|v_n(x)|<M$,则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在$D$上一致收敛.

8. 狄利克雷判别法　设(1)$\sum_{i=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列 $\left\{\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right\}$ 在 D 上一致有界；(2)$\forall\ x\in D$，$\{v_n(x)\}$ 单调；(3) $|v_n(x)|$ 在 D 上一致收敛于零，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

疑难解析

1. 为什么要研究函数列的一致收敛性？怎样理解函数列在 D 上的一致收敛性？

答　研究函数列，不仅要讨论其在某点的敛散性，更重要的是要研究函数列的极限函数的解析性质. 如由 f_n 的连续性判断 $f(x)$ 的连续性；研究 $f(x)$ 的导数与积分同 f_n 的导数与积分的关系. 这就要求讨论函数列 $\{f_n\}$ 在数集 D 上的一致收敛性.

函数列 $\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛时，$\forall\ \varepsilon>0, x\in D$，总 $\exists\ N(\varepsilon)$（即 N 只与 ε 有关，与 x 无关），只要 $n>N$，即有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

从而知，$\{f_n\}$ 在 D 上一致收敛，则必在 D 上每一点收敛. 反之不一定成立. 例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛. 因为，当 $n\to\infty$ 时，有

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)x^k\to S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

所以级数收敛. 但是和函数 $S(x)$ 不连续，说明级数在 $[0,1]$ 上不一致连续.

函数列 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f，从几何意义上可以理解为：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，曲线 $y=f_n(x)$ 不都落在以曲线 $y=$

$f(x)+\varepsilon$ 和 $y=f(x)-\varepsilon$ 为边的带形区域内.

2. 判别函数项级数 $\sum u_n(x)$（或函数列 $\{f_n\}$）在 D 上不一致收敛的方法有哪些？

答 函数项级数是将数项级数 $\sum u_n$ 的通项 u_n 换成定义在 D 上的函数 $u_n(x)$ 得到的，所以在通常意义下是逐点考虑的. 但函数项级数一致收敛的概念不再是作逐点考虑，而是在点集 D 上作整体考虑. 因此，常用的判别函数项级数 $\sum u_n(x)$（或函数列 $\{f_n\}$）在 D 上不一致收敛的方法有以下几种.

（1）不一致收敛定义　设 $\sum u_n(x)$ 在 D 上的部分和 $S_n(x)$ 收敛于 $S(x)$，若存在某 $\varepsilon_0>0$，$\forall N\in\mathbf{N}$，$\exists n_0>N$ 及 $x_{n_0}\in D$，使得

$$|S_n(x_{n_0})-S(x_{n_0})|\geqslant\varepsilon_0$$

成立，则级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛.

（2）柯西准则的逆否命题　$\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛的充要条件是：存在某 $\varepsilon_0>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists n,m>N$ 及 $x_0\in D$，使得

$$|S_n(x_0)-S_m(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

（3）和函数法　若 $\sum u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 在区间 $I=[a,b]$ 上连续，而和函数 $S(x)$ 在 I 上不连续，则 $\sum u_n(x)$ 在 I 上不一致连续.

（4）一般项法　若 $\sum u_n(x)$ 的一般项 $u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 D 上不一致连续.

（5）点列法　若存在点列 $\{x_n\}\in I$，且 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x$，但 $\{S_n(x_n)\}$ 不收敛于 $S(x)$，则 $\{S_n(x_n)\}$ 在 I 上不一致收敛.

方法、技巧与典型例题分析

一、函数列的收敛性与一致收敛性

函数列的收敛性是逐点考虑的. 当 x_0 给定时，函数列 $\{f_n(x_0)\}$ 是一个数列，可以用考察数列敛散性的方法来讨论. 当

$\{f_n(x)\}$在数集 D 上收敛时，就要讨论极限函数 $f(x)$. 函数列$\{f_n(x)\}$在数集 D 上的一致收敛性问题，就是要讨论$\forall\ \varepsilon>0$，是否有共同的 $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，使得 $n>N(\varepsilon)$时，$\forall\ x\in D$，有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 通常用充要条件来确定一致收敛性，而用疑难解析 2 中叙述的方法判定函数列$\{f_n(x)\}$在 D 上不一致收敛.

例 1 研究下列级数的敛散性，并求其和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n + \cdots\ (a \neq 0)$;

(2) $x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots$.

解 (1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}ax^n$ 是等比级数，已知当 $|x|<1$ 时级数收敛，$|x|>1$ 时级数发散，所以收敛域为$(-1,1)$.

在收敛域上，和函数为

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}ax^n = \frac{a}{1-x},\ x \in (-1,1).$$

(2)因为

$$S_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) = x^n,$$

所以，当$|x|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$;

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1$;

当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=(-1)^n$;

当$|x|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\pm\infty$.

故级数收敛域为$(-1,1]$. 在收敛域上，其和函数为

$$S(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

例 2 求下列级数的收敛域：

(1) $\sum n!x^n$; (2) $\sum nx^n$; (3) $\sum \frac{x^n}{n!}$.

解 利用数项级数达朗贝尔判别法.

(1) 对一切 $x_0\neq 0$，都有

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(n+1)!x_0^{(n+1)}}{n!x_0^n}\right| = (n+1)|x_0| \to \infty,$$

故仅当 $x=0$ 时，级数收敛.

(2) $\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \left|\frac{(n+1)x_0^{(n+1)}}{nx_0^n}\right| = \frac{n+1}{n}|x_0| \to |x_0|$,

所以，当 $0\leqslant x_0<1$ 时，级数收敛；当 $-1<x_0<0$ 时，级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，级数发散. 故级数收敛域为 $(-1,1)$.

(3) 对一切 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，有

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{|x_0^{n+1}|}{(n+1)!}\Big/\frac{|x_0^n|}{n!} = \frac{|x_0|}{n+1} \to 0,$$

所以，级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 3 设对于数列 $\{a_n\}$，有有限或无穷极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$. 证明：级数 $\sum a_n x^n$，$\sum a_n n x^n$，$\sum \frac{a_n}{n}x^n$ 有相同的收敛半径.

证 对点 $x=x_0$，有三个比值，即

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{n+1}{n}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

$$\left|\frac{f_{n+1}(x_0)}{f_n(x_0)}\right| = \frac{n}{n+1}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x_0| \to \rho|x_0|,$$

所以，当 $\rho=\infty$ 时，三级数收敛半径 $R=0$；当 $\rho=0$ 时，三级数收敛半径 $R=+\infty$；当 $0<\rho<\infty$ 时，三级数收敛半径 $R=1/\rho$. 即三个级数有相同的收敛半径.

例 4 确定下列函数列在指定区间上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=x^n e^{-n^2x}$, $n=1,2,\cdots,D=[0,+\infty)$；

(2) $f_n(x)=\frac{nx}{n^2+(n+2)x}$, $n=1,2,\cdots,D=(0,+\infty)$；

(3) $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n^2}$，在 $\mathbf{R}$ 上；

(4) $f_n(x)=\sin(x/n)$，在 $\mathbf{R}$ 上；

(5) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$，在下列区间上：(i) $[0,1-\delta]$；(ii) $[1-\delta,1+\delta]$；(iii) $[1+\delta,+\infty)$，其中 $0<\delta<1$.

解 (1)对任意 $x\in[0,+\infty)$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}x^n e^{-n^2x}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}x^n e^{-n^2x}\leqslant\lim_{n\to\infty}e^{-x}=0,$$

所以 $\{f_n(x)\}=\{x^n e^{-n^2x}\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 对任意 $x\in(0,+\infty)$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n^2+(n+2)x}=0.$$

取 $(0,+\infty)$ 上的自然数列 $x_n=n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot n}{n^2+(n+2)n}\right|=\frac{1}{2}>0.$$

所以 $\{f_n(x)\}=\left\{\dfrac{nx}{n^2+(n+2)x}\right\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

(3) $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+1/n^2}=|x|,$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sqrt{x^2+1/n^2}-|x|\right|=\frac{1/n^2}{\sqrt{x^2+1/n^2}+|x|}$$

$$\leqslant\frac{1/n^2}{1/n}=\frac{1}{n}<\varepsilon\ (\text{取 } N=[1/\varepsilon]),$$

所以，$\forall\ \varepsilon>0\ (\varepsilon<1)$，$\exists\ N=[1/\varepsilon]\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$，$x\in\mathbf{R}$，有 $\left|\sqrt{x^2+1/n^2}-|x|\right|<\varepsilon$. 故 $\{\sqrt{x^2+1/n^2}\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛.

(4) $\forall\ x\in\mathbf{R}$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin(x/n)=0,$$

且 $\exists\ \varepsilon_0=1/2>0$，$\forall\ N\in\mathbf{N}$，$\exists\ n_0>N$，$x_0=n_0\pi/2\in\mathbf{R}$，有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\sin\frac{n_0(\pi/2)}{n_0}\right|=\sin(\pi/2)=1>1/2.$$

所以 $\{\sin(x/n)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上不一致收敛.

(5) $\forall\, x\in[0,+\infty)$，有极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1/2, & x=1,\\ 1, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

(i) $\forall\, x\in[0,1-\delta)$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}\leqslant(1-\delta)^n\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[0,1-\delta)$上一致收敛.

(ii) $\forall\, x\in(1,1+\delta)$，有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{x^n}{1+x^n}-1\right|=\frac{1}{1+x^n},$$

故$\exists\ \varepsilon_0=1/4>0,\forall\ N\in\mathbf{N},\exists\ m>N$和$x_0=\sqrt[m]{2}\in(1,1+\delta)$，使得

$$|f_n(x_0)-f(x_0)|=\frac{1}{1+x_0^m}=\frac{1}{3}>\frac{1}{4},$$

从而知$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$(1,1+\delta)$内即$[1-\delta,1+\delta]$上不一致收敛.

(iii) $\forall\, x\in[1+\delta,+\infty)$，有

$$\sup\{|f_n(x)-f(x)|\}=\sup\left\{\frac{1}{1+x^n}\right\}\leqslant\frac{1}{1+(1+\delta)^n}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以$\left\{\frac{x^n}{1+x^n}\right\}$在$[1+\delta,+\infty)$上一致收敛.

例 5 α为何值时，函数序列

$$f_n(x)=\frac{x(\ln n)^\alpha}{n^x},\ n=2,3,4,\cdots$$

在$[0,+\infty)$上一致收敛?

解 因为$f'_n(x)=\frac{(\ln n)^{\alpha+1}}{n^x}\left(\frac{1}{\ln n}-x\right)$，故当$x<\frac{1}{\ln n}$时，$f_n(x)$单调增加；当$x>\frac{1}{\ln n}$时，$f_n(x)$单调减少，故在$x=\frac{1}{\ln n}$处$f_n(x)$取最大值. 从而，极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,$$

$$\sup|f_n(x)-f(x)|$$
$$=\max|f_n(x)|=f_n\left(\frac{1}{\ln n}\right)=\frac{1}{n^{1/\ln n}}(\ln n)^{\alpha-1}$$
$$=\frac{1}{e}(\ln n)^{\alpha-1}=\begin{cases}\not\to 0, & \alpha\geqslant 1,\\ \to 0, & \alpha<1\end{cases}\quad (n\to\infty),$$

故当且仅当 $\alpha<1$ 时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

本例是用放大法求解的. 一般地，放大法求得的是一致收敛的充分条件. 但本例中，$\alpha_n=\max|S_n(x)-S(x)|$，当 $n\to\infty$ 时 $\alpha_n\to 0$ 是充要条件.

例 6 设 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常可积，且

$$f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t,\ n=1,2,\cdots,$$

证明：函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零.

证 因为 $f_1(x)$ 在 $[a,b]$ 上正常可积，故在 $[a,b]$ 上有界，即 $\exists\ M>0$，使得 $|f_1(x)|\leqslant M\ (\forall\ x\in[a,b])$. 有

$$|f_2(x)|\leqslant\int_a^x|f_1(t)|\mathrm{d}t\leqslant M(x-a),$$

所以，通常有 $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{M(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$，则

$$|f_{n+1}(x)|\leqslant\int_a^x|f_n(t)|\mathrm{d}t=\frac{M}{(n-1)!}\int_a^x(t-a)^{n-1}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{M(x-a)^n}{n!}.$$

从而
$$|f_n(x)|\leqslant\frac{M(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

即对 $x\in[a,b]$，$\{f_n(x)\}$ 一致收敛于零.

例 7 讨论下列函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上的一致收敛性：

(1) $f_n(x)=\dfrac{ax}{1+n^2x^2}\ (a>0)$； (2) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

解 (1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{ax}{1+n^2x^2}=0$，且

$$f_n(x)=\frac{ax}{1+n^2x^2}=\frac{a}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{a}{2n},$$

故$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N=a/(2\varepsilon)$，当$n>N$时，$\forall\ x\in[0,1]$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

所以，$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于零.

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0$. 又由微分法可知，当$x=1/n$时，$f_n(x)$有最大值

$$\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=1/2.$$

所以，$f_n(x)$在$[0,1]$不一致收敛.

例 8 若函数列$\{f_n(x)\}$在开区间(a,b)内的任一闭区间上都一致收敛，那么$\{f_n(x)\}$在(a,b)内是否一致收敛？

解 不一定. 例如函数列$\{x_n\}$在$(0,1)$内是内闭一致收敛的，但在$(0,1)$内不一致收敛.

因为$\forall\ x\in(0,1),f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$，故$\forall\ [a,b]\subset(0,1)$. 有

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\max|x^n|=\lim_{n\to\infty}b^n=0,$$

即$\{x^n\}$在$[a,b]\subset(0,1)$内一致收敛. 但在$(0,1)$内有

$$\lim_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup|x^n|=\lim_{n\to\infty}1\neq0,$$

即$\{x^n\}$在$(0,1)$内不一致收敛.

例 9 证明：在有限个开区间$I_i\ (i=1,2,\cdots,m)$上都一致收敛的函数列$\{f_n(x)\}$，在$\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$上也一致收敛. 但当$i$为无限时，$\{f_n(x)\}$在$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$上不一定一致收敛.

证 当i为有限时，由于$\{f_n(x)\}$在I_i上一致收敛，则$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_i\in\mathbf{N}$，当$n>N_i$时，$\forall\ x\in I_i$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

取$N=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}$，则当$n>N$时，$\forall\ x\in\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

即$\{f_n(x)\}$，在$\bigcup\limits_{i=1}^{m}I_i$上一致收敛.

当i为无限时，例如函数列$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$I_i=(i-1,i+1)$ $(i=1,2,\cdots)$上极限函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}x=x$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I_i}\left|\frac{n+1}{n}x-x\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{i+1}{n}=0,$$

所以，$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$I_i$ $(i=1,2,\cdots)$上一致收敛. 但当取$x_n=n$时，有

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x_n)-f(x_n)|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\cdot n-n\right|=1>0,$$

故函数列$\left\{\frac{n+1}{n}x\right\}$在$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$上不一致收敛.

例 10 证明狄尼(Dini)定理 设函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上单调且收敛于连续函数$f(x)$，若$f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上连续，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛.

证 因为$\forall\ x\in[a,b]$，设$f_n(x)>f_{n+1}(x)$，令$\varphi_n(x)=f_n(x)-f_{n+1}(x)\geqslant 0$，则$\varphi_n(x)$在$[a,b]$上连续且单调减少，且$\forall\ x\in[a,b]$，$\varphi_n(x)\to 0$ $(n\to\infty)$.

设$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上不一致收敛于$f(x)$，则$\varphi_n(x)$不一致收敛于零. 即$\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\ m\in\mathbf{N}$，$\exists\ n_m>m$及$x_m\in[a,b]$，使得$\varphi_{n_m}(x_m)>\varepsilon_0$. 于是，得数列$\{n_m\}$和$\{x_m\}$ $(x_m\in[a,b])$. 由聚点定理，$\{x_m\}$至少有一聚点$x_0\in[a,b]$，且$\{x_n\}$有收敛于x_0的子列$\{x_{m_k}\}$：$x_{m_k}\to x_0$及$\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})>\varepsilon_0$ $(k\to\infty)$.

因为$\forall\ n\in\mathbf{N}$，$\exists\ k\in\mathbf{N}$，使得$n_{m_k}>m_k>k>n$，故$\forall\ x_{m_k}\in[a,b]$，有$\varphi_n(x_{m_k})\geqslant\varphi_{n_{m_k}}(x_{m_k})\geqslant\varepsilon_0$.

对任意n，考虑$\varphi_n(x)$的连续性，有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_n(x_{m_k})=\varphi_n(x_0)\geqslant\varepsilon_0$$

与已知$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=0$矛盾. 故由反证法确认$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一

致收敛. 狄尼定理对函数项级数 $\sum u_n(x)$ 也成立.

例 11 利用狄尼定理证明: 在$[0,1]$上, 函数列$\{(1+x/n)^n\}$一致收敛于 e^x, 并由此得出函数列$\{1/[e^{x/n}+(1+x/n)^n]\}$一致收敛.

证 因为 $f_n(x)=(1+x/n)^n$ 在$[0,1]$上单调增加并趋向于 e^x, 而 e^x 在$[0,1]$上连续, 由狄尼定理, $\{(1+x/n)^n\}$一致收敛于 e^x.

又
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1/[e^{x/n} + (1+x/n)^n]$$
$$= f(x) = 1/(1+e^x)$$

而
$$|f_n(x) - f(x)|$$
$$= \left|\frac{1+e^x - e^{x/n} - (1+x/n)^x}{[e^{x/n}+(1+x/n)^n](1+e^x)}\right|$$
$$\leqslant |e^x - (1+x/n)^n| + |e^{x/n} - 1|$$
$$\leqslant |e - (1+x/n)^n| + |e^{1/n} - 1| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

故$\{1/[e^{x/n}+(1+x/n)^n]\}$在$[0,1]$上一致收敛.

例 12 证明: 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 且 $f(1)=0$, 则函数列$\{g_n(x)\}=\{f(x)x^n\}$ $(n=1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛.

证 用分区间讨论法证明. 因为 $f(x)$在$[0,1]$上连续, 故$\exists\ M>1$, 使得$\forall\ x\in[0,1]$, $|f(x)|<M$; 由 $f(1)=0$ 知, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, 当 $1-\delta<x<1$ 时, 有$|f(x)|<\varepsilon$. 而当 $x\in[0,1-\delta]$时, 有
$$|g_n(x)| = |f(x)x^n| \leqslant M(1-\delta)^n.$$

又当 $x\in[1-\delta,1]$时, $|g_n(x)|<\varepsilon$. 不妨取正整数 $N>\ln(\varepsilon/M)\big/\ln(1-\delta)$, 则当 $n>N$ 时, 有 $|g_n(x)|<\varepsilon$. 所以$\{g_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛于零.

例 13 证明: 若函数列$\{f_n\}$在 $D\subset\mathbf{R}$ 上一致收敛于 f, 则$\{|f_n|\}$在 D 上一致收敛于$|f|$.

证 若$\{f_n\}$一致收敛于 f, 则$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, 当$n>N(\varepsilon)$时, $\forall\ x\in D$, 恒有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

因为$|f_n(x)|-|f(x)|\leqslant|f_n(x)-f(x)|$, 所以

$$\big||f_n(x)| - f(x)\big| < \big||f_n(x) - f(x)|\big|$$
$$= |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

于是，对定义在 $D\subset\mathbf{R}$ 上的函数列 $\{|f_n|\}$，存在函数 $|f|:D\to\mathbf{R}$，满足：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，恒有

$$\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| < \varepsilon,$$

即 $\{|f_n|\}$ 在 D 上一致收敛于 $|f|$.

例 14 证明：若 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 在 D 上分别一致收敛于 f 和 g，则 $\{f_n\pm g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f\pm g$.

证 由题设知，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N_1(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，有 $|f_n-f|<\varepsilon/2$；$\forall$ 同一 $\varepsilon>0$，$\exists\ N_2(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N_2(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，有 $|g_n-g|<\varepsilon/2$. 于是，关于 $\{f_n+g_n\}$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}\in\mathbf{N}$，，当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$\forall\ x\in D$，恒有

$$|(f_n+g_n)-(f+g)|$$
$$=|(f_n-f)+(g_n-g)|<|f_n-f|+|g_n-g|$$
$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

所以，$\{f_n+g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f+g$.

类似可证，$\{f_n-g_n\}$ 在 D 上一致收敛于 $f-g$.

二、函数项级数的收敛性与一致收敛性

函数项级数的收敛性与一致收敛性的讨论比函数列的要复杂一些，方法也更灵活. 特别是函数项级数一致收敛性判别，可以用定义、充要条件、柯西准则、M 判别法、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法及由此引出的其它方法. 使用这些方法时只有先认真验证条件，才能引用结论，防止出现错误. 而判定级数不一致收敛可以用疑难解析 2 中指出的方法.

例 15 确定下列级数的收敛域：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x}{(n^2-3n+2)^x}$；　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$.

解 (1)$u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x}{(n^2-3x+2)^x}$，讨论 x 的取值.

当 $x=0$ 时，级数显然收敛.

当 $x<0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)$ 不存在，级数是发散的.

当 $x>0$ 时，$|u_n(x)|\sim\dfrac{x}{n^{2x}}\ (n\to\infty)$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x/n^{2x}$ 当 $x>1/2$ 时收敛，当 $x\leqslant 1/2$ 时发散. 由比较审敛法的极限形式知，原级数在 $x>1/2$ 时绝对收敛. 在 $0<x<1/2$ 时不绝对收敛，但

$$|u_{n+1}(x)|-|u_n(x)|=\frac{x}{(n^2-n)^x}-\frac{x}{(n^2-3n+2)^x}$$

$$=x\left[\frac{1}{(n^2-n)^x}-\frac{1}{(n^2-3n+2)^x}\right]<0,$$

且有 $|u_n(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0$. 故依莱布尼茨判别法知，原级数收敛.

(2) 因为 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\dfrac{1}{1+x^2}<1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内公比 $|q|<1$ 的等比级数，是收敛的. 从而原级数在 $(-\infty,+\infty)$ 内绝对收敛.

将 $S(x)$ 的项重组. 先对奇数项求和，得

$$-x^2\left[\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{(1+x^2)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^{2k+1}}+\cdots\right]$$

$$=-x^2\frac{1/(1+x^2)}{1-1/(1+x^2)^2}=\frac{-1-x^2}{2+x^2};$$

再对偶数项求和，得

$$x^2\left[\frac{1}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{(1+x^2)^4}+\cdots+\frac{1}{(1+x^2)^{2k}}+\cdots\right]$$

$$=x^2\frac{1/(1+x^2)^2}{1-1/(1+x^2)^2}=\frac{1}{2+x^2}.$$

于是，级数和函数 $S(x)=\dfrac{-1-x^2}{2+x^2}+\dfrac{1}{2+x^2}=-\dfrac{x^2}{2+x^2}$.

例 16 证明：对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^x}$，存在 $-\infty\leqslant r\leqslant+\infty$，使得当 $x<r$ 时级数发散，当 $x>r$ 时级数收敛.

证　先证:若对某 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛,则 $\forall\ x>\lambda$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 也收敛.

因为,当 $x>\lambda$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}\cdot\frac{1}{n^{x-\lambda}}$,且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 一致收敛,$\left\{\frac{1}{n^{x-\lambda}}\right\}$ 单调减少并趋向于零,故依阿贝尔判别法知,原级数在 $(\lambda,+\infty)$ 上一致收敛.

再证 r 的存在性.若 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 发散,则可取 $r=+\infty$(或 $-\infty$).

若有 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$,使得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_1}}$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_2}}$ 收敛,则知 $x_1<x_2$.令 E 为非空有界集,即

$$E=\left\{x\,\middle|\,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}\text{ 收敛}\right\},$$

有 $r=\inf E$ 存在.因为 $\{x_n\}\subset E$,使对每一 $x_n>r$,且 $n\to\infty$ 时 $x_n\to r$.

若 $x>r$,则 $\exists\ x_N\in E$,使得 $x>x_N>r$,从而知 $x\in E$,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛.若 $x<r$,则因为 $r=\inf E$,从而知 $x\overline{\in}E$,即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 发散.

例 17　确定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\frac{x}{1+x^2}+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{x}{1+n^2x^2}-\frac{x}{1+(n-1)^{2x^2}}\right]$, $[0,1]$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sin^2x}$, $(-\infty,+\infty)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, $(-\infty,+\infty)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$，$[-1,1]$；

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}$，$(0,+\infty)$.

解 (1) 因为 $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x}$，$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$，所以，在$[0,1]$上级数处处收敛于零. 又由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{x}{1+n^2x^2}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2nx}{1+n^2x^2}\leqslant\frac{1}{2n},$$

故$\forall\ \varepsilon>0$，只要取 $N=[1/(2\varepsilon)]$，则当 $n>N$ 时，$\forall\ x\in[0,1]$，恒有 $|S_n(x)-0|\leqslant 1/(2n)<\varepsilon$. 故依定义，级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) 因为 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$，原级数满足莱布尼茨条件，故在$(-\infty,+\infty)$上收敛.

又
$$|R_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{\sin x+k}\right|$$
$$<\frac{1}{n+\sin^2x}<\frac{1}{n+1},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|R_n(x)|=0,$$

故原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

但是，$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin^2x}\right|\Big/\frac{1}{n}=1$，因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n+\sin^2x}\right|$ 发散，原级数条件收敛.

(3) 因为 $\forall\ x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $n\in\mathbf{N}$，不等式 $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}$ 恒成立，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛. 故依 M 判别法知，原级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(4) 因为 $\forall\ x\in[-1,1]$，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(x-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|S_n(x)-S(x)|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\frac{|x|^{n+1}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,

故原级数在$[-1,1]$上一致收敛.

(5) 因为$\frac{1}{1+n^2x}<\frac{1}{n^2x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{n^2}$. 当 x 值取定时,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x}$在$(0,+\infty)$内处处收敛. 但是,仅当 $n>[1/\sqrt{x\varepsilon}]$时

$$\left|\frac{1}{1+n^2x}-0\right|<\left|\frac{1}{n^2x}\right|<\varepsilon,$$

从而 N 与 ε 和 x 都有关,故原级数在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

例 18 确定下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\frac{1}{1+x}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$, $x\in[0,1]$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,2^{-nx}$,

(i) $x\in(\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$; (ii) $x\in(0,+\infty)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$, $x\in[-\delta,\delta]$ $(\delta>0)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n\sin^k n\theta$, $0<t<1$ 及 $k\geqslant 0$, $(-\infty,+\infty)$.

解 (1)$\forall\ x\in[0,1]$,$\frac{1}{1+x}$是确定的值. 对级数部分,因为

$$|u_n|=\left|\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}\right|<\frac{1}{n(n-1)}<\frac{1}{(n-1)^2},$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2}$收敛,故依 M 判别法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$一致收敛. 于是,原级数在$[0,1]$上一致收敛.

(2) (i) $\forall\ x\in[\delta,+\infty)$ 和 $n\in\mathbf{N}$,有

$$|u_n(x)|=\sqrt{n}\,2^{-nx}\leqslant\sqrt{n}\,2^{-n\delta}.$$

记 $M_n=\sqrt{n}\,2^{-n\delta}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_{m+1}}{M_m}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}2^{-\delta}=2^{-\delta}<1.$$

由比值法知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛，又由 M 判别法知，原级数在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

(ii) 在 $(0,+\infty)$ 上，因为 $\{\sqrt{n}\,2^{-nx}\}$ 当 $\varepsilon_0=1/2$ 时，若取 $x_n=1/n\in(0,+\infty)$，则有

$$|u_n(x)|=\sqrt{n}\,2^{-n\cdot 1/n}=\sqrt{n}/2>1/2=\varepsilon_0,$$

从而知 $\{u_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛于零，故原级数在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

(3) 因为，在 $[-\delta,\delta]$ 上有

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right|=\left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right|<2\left(\frac{x}{2n}\right)^2\leqslant\frac{\delta^2}{2n^2},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 在 $[-\delta,\delta]$ $(\delta>0)$ 上一致收敛.

(4) 因为 $S_m(\theta)=\sum_{n=1}^{m}t^m\sin^k n\theta$，则当 $m>n$ 时，有

$$\begin{aligned}&|S_m(\theta)-S_n(\theta)|\\&=|t^{n+1}\sin^k(n+1)\theta+t^{n+2}\sin^k(n+2)\theta+\cdots+t^m\sin^k m\theta|\\&\leqslant t^{n+1}|\sin^k(n+1)\theta|+t^{n+2}|\sin^k(n+2)\theta|+\cdots+t^m|\sin^k m\theta|\\&\leqslant t^{n+1}+t^{n+2}+\cdots+t^m.\end{aligned}$$

由题设 $0<t<1$，故 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n$ 收敛，其部分和数列为柯西数列. 故 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N\in\mathbf{N}$，$\forall\,m>n>N$，恒有

$$\left|\sum_{k=0}^{m}t^k-\sum_{k=0}^{n}t^k\right|=t^{n+1}+t^{n+2}+\cdots+t^m<\varepsilon,$$

所以 $$|S_m(\theta)-S_n(\theta)|<\varepsilon.$$

其中 N 与 θ 无关，从而知 $\sum_{n=1}^{\infty}t^n\sin^k n\theta$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

例 19 证明：若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在区间$I$上一致收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$也在$I$上一致收敛. 反之，是否成立？

证 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$在$I$上一致收敛，则依柯西准则，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$和$p\in\mathbf{N}$，$\forall\ x\in I$，有$\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon$，即

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)|<\varepsilon.$$

从而，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$在$I$上一致收敛.

反之，不一定成立. 如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛. 可用分区间法证明：因为

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(1-x)x^k=(1-x)\sum_{n=1}^{n}(-x)^k$$
$$=-\frac{x(1-x)[1-(-x)^n]}{1+x},$$

在$[0,1)$上， $S(x)=\lim S_n(x)=-\dfrac{x(1-x)}{1+x}.$

当$x=1$时，上式也成立，即$S(x)=-\dfrac{x(1-x)}{1+x}$，$x\in[0,1]$.

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\frac{(1-x)(-x)^{n+1}}{1+x}\right|\leqslant(1-x)x^{n+1}.$$

$\forall\ x\in[1-\varepsilon,1]\ (\varepsilon>0)$，$\forall\ n\in\mathbf{N}$，有

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant1-x\leqslant\varepsilon.$$

$\forall\ x\in[0,1-\varepsilon]$，要使

$$|S(x)-S_n(x)|\leqslant(1-x)x^{n+1}\leqslant x^{n+1}\leqslant(1-\varepsilon)^{n+1}<\varepsilon$$

成立，须有$n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}-1$. 故当取$N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln(1+\varepsilon)}-1\right]$时上

述不等式成立. 从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在两区间上都一致收敛，即在$[0,1]$上一致收敛.

但 $$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^n(1-x)x^n|=\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n,$$

有 $$S_n(x)=1-x^n\quad(x\neq 1),$$

故 $$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ 1, & 0\leqslant x<1,\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0=1/3>0$，则$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\exists\ n_0>N$，$\exists\ x_0=1-1/n_0\in[0,1)$，使得

$$|S(x_0)-S_n(x_0)|=(1-1/n_0)^{n_0}>1/3.$$

这里$\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/n)^n=1/\mathrm{e}>1/3$，所以，当$n_0$充分大时上式成立.

即$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上不一致收敛.

例 20 证明：若函数列$\{a_n\}$单调且收敛于零，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$在$[a,2\pi-a]$ $(0<a<\pi)$上一致收敛，并由此得出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛.

证 设$u_n(x)=\cos nx$，$v_n(x)=a_n$，当$x\in[a,2\pi-a]$时，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right|=\left|\frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2\sin(x/2)}+\frac{1}{2},$$

即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的部分和一致有界，而$v_n(x)$单调且一致趋向于零，依狄利克雷判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛.

当$a_n=\dfrac{1}{n}$时，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\cos nx$在$[a,2\pi-a]$上一致收敛. 但$a\neq 0$，因为$\dfrac{1}{n}\cos nx$在$[0,2\pi]$上连续，但当$x=0$时，级数成为

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，是发散的，故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx$在$(0,\beta)$ $(0<\beta<2\pi)$内不一致收敛，即在$[0,2\pi]$上不一致收敛.

例 21　证明：函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$在$[0,+\infty)$上一致收敛的充要条件是$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

证　设$u_n(x)=a_n\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$.

充分性　由分部积分法，积分 n 次得

$$u_n(x)=a_n[1-(1+x+x^2/2+\cdots+x^n/n)e^{-x}].$$

令　$$b_n(x)=1-(1+x+x^2/2+\cdots+x^n/n)e^{-x},$$

则$b_n(x)$在$[0,+\infty)$上单调减少并一致有界. 由阿贝尔判别法知，当$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时，原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

必要性　设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[0,+\infty)$上一致收敛. 依柯西准则，$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N}$，当$m>n>N$时，$\forall\ x>0$，有$\left|\sum_{k=n}^{m}u_k(x)\right|<\varepsilon$. 令$x\to+\infty$，考虑$u_n(x)\to a_n$，得$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\right|<\varepsilon$. 所以$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

例 22　证明：若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且函数$\varphi(x)$在$[a,b]$上有界，则函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\varphi(x)$在$[a,b]$上也一致收敛.

证　由柯西准则，若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N\in\mathbf{N},\forall\ n>N$和$p\in\mathbf{N},\forall\ x\in[a,b]$，有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_n(x)\right|<\varepsilon$. 又对$\varphi(x)$，$\exists\ M>0,\forall\ x\in[a,b]$，有$|\varphi(x)|<M$. 于是，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\varphi(x)\right| = |\varphi(x)|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| < M\varepsilon,$$

从而知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例 23 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}[au_n(x)+bv_n(x)]$ 在区间 I 上也一致收敛(a,b 为常数).

证 依题设，由柯西准则，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，$\forall\ n>N$ 和 $p\in\mathbf{N}$，$\forall\ x\in I$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x)\right| < \varepsilon.$$

从而得

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}[au_n(x)+bv_n(x)]\right| \\
&= \left|a\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) + b\sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x)\right| \\
&= |a|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| + |b|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_n(x)\right| \\
&< |a|\varepsilon + |b|\varepsilon = (|a|+|b|)\varepsilon,
\end{aligned}$$

即知 $\sum_{n=1}^{n}[au_n(x)+bv_n(x)]$ 在 I 上一致收敛.

例 24 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛. 则适当加括号后的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a,b) 内绝对一致收敛.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 内在 (a,b) 的和函数为 $S(x)$，则对 $\varepsilon=1/2$，$\exists\ N_1\in\mathbf{N}$，当 $m>N_1$ 时，$\forall\ x\in(a,b)$，有 $\left|\sum_{k=N_1+1}^{m} u_k(x)\right| < 1/2$.

$\forall\ \varepsilon = 1/2^2, \exists\ N_2 \in \mathbf{N}$，当 $m > N_2$ 时，$\forall\ x \in (a,b)$，有 $\left|\sum_{k=N_2+1}^{m} u_k(x)\right| < 1/2^2, 1/2^3, \cdots$. 对 $\varepsilon = 1/2^n, \exists\ N_n \in \mathbf{N}$，当 $m > N_n$ 时，$\forall\ x \in (a,b)$，有 $\left|\sum_{k=N_n+1}^{m} u_k(x)\right| < 1/2^n$.

令 $v_1(x) = \sum_{k=1}^{N_2} u_k(x), \cdots, v_n(x) = \sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} u_k(x)\ (n = 2,3,\cdots)$，则 $|v_n(x)| < 1/2^n$. 当 $m > n$ 时，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k(x)\right| < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^n},$$

故$\forall\ \in > 0$，当 n 充分大时，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} v_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |v_k(x)| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

依柯西准则，$\sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x)|$ 在 (a,b) 内一致收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 (a,b) 内绝对一致收敛.

例 25 证明：若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在区间 I 上一致收敛，函数列 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界，则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛.

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 I 上一致收敛，依柯西准则，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N \in \mathbf{N}, \forall\ n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}, \exists\ x \in I$，有

$$|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

又 $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界，即$\exists\ M > 0, \forall\ n \in \mathbf{N}, \forall\ x \in I$，有 $|u_n(x)| \leqslant M$，所以

$$|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + u_{n+2}(x)v_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)|$$
$$\leqslant |u_{n+1}(x)|\,|v_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|\,|v_{n+p}(x)|$$

$$\leqslant (|u_{n+1}(x)| + |u_{n+2}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)|)M \leqslant M\varepsilon,$$

故函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$在 I 上一致收敛.

例 26 证明:若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛,则函数列$\{u_n(x)\}$在 I 上一致收敛于零. 反之是否成立?试举例说明.

证 因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛,依柯西准则,$\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ N \in \mathbf{N}$,$\forall\ n > N$ 和 $p \in \mathbf{N}$,$\forall\ x \in I$,有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

当取 $p=1$ 时,即$|u_{n+1}(x)| < \varepsilon$,知$\{u_n(x)\}$在 I 上一致收敛于零.

反之不一定成立. 例如,函数列$\{x^n/n\}$在$(0,1)$内一致收敛于零. 因为,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N=[1/\varepsilon]\in\mathbf{N}$,$\forall\ n>N$,$\forall\ x\in(0,1)$,有

$$|x^n/n - 0| = |x|^n/n < 1/n < \varepsilon,$$

所以$\{x^n/n\}$在$(0,1)$一致收敛于零.

但$\forall\ \varepsilon_0 = 1/5 > 0$,$\forall\ N \in \mathbf{N}$,$\exists\ m > n$ 和 $p_0 = m \in \mathbf{N}$,$\exists\ x_0 = 1/\sqrt[2m]{2} \in (0,1)$,使得

$$\left|\frac{x_0^{m+1}}{m+1} + \frac{x_0^{m+2}}{m+2} + \cdots + \frac{x_0^{2m}}{2m}\right|$$
$$\geqslant m \cdot \frac{x_0^{2m}}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > \frac{1}{5} = \varepsilon_0.$$

从而,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在$(0,1)$ 内不一致收敛.

从本例可以认识到:函数列$\{u_n(x)\}$在区间 I 上一致收敛于零只是函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的必要条件,而不是充分条件.

第二节　一致收敛的函数列与函数项级数的性质

主要内容

1. 若函数列$\{f_n\}$在区间I上一致收敛，且每一项都连续，则其极限函数$f(x)$在I上也连续.

2. 若函数列$\{f_n\}$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

3. 若$x_0\in[a,b]$为定义在$[a,b]$上的函数列$\{f_n\}$的收敛点，$\{f_n\}$的每一项在$[a,b]$上有连续的导数，且$\{f_n'\}$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x).$$

4. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则其和函数在$[a,b]$上也连续. 即

$$\sum\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum u_n(x)\right).$$

5. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且每一项都连续，则$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x$

6. 若函数项级数$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上每一项都有连续导函数，$x_0\in[a,b]$为$\sum u_n(x)$的收敛点，且$\sum u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\sum\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum u_n(x)\mathrm{d}x.$$

疑难解析

1. 为什么说和函数的三个性质(连续性、可导性与可积性)关于一致收敛的条件是充分的但不是必要的?

答　设有函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right)$,其部分和$S_n(x)=\frac{n}{1+n^2x^2}$,在$[0,1]$上和函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}=0.$$

因为,当取$\{x_n\}=\{1/n\}\subset(0,1)$时,有

$$\lim_{n\to\infty}|S_n(1/n)-S(1/n)|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 1/n}{1+n^2\cdot 1/n^2}=\frac{1}{2}>0.$$

因此知此函数项级数在$[0,1]$上不一致收敛.

但此函数项级数各项显然在$[0,1]$上连续,且

(1) $\forall\ x_0\in[0,1]$,有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x),\quad 即\quad 0=0.$$

(2) $\int_0^1[\lim_{n\to\infty}S_n(x)]\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x$,即

$$0=\int_0^1 0\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0.$$

(3) 易证,此级数各项导数组成的级数在$(0,1)$内不一致收敛,但$\forall\ x\in(0,1)$,有

$$0=S'(x)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2}\right)\right]'$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x^2}{1+(n-1)^2x^2}\right]'$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{k-k^2x^2}{(1+k^2x^2)^2}-\frac{(k-1)-(k-1)^2x^2}{[1+(k-1)^2x^2]}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}=0.$$

2. 若函数列$\{f_n(x)\}$中每个函数$f_n(x)$在任一$x\in(a,b)$都不连续，是否还会有$\{f_n(x)\}$在(a,b)内一致收敛于连续函数？

答 有.例如函数列$\{f_n(x)\}$.

$$f_n(x)=\begin{cases}1/n, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$$

显然，每个$f_n(x)$在$(-\infty,+\infty)$内任一点都不连续，其极限函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

显然是连续的，且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

即函数列$\{f_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛于连续函数.

由此可见，$\{f_n(x)\}$一致收敛与每个函数的连续性并无必然的联系.

方法、技巧与典型例题分析

利用本节的定理不只是能检验函数列或函数项级数是否满足定理中的关系式，更重要的是能由定理条件，在不求出极限函数或和函数的情况下，由函数列或函数项级数本身获得极限函数或和函数的解析性质.同时，在讨论问题时应注意到，定理中一致收敛的条件是充分的(见疑难解析1)，因此，有时要从更基本的定义来考虑问题.

例1 证明下列级数在$(-\infty,+\infty)$内不一致收敛，但其和函数却连续.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2x}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right\}$.

证 (1) 因为部分和

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\left\{\frac{nx^2}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$$

$$=\frac{x}{1+x^2}-\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x}\xrightarrow{m\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=S(x),$$

$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是连续的. 由于余项

$$r_m(x)=S(x)-S_m(x)=\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)^3x^2}$$

由极值方法可求得，当$x_m=\frac{\pm 1}{(m+1)^{3/2}}$时，有极值

$$r_m(x_m)=\pm\frac{\sqrt{m+1}}{2}\xrightarrow{m\to\infty}\pm\infty,$$

所以级数在$x=0$的邻域内不一致收敛.

(2) $S_m(x)=\sum\limits_{n=1}^{m}\left\{nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right\}=mxe^{-mx^2}$,

当$x\neq 0$时，$x^2>0$，有$\lim\limits_{m\to\infty}S_m(x)=0$，即

$$S(x)=\lim_{m\to\infty}S_m(x)=0.$$

当$x=0$时，$S(0)=0$，所以和函数$S(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$上连续. 由于余项

$$r_m(x)=S(x)-S_m(x)=-mxe^{-mx^2}$$

由极值方法可求得，当$x_m=\pm\frac{1}{\sqrt{m}}$时，有极值

$$r_m(x)=\mp m\frac{1}{\sqrt{m}}e^{-1}=\mp\frac{\sqrt{m}}{e}\to\mp\infty,$$

所以级数在$x=0$的邻域内不一致收敛.

例 2 证明函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$在[0,1]上一致收敛，并讨论其和函数在[0,1]上的连续性、可积性与可导性.

证 对每一n，$u_n(x)$是[0,1]上单调增加函数，故

$$u_n(x) \leqslant u_n(1) = \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2),\ n=1,2,\cdots.$$

又当 $t>1$ 时，有 $\ln(1+t^2)<t$，故

$$u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^3}\ln(1+n^2) < \frac{1}{n^3}\cdot n = \frac{1}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\ln(1+n^2x^2)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

由于每一 $u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故由连续性与可积性定理知，级数的和函数在 $[0,1]$ 上连续且可积. 又

$$u_n'(x) = \frac{2x}{n(1+n^2x^2)} < \frac{2x}{n\cdot 2nx} = \frac{1}{n^2},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，依 M 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 上也一致收敛. 故依可导性定理知，$S(x)$ 在 $[0,1]$ 可导.

例 3 证明：级数 $\sum\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

证 对此类问题，可以先考虑开区间的一个内闭区间 $[c,d]$，再扩展到整个开区间.

令 $a_n(x)=\frac{1}{x^{n-1}}$，$b_n(x)=\frac{\ln(1+nx)}{nx}$. 在 $[a,+\infty)$ $(a>1)$ 上有 $\frac{1}{x^{n-1}}\leqslant\frac{1}{a^{n-1}}$，而 $\sum\frac{1}{a^{n-1}}$ 收敛，从而由 M 判别法知，$\sum\frac{1}{x^{n-1}}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 又由于

$$0 \leqslant \frac{\ln(1+nx)}{nx} \leqslant \frac{nx}{nx} = 1,$$

令 $y(t)=\frac{\ln(1+t)}{t}$，则

$$y'(t) = \frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} < \frac{t-(1-t)}{t^2(1+t)} < 0\ (t \geqslant 2).$$

所以 $\{b_n(x)\}$ 单调减少且一致有界 $(n \geqslant 2)$. 由阿贝尔判别法知，

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛. 而 $\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，依连续性定理知，级数 $\sum\frac{\ln(1+nx)}{nx^n}$ 的和函数 $S(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续. 由 a 的任意性可以得出：$S(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续.

例 4 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$，求 $\lim_{x\to 1}f(x)$.

解 因为 $x\to 1$，故讨论 $x=1$ 的邻域，不妨设 $x\in(0,2)$. $\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall x\in(0,2)$，有

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\frac{|x|^n}{3^n}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

当 $n=0$ 时，上式也成立. 而 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛，依 M 判别法知，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$ 在 $(0,2)$ 内一致收敛. 而级数每一项在 $(0,2)$ 内都连续，故依连续性定理知，$f(x)$ 在 $(0,2)$ 内连续，所以

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2=\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to 1}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n=\frac{3}{4}.$$

例 5 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n^2x}{1+n^3x^2}-\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^3x^2}\right\}$ 可以逐项积分；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\left\{nxe^{-nx^2}-(n-1)xe^{-(n-1)x^2}\right\}$ 不可以逐项积分.

证 (1) 由例 1 知，$S(x)=\frac{x}{1+x^2}$，则

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}.$$

$$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\frac{x}{1+x^2}-\frac{(m+1)^2x}{1+(m+1)x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}-\frac{1}{2(m+1)}\ln\frac{1+(m+1)^3b^2}{1+(m+1)^3a^2}$$

$$\xrightarrow{m\to\infty}\frac{1}{2}\ln\frac{1+b^2}{1+a^2},$$

即 $$\lim_{m\to\infty}\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b[\lim_{m\to\infty}S_m(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x.$$

由例 1 知，级数不一致收敛，但可积性成立.

(2) 由例 1 知，$S(x)=0$，故$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=0$，且

$$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x=\int_a^b mx\mathrm{e}^{-mx^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-ma^2}-\mathrm{e}^{-mb^2}).$$

当 $a=0,b\neq 0$ 时，$\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x\not\to 0$，即

$$\lim_{m\to\infty}\int_a^b S_m(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b[\lim_{m\to\infty}S_m(x)]\mathrm{d}x.$$

本例再次说明，级数一致收敛是逐项可积的充分条件而不是必要条件.

例 6 证明：黎曼函数（当 $p>1$ 时为 p 级数）

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在$(1,\infty)$内连续且无限次可导.

证 级数当 $x>1$ 时收敛，再来证级数一致收敛. 为此，只需证级数中各项导数组成的级数一致收敛.

因为$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$，所以当 n 足够大时，有

$$0<\frac{\ln n}{n^x}\leqslant\frac{\ln n}{n^a}=\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\cdot\frac{\ln n}{n^{(a-1)/2}}<\frac{1}{n^{(a+1)/2}}.$$

由于 $a>1$，即$\frac{a+1}{2}>1$，于是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{(a+1)/2}}$收敛，依 M 判别法知，$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\right)'$一致收敛. 即和函数$\zeta(x)$连续且逐项可导，且由 a 的任意性知，在$(1,\infty)$ 内有

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

以上讨论可以无限地进行下去，因而对任意正整数 k，连续的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$ 收敛且一致收敛，即各阶导数组成的级数一致收敛. 故 $\zeta(x)$ 无限次可导，且有

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}.$$

例 7 设贝塞尔(Bessel)函数

$$B_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \quad (x \neq 0),$$

证明：(1) $[x^m B_m(x)]' = x^m B_{m-1}(x)$；

(2) $[x^{-m} B_m(x)]' = -x^m B_{m+1}(x)$；

(3) $B'_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) - B_{m+1}(x)]$；

(4) $\frac{m}{x} B_m(x) = \frac{1}{2}[B_{m-1}(x) + B_{m+1}(x)]$.

证 因为数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!}$ 绝对收敛，所以对任何 N，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \left(\frac{N}{2}\right)^{m+2n}$ 也绝对收敛. 依 M 判别法知，贝塞尔函数 $B_m(x)$ 一致收敛，其各阶导数也一致收敛，故在 $(-\infty, +\infty)$ 内可以逐项积分或逐项可导.

(1) $$[x^m B_m(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2m+2n}}{2^{m+2n}}\right]'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2(m+n)}{(m+n)!n!2^{m+2n}} x^{2m+2n-1}$$

$$= x^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(m+n-1)!n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n-1} = x^m B_{m-1}(x).$$

(2) $$[x^{-m} B_m(x)]' = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(m+n)!n!} \cdot \frac{x^{2n}}{2^{m+2n}}\right]'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(m+n)!n!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2^{m+2n}}$$

$$=x^{-m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n+1-1)(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{(m+1)+2(n-1)}$$

$$=-x^{-m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(m+n+1)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+1+2n}=-x^{-m}B_{m+1}(x).$$

(3) 将题(1)、题(2)结果组合,得

$$\begin{cases}mx^{m-1}B_m(x)+x^mB_m'(x)=x^mB_{m-1}(x), & ①\\ -mx^{-m-1}B_m(x)+x^{-m}B_m'(x)=-x^{-m}B_{m+1}(x), & ②\end{cases}$$

式①、式②分别乘以 $x^{-(m-1)}$和 x^{m+1},得

$$\begin{cases}mB_m(x)+xB_m'(x)=xB_{m-1}(x), & ③\\ -mB_m(x)+xB_m'(x)=-xB_{m+1}(x). & ④\end{cases}$$

将式③、式④相加,得 $B'_m(x)=\frac{1}{2}[B_{m-1}(x)-B_{m+1}(x)]$.

(4) 将式③、式④相减,得

$$\frac{m}{x}B_m(x)=\frac{1}{2}[B_{m-1}(x)+B_{m+1}(x)].$$

例 8 证明:逐项可积性的条件可以为$\sum u_n(x)$一致收敛,$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$可积.

证 对$[a,b]$作分割 T,设 I_i 为 T 的第 i 个小区间,$\omega_i=\sup\limits_{x',x''\in I_i}|S(x')-S(x'')|$是 $S(x)$在$[a,b]$上的振幅. 由于$\sum u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛于 $S(x)$,所以$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得

$$|S_N(x')-S(x')|<\varepsilon/[3(b-a)],$$
$$|S_N(x'')-S(x'')|<\varepsilon/[3(b-a)].$$

又由 $S_N(x)=\sum\limits_{k=1}^{N}u_k(x)$ 在$[a,b]$上可积,故$\exists\ \delta>0$,当 $\|T\|<\delta$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(S_n)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3}.$$

其中 $\omega_i(S_n)$是 $S_n(x)$在 I_i 上的振幅. 于是,$\forall\ x',x''\in I_i$,有

$$\begin{aligned}|S(x')-S(x'')|&\leqslant|S(x')-S_N(x')|+|S_N(x')-S_N(x'')|\\&\quad+|S_N(x'')-S(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}+\omega_i(S_n)+\frac{\varepsilon}{3(b-a)}\\&=\frac{2\varepsilon}{3(b-a)}+\omega_i(S_n).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i&\leqslant\frac{2\varepsilon}{3(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(S_N)\Delta x_i\\&<\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $S(x)$ 在$[a,b]$上可积.

例 9 设$\{x_n\}\subset(0,1)$,且$\{x_n\}$中元素两两互不相等,讨论 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$ 在(0,1)内的连续性.

解 设 $f_n(x)=\dfrac{\operatorname{sgn}(x-x_n)}{2^n}$,则$|f_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{2^n}$. 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛,依 M 判别法知,$f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在(0,1)内一致收敛.

当 $x\neq x_i(i=1,2,\cdots)$ 时,$f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$一致收敛,故 $f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续. 当 $x=x_i$ 时,有

$$f(x)=f_k(x)+\sum_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x).$$

由于 $f_k(x)$ 在点 x_k 不连续,而 $\sum\limits_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x)$ 在点 x_k 连续(当 $n\neq k$ 时 $f_n(x)$ 连续,$\sum\limits_{n=1,n\neq k}^{\infty}f_n(x)$ 一致收敛),故点 $f(x)$ 在点 x_k 不连续. 由 x_k 的任意性知,$f(x)$ 在$\{x_n\}$的每一点不连续.

所以,$f(x)$ 在$(0,1)-\{x_n\}$上连续,在点集$\{x_n\}$上不连续.

例 10 设$f(x)=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\tan\frac{x}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}+\cdots$.

(1) 证明 $f(x)$在$[\pi/6,\pi/2]$上连续； (2) 计算$\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1)因为$\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\pi/6,\pi/2]$上连续，且

$$0<\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2^n}.$$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，依M判别法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$在$[\pi/6,\pi/2]$上一致收敛. 故 $f(x)$ 在$[\pi/6,\pi/2]$上连续.

(2) 由 $f(x)$ 在 $[\pi/6,\pi/2]$上一致收敛，且 $\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在$[\pi/6,\pi/2]$上连续，故

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}x=-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\ln\cos\frac{x}{2^n}\right]\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\bigg/\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right].$$

而
$$S_n=\ln\left[\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 6}\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 6}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\right)\bigg/\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2}\cos\frac{\pi}{2^2\cdot 2}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\right]$$

$$=\ln\left[\left(2^n\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\bigg/\left(2^n\sin\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\ln\left\{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right)\bigg/\frac{\pi}{2^n\cdot 2}\right]\left[\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\bigg/\sin\left(\frac{\pi}{2^n\cdot 6}\right)\right]\cdot\frac{6}{2}\right\}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\ln\frac{3}{2},$$

所以
$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}f(x)=\ln\frac{3}{2}.$$

例 11 证明：若函数 $f(x)$在 **R** 上有任意阶导函数，且函数列$\{f^{(n)}(x)\}$在 **R** 上一致收敛于 $\varphi(x)$，则 $\varphi(x)=Ce^x$ (C 为任意常

数).

证 因为$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有 $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

又$\{f^{(n)}(x)\}$满足定理条件,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$\varphi'(x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi(x),$$

即$\forall\ x\in\mathbf{R},\varphi'(x)=\varphi(x)$. 设 $F(x)=\varphi(x)e^{-x}$,$\forall\ x\in\mathbf{R}$,有

$$F'(x)=\varphi'(x)e^{-x}-\varphi(x)e^{-x}=[\varphi'(x)-\varphi(x)]e^{-x}=0,$$

从而,$\forall\ x\in\mathbf{R},F(x)=C$ (C 为常数). 故

$$\varphi(x)e^{-x}=C \quad 或 \quad \varphi(x)=Ce^{-x}.$$

例 12 验证:

(1) $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}[\cos(m!\,\pi x)]^{2n}=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q};\end{cases}$

(2) $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

证 (1) 当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,设 $x=p/q$,其中 $q\in\mathbf{N},p\in\mathbf{Z}$,当 $m\geqslant q$ 时,$m!p/q=k$ 是整数,有

$$\cos^{2n}(m!x\pi)=(\cos k\pi)^{2n}=1,$$

于是
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos(m!\ x\pi)^{2n}]=1.$$

当 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时,$m!\ x$总是无理数,有

$$|\cos(m!\pi x)|<1,$$

所以
$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos(m!x\pi)]^{2n}=0.$$

(2) 当 $x\in\mathbf{Q}$ 时,设 $x=p/q$,其中 $q<\mathbf{N},p\in\mathbf{Z}$. 当 $m\geqslant q$ 时,$m!\ p/q=k$是整数,$\forall\ n\in\mathbf{N}$,有

$$\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=\sin^2k\pi\cos^{2n}k\pi=0,$$

于是
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)=0.$$

当 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时,$m!\ \pi x$总是无理数,有

$$|\cos(m!\pi x)|<1,$$

从而$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\ \pi x)$收敛,且

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\pi x) = \frac{1}{1-\cos^2(m!\pi x)} = \frac{1}{\sin^2(m!\pi x)}.$$

则
$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2(m!\pi x)\cos^{2n}(m!\pi x)$$

$$= \lim_{m\to\infty}\sin^2(m!\pi x)\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}(m!\pi x) = 1.$$

第三节 幂 级 数

主 要 内 容

1. 由幂函数列 $\{a_n(x-x_0)^n\}$ 构成的函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ a_n(x-x_n) + \cdots$$

或
$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

称为幂级数.

幂级数是函数项级数中的一类，以下所指幂级数均为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

2. 阿贝尔定理　若幂级数在 $x=x_0\neq 0$ 收敛，则对满足不等式 $|x|<|x_0|$ 的任何 x，幂级数收敛且绝对收敛；若幂级数在 $x=x_0$ 发散，则对满足不等式 $|x|>|x_0|$ 的任何 x，幂级数发散.

幂级数的收敛域是以原点为中心的区间，设其长度为 $2R$，则称 R 为幂级数的收敛半径，$(-R,R)$ 称为幂级数的收敛区间.

3. 幂级数收敛半径的求法

(1) 比式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$；

(2) 根式法：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$；

(3) 柯西-哈达玛(Cauchy-Hadamard)法：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$.

当 $0<\rho<+\infty$时，幂级数收敛半径 $R=1/\rho$；

当 $\rho=0$ 时，幂级数收敛半径 $R=+\infty$；

当 $\rho=+\infty$时，幂级数收敛半径 $R=0$.

4. 若幂级数的收敛半径为 $R(R>0)$，则在其收敛区间$(-R,R)$内任一闭区间$[a,b]$上幂级数都一致收敛. 这种收敛称为内闭一致收敛.

5. 阿贝尔第二定理　若幂级数的收敛半径为 $R(R>0)$，且在 $x=R$(或 $x=-R$)时收敛，则幂级数在$[0,R]$(或$[-R,0]$)上一致收敛.

6. 幂级数的和函数是$(-R,R)$内的连续函数，若幂级数在收敛区间的左(右)端点上收敛，则其和函数也在该端点右(左)连续.

7. 幂级数逐项求导或逐项求积后所得幂级数与原幂级数有相同的收敛区间.

8. 设 f 为幂级数在收敛区间$(-R,R)$内的和函数，$x\in(-R,R)$，则

(1) f 在点 x 可导，且 $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$；

(2) f 在$[0,x]$上可积，且$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

幂级数在收敛区间$(-R,R)$内的和函数 f 在$(-R,R)$内具有任意阶导数，且可逐项求导任意次. 幂级数的系数与 f 在 $x=0$ 的各阶导数有如下关系：

$$a_0=f(0),\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n=1,2,\cdots,$$

即若幂级数在$(-R,R)$上有和函数 f,则幂级数由 f 在 $x=0$ 的导数惟一确定.

9. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 在 $x=0$ 的某邻域内相等,当且仅当 $a_n=b_n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 时.

10. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2,则有

(1) $\lambda\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n,\ |x|<R_1$;

(2) $\alpha\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\beta\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)x^n,\ |x|<R$;

(3) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n,\ |x|<R$,其中

$$R=\min\{R_1,R_2\},\quad c_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_kb_{n-k}.$$

疑难解析

1. 求幂级数的收敛域有哪些常用方法?

答 收敛域与收敛区间不完全一致.收敛域除包括收敛区间外,还可能包括收敛区间的一个或两个端点.因此,求幂级数的收敛域常用以下方法:

(1) 先用公式求出$\sum a_nx^n$ 的收敛半径,求得收敛区间,再讨论级数在收敛区间端点上的敛散性,最后求出幂级数的收敛域.

(2) 作变量代换 $y=\varphi(x)$,将级数化为幂级数$\sum a_ny^n$,讨论$\sum a_ny^n$ 的收敛域,从中求到原级数的收敛域.

(3) 将级数表示为几个级数的代数和,分别求各级数的收敛域,则它们的交集即为原级数的收敛域.

(4) 缺项级数可以用补项或一般函数项级数的方法处理.

2. 为什么阿贝尔定理是研究幂级数敛散性的一个基本定理?如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛,那么,它在 $x=3$ 可能发散吗?

答 阿贝尔定理把确定一个幂级数的敛散性问题归结为确定幂级数在一个点的敛散性问题. 定理指出:若幂级数在点 $x=x_0$ $(x_0\neq 0)$ 收敛,则对一切适合 $|x|<|x_0|$ 的 x,幂级数绝对收敛;若幂级数在 $x=x_0$ 发散,则对一切适合 $|x|>|x_0|$ 的 x,幂级数发散. 因此阿贝尔定理又称为幂级数的敛散性定理.

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=0$ 收敛,则依阿贝尔定理,幂级数至少在(0,4)内绝对收敛. 因此,不可能在 $x=3$ 发散.

3. 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=-4$ 条件收敛,其收敛半径应为多大?

答 由阿贝尔定理知,若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\neq 0$ 收敛,则对 $|x|<|x_0|$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛. 显然, $-4\neq 0$,所以, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<|-4|=4$ 绝对收敛,故收敛半径 $R\geqslant 4$.

方法、技巧与典型例题分析

本节例题包括三个方面:一是求幂级数的收敛半径与收敛域,这可以利用公式或疑难解析1中指出的方法求出;二是求幂级数的和函数,这主要用幂级数的性质来求;三是幂级数的运算,主要研究生成的幂级数的敛散性,这方面的难度较大,我们只能举几个例子说明.

一、幂级数的收敛半径与收敛域

例 1 求下列级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n^p}\ (p>0)$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)x^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n$；

(5) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n$；　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}x^n$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)3^n}$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x-2)^n$.

解　本例用公式直接求出收敛半径，再讨论区间端点，确定收敛域.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}=1$，故幂级数收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$. 若令 $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$，则 $a_n=f(n)$，因为 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，非负且单调减少，有

$$\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_1^{+\infty}=+\infty.$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$ 发散. 由积分判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$ 发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(1+n)}{n}$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

因此，幂级数收敛域为 $[-1,1)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$，故幂级数收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$. 因为 $\frac{1}{n^p}>\frac{1}{(n+1)^p}$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}(-1)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时，级数收敛，当 $0<p\leqslant 1$ 时，级数发散.

因此，当 $p>1$ 时，收敛域为 $[-1,1]$；当 $0<p\leqslant 1$ 时，收敛域为 $(-1,1]$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)}=1$，故幂级数收敛半径为 1.

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$，依斯特林公式知

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}\mathrm{e}^{-n}\cdot n^n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}>\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n}.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$ 发散.

当 $x=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. 因为 $\frac{1}{n!}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0$，且 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\mathrm{e}}{(1+1/n)^n}\to 1$，依莱布尼茨判别法知，级数收敛.

因此，幂级数收敛域为 $[-1,1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(2n+1)2^{n+1}}\Big/\frac{1}{(2n-1)2^n}\right|=\frac{1}{2}$，故幂级数收敛半径为 2 . $|x-2|<2$，即 $0<x<4$.

当 $x=0$ 时，级数一定收敛；

当 $x=4$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$，级数发散.

因此，幂级数收敛域为 $[0,4)$.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=1$，故幂级数收

敛半径为 1.

$$S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n,\ |x|<1,$$

$$S'(x)=\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot 2x+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot nx^{n-1}+\cdots,$$

将上式两边同乘以$(1-x)$，得微分方程

$$(1-x)S'(x)=\frac{1}{2}S(x),\quad 且\quad S(0)=1,$$

分离变量，得 $$\frac{\mathrm{d}S(x)}{S(x)}=\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)},$$

两边积分，得 $$S(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ |x|<1.$$

因此，幂级数收敛域为$(-1,1)$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1+\sqrt{n+1}}{n+\sqrt{n}}\right|=1$，故幂级数收敛半径为 1.

当 $x=-1$ 时，级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{n+\sqrt{n}}$，显然发散；当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ 为收敛的交错级数.

因此，幂级数收敛域为$(-1,1]$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cdot 3^n}{(n+2)\cdot 3^{n+1}}=\frac{1}{3}$，故幂级数的收敛半径为 3.

当 $x=3$ 时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2}$，显然发散；当 $x=-3$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$ 是收敛的交错级数. 因此，幂级数收敛域为$[-3,3)$.

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n+(-2)^n}=3$，故幂级数的收敛半径为 1/3. 由 $|x-1|<1/3$，得 $2/3<x<4/3$.

当 $x = 2/3$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (2/3)^n}{n}$,其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 为收敛的交错级数. 依比值法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2/3)^n}{n}$ 收敛,故级数在 $x = 2/3$ 收敛.

当 $x = 4/3$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-2/3)^n}{n}$,其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2/3)^n}{n}$ 收敛,故级数在 $x = 4/3$ 发散.

例 2 求下列级数的收敛半径与收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{2n}x^n(1-x)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{1}{3n}\right)\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n + 2^n + \cdots + 50^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

解 本例先需要进行变量代换,再讨论收敛半径与收敛域.

(1) 令 $y = x(1-x)$,化级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{2n}y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^{2(n+1)}}{n2^{2n}} = 4,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{2n}y^n$ 收敛半径为 $1/4$.

由 $-\frac{1}{4} < x(1-x) < \frac{1}{4}$ 可解得 $0 < \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$,从而得 $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

当 $y = x(1-x) = \pm\frac{1}{4}$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{2n}\left(\pm\frac{1}{4}\right)^n$,显然发散. 因此,原级数收敛域为 $\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$.

(2) 令 $y=\frac{3+x}{3-2x}$，化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin[1/(3n+3)]}{\sin(1/3n)}=1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)y^n$ 收敛半径为 1.

当 $-1<y<1$ 时，由 $-1<\frac{3+x}{3-2x}<1$ 解得 $x<0$ 或 $x>6$.

当 $x=0$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{3n}$，由比较法的极限形式知 $\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{3n}\right)\Big/\frac{1}{3n}=1$，说明级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ 同样发散.

当 $x=6$ 时，原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{3n}$，是收敛的交错级数.

因此，原幂级数收敛域是 $(-\infty,0)\cup[6,+\infty)$.

(3) 令 $y=\frac{x}{2x+1}$，化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}y^n$. 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/(n\sqrt[n]{n})}=\lim_{n\to\infty}e^{-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ln n}=1,$$

故级数收敛半径为 1.

当 $y=1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$. 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ 单调有界，故级数收敛.

当 $y=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 因为当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}$，故级数发散.

由 $-1<y\leqslant 1$ 得，$-1<\frac{x}{2x+1}\leqslant 1$，解得 $x>-\frac{1}{3}$ 和 $x\leqslant -1$. 因此，原幂级数收敛域为 $(-\infty,-1]\cup\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

(4) 令 $e^{-x}=y$，化级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}(1+1/n)^{-n^2}y^n$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{-n}=1/e,$$

故级数收敛半径为 e.

当 $y=e$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n$，其通项 $b_n=\left[\frac{e}{(1+1/n)^n}\right]^n\xrightarrow{n\to\infty}0$，级数发散.

当 $y=-e$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}-e^n$，其通项 $b_n\not\to 0$，级数也发散.

由 $-e<y<e$ 得，$-e<e^{-x}<e\Rightarrow 0<e^{-x}<e\Rightarrow -1<x<+\infty$. 因此，原幂级数收敛域为 $(-1,+\infty)$.

(5) 由 $1\leqslant\sqrt[n]{\left(\frac{1}{50}\right)^n+\left(\frac{2}{50}\right)^n+\cdots+\left(\frac{49}{50}\right)^n+1}\leqslant\sqrt[n]{50}\xrightarrow{n\to\infty}1$ 及 $\sqrt[n]{n}\xrightarrow{n\to\infty}1$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{50}{(\sqrt[n]{n})^2}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{50}\right)^n+\left(\frac{2}{50}\right)^n+\cdots+\left(\frac{49}{50}\right)^n+1}=50,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}\left(\frac{1}{50}\right)^n$$

收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+50^n}{n^2}t^n$ 在 $\left[-\frac{1}{50},\frac{1}{50}\right]$ 上收敛.

由 $-\frac{1}{50}\leqslant\frac{1-x}{1+x}\leqslant\frac{1}{50}$ 解得 $\frac{49}{51}\leqslant x\leqslant\frac{51}{49}$，因此，幂级数收敛域为 $\left[-\frac{49}{51},\frac{51}{49}\right]$.

例 3 确定下列幂级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right)x^n$；(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n,\ a>0,b>0.$

解 本例级数均可分解为两个级数之和.

(1)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+(-1)^n+\sin n\right)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+\sin n]x^n.$$

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，故级数收敛半径为 1. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{1}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1]$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n+\sin n]x^n$，因为 $|[(-1)^n+\sin n]x^n|\leqslant 2|x|^n$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}2|x|^n=2\sum_{n=1}^{\infty}|x|^n$ 的收敛域显然为 $(-1,1)$.

因此，原级数收敛域是 $(-1,1)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{4^n}\right]x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n.$

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，故级数收敛半径为 1. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(-1)^n$ 发散，故级数收敛域为 $[-1,1)$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}x^n$，有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{4}$. 又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}(\pm 4)^n$ 发散，故级数收敛域为 $(-4,4)$.

因此，原级数收敛域为 $[-1,1)$.

(3) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n/n^2+b^n/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b),$$

故级数收敛半径为 $\max\{1/a,1/b\}$.

当 $x=\pm 1/a\ (a\geqslant b)$ 或 $x=\pm 1/b\ (b\geqslant a)$ 时，级数都收敛.

例 4 确定下列级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}n^{n^2}x^{n^3}$;　　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{n^2}$.

解 本例都是缺项级数，但解法却不完全相同.

(1) 用达朗贝尔比值法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\right)\bigg/\left(\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)=\frac{1}{2}|x|^2,$$

所以，当 $|x|<\sqrt{2}$ 时幂级数绝对收敛，故 $R=1$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)$，是发散的.

因此，原幂级数收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) 用达朗贝尔比值法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(n+1)}|x|^2\longrightarrow 0,$$

所以 $R=+\infty$，原幂级数收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

(3) 对级数添加一些值为零的项，不影响级数的敛散性. 令

$$a_k=\begin{cases}n^{n^2}, & k=n^3,\\ 0, & k\neq n^3\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots),$$

则级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_kx^k$，由于

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,$$

且当 $x=\pm 1$ 时，原级数的通项 $(\pm 1)^{n^3}n^{n^2}\overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$，因此，原幂级数

收敛域为(−1,1).

(4) 由柯西根值法的极限形式,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n^{n^2}|/2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & |x|<1,\\ 1/2, & |x|=1,\\ +\infty, & |x|>1.\end{cases}$$

因此,原幂级数收敛域为[−1,1].

例 5 确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n|x|^n}$ 的收敛域.

解 当 $x=0$ 时,原级数没有意义.

当 $x>0$ 时,$\dfrac{x}{|x|}=1$,原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$,级数发散.

当 $x<0$ 时,$\dfrac{x}{|x|}=-1$,原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$,级数收敛.

因此,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n|x|^n}$ 的收敛域为 $(-\infty,0)$.

注意 这个级数不是幂级数,所以不存在收敛半径.

二、幂级数的性质

幂级数的性质是指幂级数的和函数在收敛区间上的连续性、可微性与可积性. 利用幂级数的性质可以研究与幂级数和函数有关的函数性质、求幂级数的和函数以及讨论和函数的一致收敛性等. 在研究问题时,只有善于观察具体问题的不同点,灵活运用幂级数的性质,方能取得好的结果.

例 6 设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-R,R)$ 上收敛,证明:

(1) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^n(0)}{n!}x^n$; (2) $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

证 (1) 由于幂级数在收敛区域内可微分任意次,有

$$S(0)=a_0,\ S'(0)=a_1,\ \cdots,S^{(n)}(0)=n!a_n,$$

故 $a_n=\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$，即得 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

(2) 将 $S^{(k)}(x)$ 作为级数时，有 $S^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n+k)}(0)}{n!}x^n$.

又

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}(x_0+x-x_0)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}\{C_n^0x_0^n+C_n^1x_0^{n-1}(x-x_0)\\&\quad+\cdots+C_n^n(x-x_0)^n\}.\end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 在 $(-R,R)$ 内收敛，所以

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|S^{(n)}(0)|\{C_n^0|x_0|^n+C_n^1|x_0|^{n-1}|x-x_0|\\&+\cdots+C_n^n|x-x_0|^n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}|S^{(n)}(0)|\ (|x_0|+|x-x_0|)^n.\end{aligned}$$

当 $|x_0|+|x-x_0|<R$ 时收敛，即 $S(x)$ 绝对收敛，故可改变项的次序，得

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{S^{(n)}(0)}{n!}\{C_n^0x_0^n+C_n^1x_0^{n-1}(x-x_0)\\&\quad+\cdots+C_n^n(x-x_0)^n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n\left\{C_n^n\frac{S^n(0)}{n!}+C_{n+1}^n\frac{S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x_0\right.\\&\quad\left.+C_{n+2}^n\frac{S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x_0^2+\cdots\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n\left\{\frac{S^{(n)}(0)}{n!}+\frac{C_{n+1}^1S^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x_0\right.\\&\quad\left.+\frac{C_{n+2}^2S^{(n+2)}(0)}{(n+2)!}x_0^2+\cdots\right\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!}\left\{S^{(n)}(0) + \frac{S^{(n+1)}(0)}{1!}x_0 + \frac{S^{(n+2)}(0)}{2!}x_0^2 + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n(|x_0| + |x-x_0| < R).$$

例 7 设$|x|<1$,证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^4}$.

证 利用等比级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$和逐项求导公式求解.

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left[\int\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\mathrm{d}x\right]'$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} = \left\{\int\left[\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}''.$$

$$= \left\{\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{2}x^n\mathrm{d}x\right\}'' = \left\{\frac{x^2}{2(1-x)}\right\}'' = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

(3) $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}$$

$$= \left\{\int\left[\int\left(\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)n(n+1)}{6}x^{n-2}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}'''$$

$$= \left\{\int\left[\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n+1)}{6}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x\right\}'''$$

$$= \left\{\int\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{6}x^n\mathrm{d}x\right\}''' = \left\{\frac{x^3}{6(1-x)}\right\}'''$$

$$= \left[\frac{3x^2 - 2x^3}{6(1-x)}\right]'' = \left[\frac{6x - 6x^2 + 2x^3}{6(1-x)^3}\right]' = \frac{1}{(1-x)^4}.$$

例 8 证明：贝塞尔函数 $B_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ $(x \neq 0)$ 满足微分方程

$$xB_0''(x) + B_0'(x) + xB_0(x) = 0.$$

证 由上节例 7 知，贝塞尔函数在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛，故可逐项求导.

$$B_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1},$$

$$B_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-2},$$

$$xB_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n(2n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1},$$

$$xB_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{[(n-1)!]^2 2^{2n-2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(2n)^2}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1}.$$

故 $xB_0''(x) + B_0'(x) + xB_0(x)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n(n-1)}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{(n!)^2 2^{2n}} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{-(2n)^2}{(n!)2^{2n}} x^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2 2^{2n}}[2n(2n-1) + 2n - (2n)^2] = 0.$$

例 9 证明：当$|x|<1$时，有

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\arctan x.$

证 两级数在 $|x|<1$ 中一致收敛,故可逐项求积.

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$
$$=\int_0^x dt+\int_0^x t^2 dt+\int_0^x t^4 dt+\cdots+\int_0^x t^{2n-2}dt+\cdots$$
$$=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt \text{（利用等比级数和的公式）}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^x\frac{1}{1+t}dt+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1.$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$
$$=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$$
$$=\int_0^x dt-\int_0^x t^2 dt+\int_0^x t^4 dt+\cdots+(-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n-2}dt+\cdots$$
$$=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\text{arctant},\ |x|\leqslant 1.$$

若在题(1)中,令 x 取特殊值,有

令 $x=\frac{1}{3}$,得 $\ln 2=2\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{1}{2}$,得 $\ln 3=2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{2}{3}$,得 $\ln 5=2\left(\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{3\cdot 3^3}+\frac{2^5}{5\cdot 3^5}+\cdots\right)$;

令 $x=\frac{n-1}{n+1}$,得 $\ln n=2\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5+\cdots\right]$.

若在题(2)中,令 $x=\sqrt{3}/3$,有

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^3}+\cdots\right).$$

令 $x=\pm 1$,则得莱布尼茨级数

$$\pi=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right).$$

例 10 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续;

(2) 计算 $\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x$.

解 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}$

$$=\left[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}n(3x)^{n-1}\mathrm{d}x\right]'=\left[\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(3x)^n\right]'$$

$$=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{(1-3x)}\right]'=\frac{1}{(1-3x)^2},\ |x|<1.$$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}n3^{n-1}x^{n-1}$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内一致收敛,故和函数 $f(x)$ 在 $(-1/3,1/3)$ 内连续.

(2) 和函数在收敛区间内逐项可导,故

$$\int_0^{1/8}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1-3x)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(1-3x)}\Big|_0^{1/8}$$

$$=8/15-1/3=1/5.$$

例 11 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\ (-\infty<x<+\infty)$,不求和函数,将积分 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 用 $f(x)$ 表示出来.

解 利用幂级数在收敛区间内可逐项积分且收敛半径不变的性质,对 $tf(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{n!}$ 积分.

$$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{t^{2n+1}}{n!}\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2(n+1)}}{(n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}-1\right)=\frac{1}{2}[f(x)-1].$$

例 12 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $|x|<R$ 时收敛，且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，证明：

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1},$$

且
$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

证 幂级数在收敛区间内可以逐项积分，即

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 收敛，则由阿贝尔第二定理，令 $x\to R-0$，有

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}.$$

当 $|x|<1$ 时，有 $\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$. 而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛，故

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

例 13 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}$，证明：

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导，在 $x=1$ 不可导，$\lim\limits_{x\to 1-0}f'(x)=+\infty$.

证 (1) 当 $|x|\leqslant 1$ 时，有不等式

$$\left|\frac{x^n}{n^2\ln(1+n)}\right|\leqslant\frac{1}{n^2\ln(1+n)}\leqslant\frac{1}{n^2\ln 2}$$

成立. 所以 $f(x)$ 的幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

(2) 由逐项可导性质知，$f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ $(-1,1)$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)$ 是正的单调增加函数，故 $\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=A$ 存在. 设 $A<+\infty$，则 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，又 $\dfrac{1}{n\ln(1+n)}>0$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ 必收敛. 但事实上，由积分判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散. 于是 $A=+\infty$，即

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty.$$

当 $x=-1$ 时，依莱布尼茨判别法知

$$f'(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln(1+n)}$$

收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 在 $[-1,0]$ 上一致收敛. 由可微性知

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}\quad(-1\leqslant x\leqslant 0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导.

由 $\lim\limits_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty$，利用洛必达法则，有

$$f'(1)=\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-0} f'(x)=+\infty,$$

即 $f(x)$ 在 $x=1$ 不可导.

求幂级数的和函数的方法往往不是惟一的，读者在解题过程中可以用不同方法得出同一结果. 为了节省篇幅，在以后的大部分例题中我们仍然采取一题一法的方式.

例 14 求下列幂级数的和函数：

(1) $1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$;

(2) $\dfrac{1}{1\cdot 2}x^2+\dfrac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)2n}x^{2n}+\cdots$;

(3) $x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$;

(4) $3x^2-\dfrac{5}{2}x^4+\dfrac{7}{3}x^6+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}x^{2n}+\cdots$.

解 (1) 设 $S(x)=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots$,则

$$xS(x)=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x-1,$$

所以 $$S(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x},\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=x^2$,所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时,级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)^2}$,而

$$\frac{1}{2n(2n-1)}<\frac{1}{(2n-1)^2}<\frac{1}{4(n-1)^2},$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)^2}$ 收敛.因此,级数收敛域为$[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$,则 $S(0)=0$;

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},\quad S'(0)=0;$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}=\frac{1}{1-x^2},\ |x|<1.$$

故 $$S'(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\int_0^x\ln\frac{1+t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\int_0^x\ln(1+t)\mathrm{d}t-\int_0^x\ln(1-t)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}x[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&\quad-\frac{1}{2}\left[\int_0^x\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t+\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2),|x|<1.\end{aligned}$$

(3) 设 $S(x)=x-4x^2+9x^3-16x^4+\cdots$,则

$$\int_0^x \frac{S(t)}{t}dt=\int_0^x(1-4t+9t^2-16t^3+\cdots)dt$$

$$=x-2x^2+3x^3-4x^4+\cdots=v(x),$$

而 $$\int_0^x \frac{v(t)}{t}dt=\int_0^x(1-2t+3t^2-4t^3+\cdots)dt$$

$$=x-x^2+x^3-x^4+\cdots=x\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$=\frac{x}{1+x},\ |x|<1,$$

故 $$S(x)=xv'(x)=x\left[x\left(\frac{x}{1+x}\right)'\right]'=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

当 $x=\pm 1$ 时,级数发散.

(4) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+1}\Big/\dfrac{2n+1}{n}=1$,而 $x=\pm 1$ 时,级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n}$,是发散的,因此级数收敛域为 $(-1,1)$. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n}x^{2n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}$$

$$=2\frac{x^2}{1+x^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n},$$

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{2n}\right]'dx$$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-1}\right]dx$$

$$=\int_0^x\frac{2x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2),\ |x|<1,$$

故
$$S(x)=\frac{2x}{1+x^2}+\ln(1+x^2)$$
$$=2-\frac{2}{1+x^2}+\ln(1+x^2),\ |x|<1.$$

例 15 求下列幂级数在收敛域中的和函数：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$；　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$，$|x|<1$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$，所以收敛半径为 1.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$$
$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{n+1}\right)'\mathrm{d}t$$
$$=\frac{x}{1-x}-\frac{1}{x}\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}[x+\ln(1-x)]$$
$$=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x).$$

(2) $S_{n+1}(x)$
$$=\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2x}{1+x^2}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2^2x^{4-1}}{1-x^4}+\frac{2^2x^{4-1}}{1+x^4}+\cdots+\frac{2^n x^{2n-1}}{1+x^{2n}}=\cdots$$
$$=\frac{1}{1-x}-\frac{2^{n+1}x^{2n}}{1+x^{2n+1}},$$

故
$$S(x)=\lim_{x\to\infty}S_{n+1}(x)=\frac{1}{1-x}.$$

$$(3)\ \int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

$$= \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2/2} = \frac{x}{2-x^2},\ |x| < \sqrt{2},$$

故 $$S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\ x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

$$(4)\ \int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^n\right]\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+2} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$= x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n\prime}\right) = x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= \frac{x^2}{(1-x)^2},\ |x| < 1,$$

故 $$S(x) = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2}\right]' = \frac{2x}{(1-x^3)},\ x \in (-1,1).$$

例 16 求下列幂级数在收敛域中的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x^2-1)^n}{n(n+1)}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^{2n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{n-1}}$.

解 (1) 令 $x^2-1=y$,级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(n+1)}$,则

$$S(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n(n+1)},\quad yS(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{n(n+1)},$$

有 $$[yS(y)]' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n},$$

$$[yS(y)]'' = \sum_{n=1}^{\infty}y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}y^n = \frac{1}{1-y},\ |y| < 1,$$

故 $$[yS(y)]' = \int_0^y \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t = -\ln(1-y).$$

$$yS(y) = \int_0^y -\ln(1-y)\mathrm{d}y = (1-y)\ln(1-y) + y,$$

即 $$S(y) = 1 + \frac{1-y}{y}\ln(1-y),\ |y| < 1.$$

由 $|y|<1$ 知，$|x^2-1|<1 \Rightarrow |x|<1$，从而

$$S(x) = 1 + \frac{2-x^2}{x^2-1}\ln(2-x^2),\ |x| < 1.$$

(2) 令 $y=\dfrac{3+x}{3-2x}$，级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}y^{2n}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}(y)}{u_n(y)}=y^2$ 知，当 $|y|<1$ 时级数收敛，当 $y=\pm1$ 时级数发散. 故 $\left|\dfrac{3+x}{3-2x}\right|<1 \Rightarrow$ $x<0$ 或 $x>6$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}y^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y \left(\frac{1}{2n}t^{2n}\right)'\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^y t^{2n-1}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^y t\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{t\mathrm{d}y}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\ln|1-y^2|,$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^{2n} = -\frac{1}{2}\ln\left|1-\left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^2\right|$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-3x(6-x)}{(3-2x)^2}\right|,$$

$$x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty).$$

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 t^{n-1}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x},\ |x| < 1,$$

故 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1+x}\right)' = \frac{-1}{(1+x)^2},\ |x| < 1,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^{n-1} = \left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]' = \frac{x-1}{(1+x)^3},\ |x|<1.$$

从而 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2 x^n = \frac{x(x-1)}{(1+x)^3},\ x \in (-1,1).$

$$(4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n-1)3^{2n-1}}$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x}{3}\right)^{2n-1}$$

$$= x\int_0^x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{t}{3}\right)^{2n-1}\right]'\mathrm{d}t$$

$$= x\int_0^x\left[\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{t}{3}\right)^{2(n-1)}\right]\mathrm{d}t$$

$$= x\int_0^x\frac{1}{3}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+(t/3)^2} = x\arctan\frac{x}{3},\ x\in[-3,3].$$

例 17 设 $0<x<1$,求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}}$ 的和函数.

解

$$\frac{x^{2n}}{1-x^{2n+1}} = \frac{x^{2n}+1}{1-x^{2n+1}} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{1-x^{2n}} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}.$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-x^{2k}} - \frac{1}{1-x^{2k-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}.$$

故当 $0<x<1$ 时,有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{1-x^{2k+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2n+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}.$$

例 18 设幂级数为$\sum_{n=1}^{n}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$,求:

(1) 收敛区间与和函数; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$ 的值.

解 (1)因为$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)n!}{(n+1)!\ (2n+1)}|x|^2=0$,所以收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}$$

$$=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=x(\mathrm{e}^{x^2}-1),$$

故
$$S(x)=\left[x(\mathrm{e}^{x^2}-1)\right]'=(2x^2+1)\mathrm{e}^{x^2}-1,$$
$$x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) 当 $x=\sqrt{2}$ 时,级数化为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n$,故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}2^n=(5\mathrm{e}^2-1)+1=5\mathrm{e}^2.$$

例 19 用多种方法求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的值.

解法 1 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$, $|x|<1$,则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{n-1}-\frac{x^n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}[S_1(x)-S_2(x)],$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=x\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=x\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}\mathrm{d}t=-x\ln|1-x|,\ |x|<1.$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$=\frac{1}{x}\left[-\ln|1-x|-x-\frac{x^2}{2}\right],\ x\neq 0,$$

从而 $S(x)=\frac{1}{2}[-x\ln|1-x|]$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\left[-\ln|1-x|-x-\frac{x^2}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln|1-x^2|,x\in(-1,0)\cup(0,1),$$

故令 $x=1/2$,即得

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 2 设原式 $=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1},\ |x|<1,$$

于是 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n-1}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}=x^2\int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}t^{n-2}\right)\mathrm{d}t$

$$=x^2\int_0^x\frac{1}{1-t}=\mathrm{d}t=x^2\ln|1-x|,|x|<1;$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\left[\sum_{n=2}^{\infty}t^n\right]\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t^2}{1-t}\mathrm{d}t$$

$$=-\ln|1-x|-x-x^2/2,\ |x|<1.$$

故 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=S_1\left(\frac{1}{2}\right)-S_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$

解法 3 设 $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1},|x|<1,S(0)=0$,则

$$xS(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)},$$

$$[xS(x)]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1},\quad \frac{1}{x}[xS(x)]'=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}\ (x\neq 0),$$

而 $\left\{\frac{1}{x}[xS(x)]\right\}'=\sum_{n=2}^{\infty}x^{n-2}=\frac{1}{1-x}$ ($|x|<1$ 且 $x\neq 0$),

故 $\frac{1}{x}[xS(x)]'=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0+\varepsilon}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln|1-x|,$

$$[xS(x)]' = -x\ln|1-x|.$$

又 $$xS(x) = -\int_0^x t\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x^2}{2}\ln(1-x) + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln(1-x),$$

$$S(x) = -\frac{x}{2}\ln(1-x) + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}\ln(1-x)$$

$$(|x| < 1 \text{ 且 } x \neq 0),$$

从而 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 4 令 $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(n-1)2^n}$，$|x| < 2$，

则 $$S' = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)2^n} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)2^n} = xS_1(x),$$

$$S_1(x) = \int_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{2^n}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{2(2-t)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln(2-x),\ |x| < 2.$$

因为 $S(0)=0$，故

$$S(x) = \int_0^x\left[\frac{t}{2}\ln 2 - \frac{t}{2}\ln(2-t)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{x^2}{4}\ln 2 - \frac{x^2}{4}\ln(2-x) + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln(2-x) - \ln 2,$$

从而 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} - \frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 5 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$，$|x| < 1$，所以

$$\text{原式} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right]$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 6 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$，$|x|<1$，所以

$$原式=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$$

$$=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

解法 5 与解法 6 直接从 $\ln(1-x)$的展开式入手，将所给级数变形后解出结果，避免了幂级数求和的过程，因而是以上解法中较简单的.

例 20 利用幂级数求下列数项级数之和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{n-1}}$； (4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n2^n}$.

解 一般先设$S(x)$，确定收敛区间；再求出$S(x)$，确定x_0，求得$S(x_0)$，即数项级数之和.

(1) 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}\Big/\left(\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}\right)=\frac{1}{2}x^2,$$

所以当$|x|<\sqrt{2}$时级数收敛，当$x=\pm\sqrt{2}$时级数发散.

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2/2}{1-x^2/2}=\frac{x}{2-x^2},$$

于是 $$S(x) = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3.$$

(2) 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$，则

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}, \ |x| < 1,$$

所以 $$S'(x) = \int_0^x \frac{t}{1-t} dt = -x - \ln(1-x),$$

$$S(x) = -\int_0^x [t + \ln(1-t)] dt,$$
$$= -[x^2/2 + x\ln(1-x) - x - \ln(1-x)]$$
$$= x + \ln(1-x) - x^2/2 - x\ln(1-x),$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4(n+1)(n+2)2^n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} = S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}.$$

(3) 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Big/ \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right| = 1,$$

幂级数在(−1,1)内收敛.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2(n-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

所以 $$S(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{n-1}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+1/\sqrt{2}}{1-1/\sqrt{2}}.$$

从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)}2^{n-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1).$

(4) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$,设

$$S(x)=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}x^n,$$

而
$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n+1}&=x^3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n-2}x^{n-2}=x^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\\&=x^3\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}t^n\right)\mathrm{d}t=x^3\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t\\&=-x^3\ln(1-x),\ |x|<1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^{n+1}&=x\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n-x-\frac{1}{2}x^2\right)\\&=x\left[-\ln(1-x)-x-\frac{1}{2}x^2\right].\end{aligned}$$

令 $x=1/2$,有

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)n2^n}&=\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\\&=\frac{1}{8}\ln2-\frac{1}{2}\ln2+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}-\frac{3}{8}\ln2.\end{aligned}$$

例 21 利用幂级数求下列数项级数之和.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^{n+1}}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^{n-1}}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$;　　(6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

解 (1) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)x^n$,则

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

$$S_1(x)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2},\quad S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

而 $$\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)t^{n-2}\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1},$$

$$\int_0^x\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n nt^{n-1}\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},$$

故 $$S_1(x)=x^2\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\frac{2x^2}{(1+x)^3},\quad S_2(x)=\frac{1}{1+x}.$$

于是 $$S(x)=\frac{2x^2}{(1+x)^3}+\frac{1}{1+x}.$$

令 $x=1/2$,得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n^2-n+1)\frac{1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{22}{27}.$$

(2) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$,而

$$\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)t^{n-1}\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n,$$

$$\int_0^x\Big[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\Big]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{x^2}{1-x},$$

所以 $$S(x)=x^2\left[\frac{x^2}{1-x}\right]''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

于是 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4.$$

(3) 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$,则

$$\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}n^2t^{n-1}\Big)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

$$\int_0^x\Big(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\Big)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad |x|<1.$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad |x|<1,$$

$$S(x)=\left[x\frac{1}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1+x}{(1-x)^3},\ |x|<1.$$

从而 $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{2^{n-1}}=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}.$$

（4）设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(x-1)!}$$

$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2e^x.$$

则 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^{n+1}.$$

设 $$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n+1}$$

$$=S(x)-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x^2e^x-x(e^x-1),$$

则 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)}{n!}2^n=\frac{1}{2}S_1(2)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot e^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(e^2-1)=e^2+1.$$

（5）设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}x^{2n+1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x^2)^n$$

$$=\frac{1}{1+2x^2},\ |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $$S(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+2t^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x,\ |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$$

于是 $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}$$

$$=\sqrt{2}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan 1=\frac{\pi}{4}.$$

(6) 设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$，则

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\begin{aligned}\left(2-\frac{x^2}{2}\right) S'(x) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} \\ &= 2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^{2n+2}\right\} \\ &= 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\left[\frac{2(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} - \frac{1}{2}\right] x^{2n+2} \\ &= 2 + \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 2 + \frac{x}{2} S(x),\end{aligned}$$

得微分方程 $\quad S'(x) - \frac{4}{4-x^2} S(x) = \frac{4}{4-x^2}$，

解得 $\quad S(x) = \frac{4}{\sqrt{4-x^2}}\left(\arcsin \frac{x}{2} + c\right)$.

当 $S(0)=0$ 时，求得 $c=0$，从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = S(1) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

例 22 设 $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n = 2, 3, \cdots$. 证明：在 $|x| < 1/2$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛，并求出和函数.

证 由题设知 $a_n > 0$，且当 $n \geqslant 2$ 时，$a_{n+1} > a_n$. 故当 $|x| < 1/2$ 时，有

$$\frac{|a_{n+1}x^n|}{|a_n x^{n-1}|} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}|x| < \frac{2a_n}{a_n}|x| = 2|x| < 2 \cdot 1/2 = 1.$$

从而幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1}$收敛.

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1} = 1 + x + \sum_{n=3}^{\infty}a_n x^{n-1} \\ &= 1 + x + \sum_{n=3}^{\infty}(a_{n-1} + a_{n-2})x^{n-1} \\ &= 1 + x + x\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^{n-2} + x^2\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^{n-3} \\ &= 1 + x\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n-1}\right) + x^2\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n-1} \\ &= 1 + xS(x) + x^2S(x),\end{aligned}$$

解得
$$S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

三、其它类型例题

例 23 设$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$，证明：当$0 < x < 1$时，有

$$f(x) + f(1-x) + \ln x[\ln(1-x)] = \pi^2/6.$$

证 因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2} = 1$，所以幂级数收敛半径为1.而$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}1/n^2 = \pi^2/6$.利用逐项微分性质，有

$$\begin{aligned}&[f(x) + f(1-x) + \ln x\ln(1-x)]' \\ &= f'(x) - f'(1-x) + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^{n-1}}{n} \\ &= 0,\end{aligned}$$

即 $f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)\equiv c,\ x\in(0,1).$

令 $x\to0^+$,得 $c=f(1)=\pi^2/6$,故

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\pi^2/6.$$

例 24 证明:$\forall\ x,y\in\mathbf{R}$,有

(1) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$;(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{S(x)}{x}=1$.

证 $\forall\ x,y\in\mathbf{R}$,已知

$$S(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,\quad C(y)=\frac{1}{0!}-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\cdots,$$

故
$$\begin{aligned}S(x)C(y)&=x-\left(\frac{x^3}{3!0!}+\frac{xy^2}{2!1!}\right)\\&\quad+\left(\frac{x^5}{5!0!}+\frac{x^3y^2}{3!2!}+\frac{xy^4}{1!4!}\right)-\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(x)S(y)&=y-\left(\frac{y^3}{0!3!}+\frac{yx^2}{1!2!}\right)\\&\quad+\left(\frac{y^5}{0!5!}+\frac{y^3x^2}{2!3!}+\frac{yx^4}{4!1!}\right)-\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&S(x)C(y)+C(x)S(y)\\&=(x+y)-\left(\frac{x^3}{3!0!}+\frac{xy^2}{2!1!}+\frac{yx^2}{1!2!}+\frac{y^3}{0!3!}\right)\\&\quad+\left(\frac{x^5}{5!0!}+\frac{x^4y}{4!1!}+\frac{x^3y^2}{3!2!}+\frac{x^2y^3}{2!3!}+\frac{xy^4}{1!4!}+\frac{y^5}{0!5!}\right)\\&=(x+y)-\frac{1}{3!}(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)\\&\quad+\frac{1}{5!}(x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5)+\cdots\\&=(x+y)-\frac{1}{3!}(x+y)^3+\frac{1}{5!}(x+y)^5-\cdots\\&=S(x+y).\end{aligned}$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{S(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\lim_{x\to 0}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1.$$

例 25 设 $a_n \geqslant 0$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$，证明：$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散，所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R\leqslant 1$，依柯西-哈达玛判别法，有 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$.

设 $A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$，因为

$$1-\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\xrightarrow{n\to\infty}0\Rightarrow\frac{A_{n-1}}{A_n}\xrightarrow{n\to\infty}1,$$

所以 $\sqrt[n]{A_n}\xrightarrow{n\to\infty}1$.

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=0$ 知，当 n 充分大时，有

$$a_n < a_1+a_2+\cdots+a_n = A_n,$$

故
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=1 \quad 即 \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1.$$

例 26 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$，$S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$，证明：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|S_n|}=1.$$

证 本例是应用幂级数收敛半径来证明极限的例子.

由柯西收敛性定理，当 $|x|<1$ 时，有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,$$

$\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 收敛. 若 $\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n$ 收敛半径为 R，则 $R\geqslant 1$.

当 $|x| < R$ 时，有

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

由题设知，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $|x| \leqslant 1$，即 $R \leqslant 1$. 因此，必有 $R = 1$.

例 27 证明：若 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，$|x| < r$，且 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛，则 $\int_0^r f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛，所以在 $[0,r]$ 上一致收敛. 于是

$$\lim_{x \to r-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \lim_{x \to r-0} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

$\forall\, x \in (0,r)$，有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

从而 $$\int_0^r f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to r-0} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

下面我们来讨论由两个已知收敛半径的幂级数所得到的新幂级数的收敛区间问题.

设有两个幂级数

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,\quad |x| < r,$$

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots,\quad |t| < r_2,$$

将后式代入前式，合并同次幂系数所得幂级数称为生成幂级数，即

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

其中 $c_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \cdots,$

$c_1 = a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_3 b_0^2 b_1 + \cdots,$

$c_2 = a_1 b_2 + a_2(b_1^2 + 2b_0 b_2) + 3a_3(b_0 b_1^2 + b_0^2 b_1) + \cdots,$

……

例 28 设由两个幂级数

$$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,\ |x|<r_1,$$

$$x(t)=b_1+b_2t+b_3t^3+\cdots,\ |t|<r_2$$

的生成幂级数为

$$y(x(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0\Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k t^k\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^k,$$

其中 $c_0=a_0, c_1=a_1b_1, c_2=a_1b_2+a_2b_1^2, \cdots$. 证明:生成幂级数至少在 $(-r,r)$ 内收敛,其中

$$r = \frac{r_1(r_2-\delta)}{M+r_1}.$$

其中,$0<\delta<r_2$,M 对一切取定的 δ 满足:$\forall\ m\in\mathbf{N}$,有

$$\left|b_m(r_2-\delta)^m\right|\leqslant M.$$

证 考查级数

$$Y=|a_0|+|a_1|x+|a_2|x^2+\cdots,$$

$$X=|b_1|t+|b_2|t^2+|b_3|t^3+\cdots,$$

依阿贝尔定理,级数 X 与 Y 分别在 $(-r_1,r_1)$ 和 $(-r_2,r_2)$ 内收敛,而 $|b_m|<\dfrac{M}{(r_2-\delta)^m}$,故当 $|t|<r_2-\delta$ 时,有

$$|X|\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\,|t|^n \leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{|t|}{r_2-\delta}\Big)^n$$

$$= M\Big[\frac{1}{1-|t|/(r_2-\delta)}-1\Big]= \frac{M|t|}{r_2-\delta-|t|}.$$

于是,当 $\dfrac{M|t|}{r_2-\delta-|t|}<r$ 时,$|t|<\dfrac{r_1(r_2-\delta)}{M+r_1}=r<r_2$,从而级数 X 收敛. 又 $|X|<r_1$,所以代入后 Y 也收敛. 说明对符合式子的 $t, x(t)$ 收敛,得 $y(x)$ 也收敛. 由于是绝对收敛,故生成幂级数(交换项次序后的级数)收敛于同一和,因此至少在区间 $(-r,r)$ 内收敛.

例 29 设有幂级数 $y(x)=1+b_1x+b_2x^2+\cdots$, $|x|<r$,证明:当 $|x|<r_1=\dfrac{r-\delta}{M+1}$ 时,幂级数 $\dfrac{1}{y(x)}$ 收敛. 其中 $0<\delta<r$,M 为使一

切 m 有 $|b_m(r-\delta)^m|\leqslant M$ 的数.

证 $1/y(x)$是商级数的特例. 设

$$h(x)=b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots,$$

显然,$h(x)$与 $y(x)$有相同的收敛域. 当$|h|<1$ 时,有

$$\frac{1}{y(x)}=\frac{1}{1+h(x)}=1-h+h^2-h^3+\cdots,$$

其收敛半径为1. 当将$h(x)$代入$1/y(x)$时,$1/y(x)$是生成幂级数. 依上例,$r_1=\dfrac{1\cdot(r-\delta)}{M+1}=\dfrac{r-\delta}{M+1}$,故在$(-r_1,r)$内,幂级数 $1/y(x)$收敛.

第四节 函数展开成幂级数

主要内容

1. 若函数 f 在点 x_0 的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶的连续导数,则形如

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

的等式称为 f 在 x_0 的泰勒公式,而级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 f 在 x_0 的泰勒级数.

2. 当 $x_0=0$ 时,形如

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

的级数称为 f 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

3. 当 $x_0=0$ 时的积分型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t;$$

拉格朗日型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)x^{(n+1)},\ \xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间};$$

柯西型余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{(n+1)},\ 0\leqslant\theta\leqslant 1.$$

4. 设 f 在点 x_0 具有任意阶导数,则函数 f 在区间 (x_0-r,x_0+r) 内等于其泰勒级数的和函数的充分条件是:对一切满足不等式 $|x-x_0|<r$ 的 x,有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

5. 常用的基本展开式有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty.$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$-\infty<x<+\infty.$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1<x<1.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1<x\leqslant 1.$$

疑 难 解 析

1. 将函数展开成幂级数的方法有哪些?

答 (1) 直接展开法　依据定义求出函数 f 的各阶导数,并研究其余项的敛散性,然后写出函数的泰勒(或麦克劳林)展开式.

但是,由于余项敛散性的确定比较困难,此法一般很少使用.

(2) 间接展开法　由某些已知的函数的幂级数展开式,利用四则运算、变量代换、逐项求积、逐项求导等方法求得所求函数的展开式.

一般常用$\frac{1}{1\pm x}$和五个基本展开式.其优点是比较简捷,收敛半径易于确定,不必讨论余项的敛散性.但在利用$\frac{1}{1\pm x}$来展开形如$\frac{1}{a\pm f(x)}$的函数展开式时,要认真讨论收敛区间.

(3) 待定系数法　将待求函数写成幂级数形式,利用两个幂级数相等时其同次幂系数相同的性质,通过比较确定待求幂级数的系数,从而求得函数展开式.

待定系数法常用于有关乘法和除法的公式的导出,过程比较繁琐.

方法、技巧与典型例题分析

怎样将一个函数展开成幂级数,我们已在疑难解析中作了回答,只要灵活运用合理的方法,不难求得函数的幂级数展开式.

例 1　几何级数

$$G(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

在 $|x|<1$ 时绝对收敛且一致收敛于和函数.证明:当 $|x|<$

$\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$时，有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是斐波那契(Fibonacci)数列.

证 因为，当 $|x|<\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ 时，有

$$\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right|<1,\quad \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right|<1,$$

所以，$G\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)$ 与 $G\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$ 一致收敛且绝对收敛，从而

$$G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)$$
$$=\left[1\Big/\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-1\Big/\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\cdots+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n+\cdots\right]$$
$$-\left[1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2+\cdots+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n+\cdots\right]$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]x^2+\cdots$$
$$+\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]x^n+\cdots,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]$$
$$=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots.$$

因为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$，所以 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是斐波那契数列(证明见上册).

此结果还表明，当$|x|<\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$时，有

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[G\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)-G\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)\right]=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

例 2 证明：积分正弦函数

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x-\frac{x^3}{3!3}+\frac{x^5}{5!5}-\frac{x^7}{7!7}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

证 因为，在$(-\infty,+\infty)$内有

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

而当$x\neq 0$时$\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\right)$，有

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

故上述幂级数在任一有限区间上一致收敛，得

$$\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

例 3 求下列函数的麦克劳林级数：

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$； (2) $\sin^3 x$；

(3) xe^{-x^2}； (4) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

解 本例中的函数均可直接或略加变化后利用基本展开式展开为幂级数.

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$

$$=\frac{1-x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)}$$

$$=\frac{1-x}{1-x^8}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{8n}-\sum_{n=0}^{\infty}x^{1+8n}$$
$$=1-x+x^8-x^9+\cdots+x^{8n}-x^{1+8n}+\cdots,\ |x|<1.$$

(2) $\sin^3x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ (-\infty,+\infty).$$

(3) $xe^{-x^2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!}\ (-\infty,+\infty).$

(4) $\frac{x}{1+x-2x^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right)$

$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n\right]$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(-1)^n2^n]x^n,\ |x|<\frac{1}{2}.$$

例 4 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $\arcsin x$；　　(2) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}$；

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cos x-1}{x}\right)$；　　(4) $x\arctan x-\ln\sqrt{1-x^2}$.

解 本例可用逐项求积与逐项求导的方法求解.

(1) $\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_0^x(1-t^2)^{-1/2}\mathrm{d}t$

$$=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1/2(-3/2)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}(-1)^nt^n\right]\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{2^n}[1\cdot3\cdots(2n-1)]t^{2n}\right\}\mathrm{d}t$$
$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1},\ |x|<1.$$

(2) $\arctan\frac{2x}{1-x^2}=\int_0^x\left(\arctan\frac{2t}{1-t^2}\right)'\mathrm{d}t$

$$= \int_0^x \frac{2}{1+t^2} dt = 2\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right] dt$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, |x| < 1.$$

(3) $\frac{\cos x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \ (-\infty, +\infty).$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2n-2}.$$

(4) $x\arctan x - \ln \sqrt{1-x^2} = \int_0^x \left[t\arctan t - \ln \sqrt{1-t^2} \right]' dt$

$$= \int_0^x \arctan t dt = \int_0^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2n-1} \right] dt$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^6}{5 \cdot 6} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n-1)2n} + \cdots.$$

例 5 求下列函数的幂级数展开式：

(1) $\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$； (2) $\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

解 本例可用待定系数法求解.

(1) 设 $y = \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 因为

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\left[1 - x \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \right],$$

所以 $(1+x^2)y' = 1 - xy$

$$\Rightarrow (1+x^2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = 1 - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

即 $a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=2}^{\infty} [a_{n+2}(n+1) + a_{n-1}(n-1)] x^n$

$$= 1 - a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n.$$

比较系数，得

$a_0 = 1$, $2a_2 = -a_0$, $3a_3 + a_1 = -a_1$, $4a_2 + 2a_2 = -a_2$, $\cdots$.

由 $y(0)=0 \Rightarrow a_0=0$ 得

$$a_{2n}=0,\ a_1=1,\ a_3=-\frac{2}{3},\ a_5=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5},\cdots,$$

$$a_{2n+1}=(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},\cdots,$$

从而 $$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1},\ -1<x\leqslant 1.$$

(2) 设 $y=\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,则

$$\begin{aligned}x\sin\alpha &= (1-2x\cos\alpha+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\\ &\quad-(2a_0\cos\alpha)x-(2a_1\cos\alpha)x^2-(2a_2\cos\alpha)x^3+\cdots\\ &\quad+a_0x^2+a_1x^3+\cdots.\end{aligned}$$

比较等式两边同次幂系数,得

$$a_0=0,\ a_1=\sin\alpha,\ a_2=\sin 2\alpha,\cdots,\ a_n=\sin n\alpha,\cdots,$$

这里利用了三角恒等式

$$\sin(n+1)\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha,\ n=2,3,\cdots.$$

所以 $$\begin{aligned}&\frac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\\ &=x\sin\alpha+x^2\sin 2\alpha+\cdots+x^n\sin n\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha.\end{aligned}$$

例 6 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $\ln^2(1-x)$; (2) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; (3) $e^x\sin x$;

(4) $e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$; (5) $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 本例可利用幂级数的运算求解.

(1) 因为 $\ln(1-x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x_n}{n},\ -1\leqslant x<1$,所以

$$\ln^2(1-x)=\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\right)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k+(n+1-k)}{k(n+1-k)}\right]x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+1-k}+\frac{1}{k}\right)\right]x^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^{n+1}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1},\ -1\leqslant x<1.$$

(2) 因为 $\arcsin x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n\cdot n(2n+1)}x^{2n+1}, |x|<1,$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots,\ |x|<1,$$

所以 $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= x+\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2}\right)x^3$$

$$+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)x^5+\cdots$$

$$= x+\frac{2}{1\cdot 3}x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x^5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}x^7+\cdots$$

$$= x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1},\ |x|<1.$$

(3) 因为 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}$，故

$$e^x\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{0!n!}+\frac{\sin[(n-1)\pi/2]}{1!(n-1)!}+\cdots+\frac{\sin(\pi/2)}{(n-1)!1!}\right\}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(n-k)\pi/2)]}{k!(n-k)!}\right\}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right]\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right]\frac{x^n}{n!}.$$

而由三角公式与棣莫弗公式,有

$$\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n=\left(2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$=2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

又由二项式公式与棣莫弗公式,有

$$\left[1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^n$$

$$=C_n^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+\cdots+C_n^{n-2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$+C_n^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^2+C_n^n.$$

比较两式的虚部,可得

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

从而 $$\mathrm{e}^x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty,+\infty).$$

(4) 由于 $\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ 是复数

$$\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\mathrm{e}^{x(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)}=\mathrm{e}^{x\cos\alpha+\mathrm{i}x\sin\alpha}$$

的实部,故有

$$\mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha).$$

比较上式两边的实部，即知

$$e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n\quad(-\infty,+\infty).$$

同时可得

$$e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n!}x^n\quad(-\infty,+\infty).$$

(5) $\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1+x)+\ln(1+x^2)$,

因为 $$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1<x\leqslant 1,$$

$$\ln(1+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n},\ -1\leqslant x\leqslant 1,$$

故 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{[m/2]-1}[1+(-1)^m]\frac{x^m}{m}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}+(-1)^{[m/2]-1}[1+(-1)^m]}{m}x^m.$$

例 7 求 $\sec x$, $\tan x$ 和 $\dfrac{x}{e^x-1}$ 的麦克劳林级数.

解 (1) $\sec x$ 是偶函数，幂级数只含偶次项，即

$$\sec x=E_0+\frac{E_1}{2!}x^2+\frac{E_2}{4!}x^4+\cdots+\frac{E_n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots.$$

由于 $\sec x\cos x=1$ 和 $\cos x$ 的展开式

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

故 $$\left(E_0+\frac{E_1}{2!}x^2+\frac{E_2}{4!}x^4+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)=1.$$

由 $$E_0=1,\ \frac{E_1}{2!}-\frac{E_0}{2!}=0,\ \frac{E_0}{2!}-\frac{E_1}{2!\ 2!}+\frac{E_2}{4!}=0,\ \cdots,$$

解得

$E_0=1$, $E_1=1$, $E_2=5$, $E_3=61$, $E_4=1385$, $E_5=50521$, ….

系数 E_j 称为欧拉系数.

(2) $\tan x$ 是奇函数,幂级数只含奇次项,即

$$\tan x = T_1 x + \frac{T_2}{3!}x^3 + \frac{T_3}{5!}x^5 + \cdots + \frac{T_n}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots.$$

由于 $\tan x=\sin x\sec x$,故

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)\left(E_0 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \cdots\right)$$

$$= T_1 x + \frac{T_2}{3!}x^3 + \frac{T_3}{5!}x^5 + \cdots.$$

由 $T_1 = E_0,\ T_2 = 3!\left(\frac{E_1}{2!} - \frac{E_0}{3!}\right),\ T_3 = 5!\left(\frac{E_2}{4!} - \frac{E_1}{2!3!} + \frac{E_0}{5!}\right),\cdots,$

解得 $\qquad T_1=1,\ T_2=2,\ T_3=16, T_4=272,\cdots.$

系数 T_i 称为正切系数.

(3) 因为 $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{n!}$,则

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}.$$

设 $$\frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!}x^n,$$

则 $$\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots\right)\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{1!}x + \frac{\beta_2}{2!}x^2 + \cdots\right) = 1.$$

比较同次幂系数,得

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_2 = \frac{1}{6},\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = -\frac{1}{30},\cdots.$$

当 $n\geqslant 1$ 时,$\beta_{2n+1}=0$.

$B_n=(-1)^{n+1}\beta_{2n}$称为伯努利(Bernoulli)数,有

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\cdots.$$

例 8 将下列函数在指定点展开为泰勒级数:

(1) $\frac{1}{x^2+4x+3},\ x_0=1$; (2) $\ln\frac{1}{x^2+2x+2},\ x_0=-1$;

(3) $\ln \dfrac{x}{1+x}$, $x_0=1$;　　　　(4) $\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$.

解　展开 $f(x)$ 的幂级数时，首先要将 $f(x)$ 变形，使之出现 $(x-x_0)$ 的因式. 一般利用已知展开式展开，特别要注意对收敛区间的讨论.

(1) $$\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{(x+3)(x+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-1)/2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+(x-1)/4}\right]$$
$$=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n,$$

由 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|<1$ 和 $\left|\dfrac{x-1}{4}\right|<1$ 得，收敛区间为 $(-1,3)$.

(2) $$\ln\frac{1}{x^2+2x+3}=-\ln[1+(x+1)^2]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x+1)^{2n},$$

由 $-1<(x+1)^2\leqslant 1$ 得，收敛区间为 $(-2,0]$.

(3) $$\ln\frac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)$$
$$=\ln[1+(x-1)]-\ln[2+(x-1)],$$

因为 $\ln[1+(x-1)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$, $0<x<2$,

$$\ln[2+(x-1)]=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n2^n},\ -1<x\leqslant 3.$$

故　$$\ln\frac{x}{1+x}=-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n.$$

由 $0<x\leqslant 2$ 和 $-1<x\leqslant 3$ 得，收敛区间为 $(0,2]$.

(4) $$\frac{1}{x}=\frac{1}{2+(x-2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+(x-2)/2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}.$$

由 $|x-2|<2$ 得，收敛区间为 $(0,4)$.

例 9 将下列函数在指定点展开为泰勒级数：

(1) $\cos x$，$x_0=\pi/4$；　(2) $\cos(2x+\pi/4)$，$x_0=0$；

(3) $\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$，$x_0=0$.

解 解法同上例.

(1)
$$\begin{aligned}\cos x&=\cos[\pi/4+(x-\pi/4)]\\&=\cos(\pi/4)\cos(x-\pi/4)-\sin(\pi/4)\sin(x-\pi/4)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/4)^{2n}}{(2n)!}\\&\quad-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-\pi/4)^{2n-1}}{(2n-1)!!}\Big]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n\quad(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\cos(2x+\pi/4)&=\cos(\pi/4)\cos 2x-\sin(\pi/4)\sin 2x\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n-1}}{(2n-1)!!}\Big]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{2^nx^n}{n!}\quad(-\infty,+\infty).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x\\&=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-x\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t-x\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n+1}-x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}x^{4n+1}\quad(-1,1).\end{aligned}$$

例 10 将函数 $f(x)=\ln x$ 按分式$\frac{x-1}{x+1}$的正整数幂展开成幂级数.

解 当 $x\neq-1$ 时,$\ln x=\ln\left[\left(1+\frac{x-1}{x+1}\right)\Big/\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)\right]$. 因为

$$\ln\frac{1+u}{1-u}=2\left(u+\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5+\cdots\right),\ |u|<1,$$

所以
$$\ln x=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1^5}{x+1}\right)+\cdots\right]$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1}.$$

由$\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$ 得,收敛区间为$(0,+\infty)$.

例 11 将函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$按分式$\frac{x}{1+x}$的正整数幂展开成幂级数.

解
$$f(x)=\frac{x}{1+x}\sqrt{1+x}=\frac{x}{1+x}\cdot 1/\sqrt{1-x/(1+x)}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left(1-\frac{x}{1+x}\right)^{-1/2}\text{(用}(1+x)^a\text{的展开式)}$$
$$=\frac{x}{1+x}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n\right]$$
$$=\frac{x}{1+x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{n+1}.$$

由$\left|\frac{x}{1+x}\right|<1$ 知,$x>-1/2$,而 $x=-1/2$ 时,级数条件收敛,故级数的收敛区间为$[-1/2,+\infty)$.

幂级数常用来求极限,计算积分,证明不等式或等式,作近似计算等,以下通过例题来讨论幂级数的应用问题.

例 12 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$, $a>1$.

解 设 $$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\ |x|<1.$$

$$S(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{x}{(1-x)^{2}},\ |x|<1.$$

因为 $a>1$,所以 $1/a<1$,从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^{n}}=S\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{(1-a)^{2}},\ a>1.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a}+\cdots+\frac{n}{a^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}S_{n}=\frac{a}{(1-a)^{2}}.$$

例 13 利用函数的幂级数展开求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^{3}x}$;

(3) $\lim_{x\to\infty}n\left[x-x^{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 (1) 先求 $\ln_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

$$\lim_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{3}}-\cdots\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^{2}}-\cdots\right)=1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}n[\ln(n+1)-\ln n]=1.$$

(2) $\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^{n}n!(2n+1)}x^{2n+1}$(见例 4(1)),

$$\sin^{3}x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}\text{(见例 3(2))}.$$

代入$\frac{x-\arcsin x}{\sin^{3}x}$,即得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!(2n+1)}x^{2n+1}}{\frac{3}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-3^{2n})}{(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots\right)}{\frac{3}{4}\left[\frac{-1\cdot(-8)}{3!}x^3+\cdots\right]}=-\frac{1}{6}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[x-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\cdots\right]=\frac{1}{2}.$$

例 14 讨论 c 为何值时,以下不等式成立.

$$e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{cx^2},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

解 因为由 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 可得

$$e^x+e^{-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\leqslant 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}=2e^{x^2/2},$$

所以,当 $c\geqslant 1/2$ 时,有 $e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{x^2/2}$.

反之,因为

$$0\leqslant\lim_{x\to 0}\frac{2e^{cx^2}-(e^x+e^{-x})}{2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+cx^2+\cdots)-2(1+x^2/2+\cdots)}{2x^2}=c-\frac{1}{2}.$$

故,当且仅当 $c\geqslant 1/2$ 时,$e^x+e^{-x}\leqslant 2e^{cx^2}$ 成立.

例 15 证明:对每一正整数 k,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ 是 e 的整数倍.

证 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$,则所求为 $f(1)$.

因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$在$(-\infty,+\infty)$内收敛,可逐项积分,故

$$f(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}x^{n-1}=xf_1(x),$$

$$\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{n!}x^{n-1}=xf_2(x),$$

……

$$\int_0^x f_{k-1}(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}=xf_k(x),$$

而
$$\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x-1,$$

于是
$$f(x)=\underbrace{x(\cdots(x(x(\mathrm{e}^x-1)')')'\cdots)'}_{k次},$$

即$f(x)=P_k(x)\mathrm{e}^x$,$P_k(x)$是x的整系数多项式. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=f(1)=P_k(1)\cdot\mathrm{e}.$$

这里,$P_k(1)$是整数.

例 16 已知当$\alpha>1$时,$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}$,

证明:$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\pi$, $n=1,2,\cdots$.

证 将已知等式两边按$1/\alpha$的幂次展开,有

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1-x/\alpha)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-1}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}\int_{-1}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{2n+1}}\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \quad (奇函数积分为零).$$

这里,$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$关于$x$在$(-1,1)$内闭一致收敛,故

$\forall\ [a,b]\subset(-1,1)$，级数在$[a,b]$上可逐项积分. 其中$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}$收敛，$\left|\int_a^b\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\right|\leqslant\pi$（有界），依阿贝尔判别法，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^n}\int_a^b\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$关于$a,b\in[-1,1]$一致收敛. 取极限，即知等式合理.

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-1}}=\frac{\pi}{\alpha}\left(1-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{-1/2}=\frac{\pi}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{1}{\alpha^{2n}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\cdot\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}.$$

比较两式同次幂系数，即得

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi\quad(n=1,2,\cdots).$$

例 17 计算积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解 $$\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}\ln x\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\ln x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{x^2}{1-x^2}\ln x\mathrm{d}x$$
$$=-1+\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x.$$

因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$虽然在$[0,1]$上不一致收敛，但在$[0,1]$上可逐项积分. 事实上，在$(0,1)$内，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$为等比级数，有

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1-x^2}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$$

故$S(1-0)\neq S(0)$，级数不一致收敛. 而

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}\ln x=\frac{x^2}{1-x^2}\ln x\cdot x^{2n},$$

$\frac{x^2\ln x}{1-x^2}$在(0,1)内有界，即$|R_n(x)|\leqslant Mx^{2n}$，从而

$$\left|\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|R_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^1 x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x)\mathrm{d}x=0.$$

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x&=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\mathrm{d}x\\&=-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\\&=-\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right]+\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{24}=-\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

例 18 计算积分$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$.

解 $\ln\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,\ |x|<1,$

级数在$|x|\leqslant r$ $(r<1)$上一致收敛，故可以逐项积分. 当$x<1$时，有

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots,$$

而当$x=1$时，有

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\\&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=1.\end{aligned}$$

依阿贝尔定理，有

$$\lim_{x\to 1-0}\int_0^x \ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = \lim_{x\to 1-0}\left[\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\cdots\right] = 1,$$

即
$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x = 1.$$

例 19 证明：$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n!}$.

证 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\cos x+\mathrm{i}\sin x} = \mathrm{e}^{\cos x}[\cos(\sin x)+\mathrm{i}\sin(\sin x)]$,

故 $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\cos nx\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\cos nx\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}\right)\mathrm{d}x.$$

而级数$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}$在$[0,2\pi]$上一致收敛，于是

$$\mathrm{Re}\int_0^{2\pi}\cos nx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{k!}\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_0^{2\pi}\cos nx(\cos kx+\mathrm{i}\sin kx)\mathrm{d}x.$$

由三角函数系的正交性，因为

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\cos kx\mathrm{d}x = \begin{cases}\pi & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos nx\sin kx\mathrm{d}x = 0,$$

所以
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\cos(\sin x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n!}.$$

第九章　傅里叶级数

第一节　傅里叶级数展开式

主要内容

1. 若函数 $f(x)$，$g(x)$在区间$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则称函数 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上正交.

具有正交性的函数系称为正交函数系.

三角函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\cdots$$

在$[-\pi,\pi]$上正交，称为三角函数正交系.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x = 0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

而　$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nx\mathrm{d}x = \pi,\quad \int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x = 2\pi.$$

2. 由三角函数系所产生的形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

的级数称为三角级数.

若级数$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$收敛,则三角级数在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

3. 设函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,在$[-\pi,\pi]$上可积,且在$[-\pi,\pi]$上对应一个三角级数,即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots,$$

其中 a_n,b_n 称为 $f(x)$的傅里叶系数,级数称为 $f(x)$的傅里叶级数.

4. 狄利克雷定理　若以 2π 为周期的函数 f 在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,则在每一个点 $x\in[-\pi,\pi]$,f 的傅里叶级数收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

该定理也可写成:若函数 f 在$[-\pi,\pi]$上分段单调,且除有限个间断点外连续,则其傅里叶级数在区间$[-\pi,\pi]$上收敛,其和函数为

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{ 是 }f\text{ 的连续点},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{ 是 }f\text{ 的间断点},\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

疑 难 解 析

1. 怎样对函数进行傅里叶级数展开?

答　首先考虑函数的定义区间和是否满足收敛定理的条件.

(1) 如果 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$内以 2π 为周期的函数，且满足收敛定理条件，则可直接依定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(2) 若函数 $f(x)$定义在区间$[-\pi,\pi]$或$[0,2\pi]$上，则应理解为 $f(x)$是定义在整个数轴上以 2π 为周期的函数. 即对$[-\pi,\pi]$以外部分按函数在$(-\pi,\pi]$上的对应关系作周期延拓(不必写出). 例如，$f(x)$为定义在$(-\pi,\pi]$上的函数，则经周期延拓后的函数是

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & -\pi<x\leqslant\pi,\\ f(x-2k\pi), & (2k-1)\pi<x\leqslant(2k+1)\pi.\end{cases}$$

这个过程在解题时不必写出，然后按收敛定理写出傅里叶级数并确定和函数.

(3) 若 $f(x)$是定义在$(-\pi,\pi]$上的奇函数(或偶函数)，则 $a_n=0$(或 $b_n=0$)，在连续点上

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx\left(\text{或 } f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx\right).$$

若 $f(x)$只定义在$(0,\pi]$上，则可先作奇延拓(或偶延拓)即延拓为$(-\pi,\pi]$上的奇函数(或延拓为$(-\pi,\pi]$上的偶函数)，然后再展开成傅里叶正弦级数(或余弦级数).

2. 傅里叶级数的实质是否在于积分区间?

答 傅里叶级数的实质不在于积分区间，而在于所选的函数系是三角函数正交系. 当改变积分区间时，只要选择不同的三角函数正交系就行. 在区间$[a,b]$上要得到 $f(x)$的傅里叶级数，就要取规范正交函数系，如

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},\ \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{2\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{2\pi x}{l},\ \cdots,$$

$$l=\frac{1}{2}(b-a).$$

此时，相应地有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

其中 $$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

方法、技巧与典型例题分析

函数的傅里叶级数一般按疑难解析 1 中所述方法即可求出. 但在计算傅里叶系数时,要特别注意积分的技巧和对下标 n 的讨论,有时还要讨论傅里叶级和函数的连续性与级数在区间上的收敛或一致收敛性,讨论中可用到函数项级数的性质与判别法.

例 1 设 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 的傅里叶级数;

(2) 级数是否收敛? 是否收敛于 $f(x)$?

(3) 级数在 $(-\pi,\pi)$ 内是否一致收敛?

解 (1) 由傅里叶系数公式,得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n\pi}\sin n\pi\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m,\\ \dfrac{2}{(2m+1)\pi}, & n=2m+1,\end{cases}\quad m=0,1,2,\cdots,$$

所以 $$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)x.$$

(2) $f(x)$ 满足收敛定理条件,所以 $f(x)$ 的傅里叶级数在数轴上处处收敛. 在 $[-\pi,\pi]$ 上

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\pi$$

$$=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,0]\cup(0,\pi],\\ 1/2, & x=0.\end{cases}$$

(3) 因为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $(-\pi,\pi)$ 内不连续，所以级数在 $(-\pi,\pi)$ 内不一致收敛.

例 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的可积函数，在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数为 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，证明：平移后的函数 $f(x+h)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)\sim\frac{\tilde{a}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{a}_n\cos nx+\tilde{b}_n\sin nx).$$

其中 $\tilde{a}_n=a_n\cos nh+b_n\sin nh,\quad n=0,1,2,\cdots,$

$\tilde{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh,\ n=1,2,\cdots.$

证
$$\tilde{a}_n=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+h)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h}f(t)[\cos nt+\cos nh+\sin nt\sin nh]\mathrm{d}t$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\cos nh\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\mathrm{d}t+\sin nh\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right]$$
$$=a_n\cos nh+b_n\sin nh,\ n=0,1,2,\cdots.$$

类似可得 $\tilde{b}_n=b_n\cos nh-a_n\sin nh,\ n=1,2,\cdots.$

例 3 设 $f(x),g(x)$ 均为可积函数. 证明：若 $f(-x)=g(x)$，且 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则

$$g(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx-b_n\sin nx).$$

证 因为，对 $g(x)$，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} g(x)\cos nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi} g(-t)\cos nt\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} g(t)\cos nt\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx = a_n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} g(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{\pi}^{0} g(-t)\sin nt\mathrm{d}t + \int_{0}^{-\pi} g(-t)\sin nt\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -b_n,$$

所以
$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx - b_n\sin nx).$$

类似可证:若 $f(-x) = -g(x)$,且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则
$$g(x) \sim \frac{-a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

例 4 设函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上光滑,证明:

(1) 若 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(\pi - x) = -f(x)$,则函数的傅里叶级数是 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x$;

(2) 若 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(\pi - x) = f(x)$,则函数的傅里叶级数是 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x$.

证 (1) 若 $f(-x) = f(x)$ 或 $f(\pi - x) = -f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数,$b_n = 0, n = 1,2,\cdots$. 而

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\int_{0}^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\right],$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x\right].$$

设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，于是

$$\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^{0}f(\pi-t)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^{0}f(\pi-t)\cos 2nt\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\cos 2nx\mathrm{d}x.$$

所以

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(\pi-x)]\mathrm{d}x=0,$$

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}f(\pi-x)\cos 2nx\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(\pi-x)]\cos 2nx\mathrm{d}x=0,$$

从而

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\cos(2n-1)x.$$

(2)请读者自己用类似方法证明.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，证明：

(1) 若 $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$f(x+\pi)=f(x)$，则 $a_{2k-1}=b_{2k-1}=0$；

(2) 若 $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$f(x+\pi)=-f(\pi)$，则 $a_{2k}=b_{2k}=0$.

其中 a_i,b_i 都是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

证 (1) 依傅里叶系数公式

$$a_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x\right],$$

$$b_{2k-1}=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x\right],$$

设 $x=\pi-t$，则 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\cos(2k-1)t\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos(2k-1)x\mathrm{d}x,$$
$$\int_0^{\pi} f(x)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{0} f(t+\pi)\sin(2k-1)t\mathrm{d}t$$
$$= -\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin(2k-1)x\mathrm{d}x.$$

将后两式结果代人前两式中,即得

$$a_{2k-1} = 0, \quad b_{2k-1} = 0.$$

(2)用类似方法可证.

例 6 设 $f(x) = \begin{cases} x+2\pi & -\pi < x < 0, \\ \pi & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$

将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

解法 1 依常规方法计算傅里叶系数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{x^2}{2}+2\pi x\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right] = 2\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\cos nx\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} x\cos nx\pi\mathrm{d}x\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}(x+2\pi)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\mathrm{d}x\right.$$
$$\left. + \frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(x+2\pi)\sin nx\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x+2\pi}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\cos nx\,\mathrm{d}x\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi}{n} + \frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n\right] = -\frac{2}{n},$$

故
$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ -\pi < x \leqslant \pi.$$

解法 2 利用周期函数特性($f(t)$ 以 l 为周期，则$\int_{a}^{a+l}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关)，令 $F(x) = x$，计算傅里叶系数.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_{0}^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{0}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{0}^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}x\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(-\frac{x}{n}\cos nx\right)\Big|_{0}^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{0}^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{2}{n},$$

故
$$f(x) = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ -\pi < x \leqslant \pi.$$

解法 3 利用函数的奇偶性，记

$$\varphi(x) = f(x) - \pi = \begin{cases} x+\pi, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-\pi, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$为奇函数,先求 $\varphi(x)$的傅里叶级数.

$$a_0=0,\quad a_n=0,$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x-\pi}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{2}{n},\end{aligned}$$

故
$$\varphi(x)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,$$

从而
$$f(x)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ -\pi<x\leqslant\pi.$$

三种解法求得的傅里叶级数是一致的,但计算的繁简程度却不同.解法 1 要计算六个定积分,解法 2 要计算三个定积分,解法 3 只计算一个定积分:自然是解法 3 最好.但解法 3 往往不易想到.这时,我们可以先作出 $f(x)$的图形,然后借助函数的图形特性,特别是考察函数的奇偶性,选择适当的解法.这样可以极大的简化傅里叶系数的计算.

例 7 将下列函数展开为傅里叶级数:

(1) $f(x)=x^2,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$;

(2) $f(x)=2\sin(x/3),\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(3) $f(x)=\mathrm{e}^x+1,\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(4) $f(x)=|x|,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi$.

解 本例的函数是比较简单的.先考察函数是否符合收敛定理,是否奇偶函数;再计算傅里叶系数,求出和函数.

(1) $f(x)=x^2,-\pi\leqslant x\leqslant\pi$,符合收敛定理条件,且 $f(x)$为偶函数.故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}(\sin nx)\xlongequal{\text{分部}}(-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

因为 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,所以

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

(2) $f(x)=2\sin(x/3)$，$-\pi\leqslant x<\pi$，符合收敛定理条件，且 $f(x)$是奇函数. 故 $a_0=0, a_n=0$.

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2\sin\frac{x}{3}\sin nx\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(1/3-n)x-\cos(1/3+n)x]\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1/3)x}{n-1/3}-\frac{\sin(n+1/3)x}{n+1/3}\right]\Bigg|_0^{\pi}\\
&=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(n-1/3)\pi}{n-1/3}-\frac{\sin(n+1/3)\pi}{n+1/3}\right)\\
&=\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{-\cos n\pi}{3n-1}-\frac{\cos n\pi}{3n+1}\right)\\
&=(-1)^{n-1}\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n+1}\right)\\
&=(-1)^{n-1}\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{n}{9n^2-1}.
\end{aligned}$$

因为 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，所以

$$f(x)=\frac{18\sqrt{3}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{9n^2-1}\sin nx,\ |x|<1.$$

(3) $f(x)=\mathrm{e}^x+1$，$-\pi\leqslant x+\pi$，符合收敛定理条件. 故

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}+2\pi],$$

$$\begin{aligned}
a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x\cos nx+\cos nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^x}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)+\frac{1}{n}\sin nx\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\pi}\cos n\pi}{1+n^2}-\frac{\mathrm{e}^{-\pi}\cos(-n\pi)}{1+n^2}\right]=\frac{(-1)^n}{\pi(1+n^2)}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}),
\end{aligned}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x+1)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\mathrm{e}^x\sin nx+\sin nx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^x}{1+n^2}(\sin nx - n\cos nx)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-ne^{\pi}}{1+n^2}\cos n\pi + \frac{ne^{\pi}}{1+n^2}\cos(-n\pi)\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi}).$$

因为 $f(-\pi)\neq f(\pi)$，且 $\mathrm{sh}\pi=(e^{\pi}-e^{-\pi})/2$，故

$$f(x)= \frac{1}{2\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi} + 2\pi] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi})\cos nx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{\pi(1+n^2)}(e^{\pi} - e^{-\pi})\sin nx$$

$$= 1 + \frac{\mathrm{sh}\pi}{\pi} + \frac{2\mathrm{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx),\ |x| < \pi.$$

(4) $f(x)=|x|$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，符合收敛定理条件，且 $f(x)$ 是偶函数. 故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x d\sin nx$$

$$\xlongequal{\text{分部}} \frac{2}{n\pi}\left[x\sin nx - \frac{1}{n}\cos nx\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$= \frac{(-4)}{(2k+1)^2\pi},\ k = 0,1,2,\cdots.$$

因为 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，所以

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\ |x| \leqslant \pi.$$

例 8 展开函数 $f(x)=\arcsin(\sin x)$ 为傅里叶级数.

解 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，化为

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & -\pi \leqslant x < -\pi/2, \\ x, & -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x \leqslant \pi. \end{cases}$$

显然，$f(x)$是奇函数. 故 $a_0=0, a_n=0$.

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin nx\mathrm{d}x + (-1)^{n+1}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{2}{\pi}[1 + (-1)^{n+1}]\int_0^{\pi/2} x\sin nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{2[1 + (-1)^{n+1}]}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k = 1, 2\cdots.
\end{aligned}
$$

因为 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内连续，所以

$$
\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x,\ -\infty < x < +\infty.
$$

例 9 将下列函数展开为傅里叶级数：

(1) $f(x)=3x^2+1,\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(2) $f(x)=\mathrm{e}^x,\ -\pi\leqslant x<\pi$;

(3) $f(x)=\pi^2-x^2,\ -\pi<x\leqslant\pi$;

(4) $f(x)=\begin{cases} bx, & -\pi\leqslant x<0, \\ ax, & 0\leqslant x<\pi. \end{cases}$

解 (1) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\mathrm{d}x = 2(\pi^2+1)$,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\cos nx\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(3x^2+1)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{6x}{n}\sin nx\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{6}{n^2\pi}\left[x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{12}{n^2}(-1)^n - \frac{6}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = (-1)^n\frac{12}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(3x^2+1)\sin nx\mathrm{d}x \xlongequal{\text{奇函数}} 0.$$

故 $$f(x) = \pi^2 + 1 + 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\ (-\infty, +\infty).$$

(2) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}) + \frac{n}{4\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi} - \frac{n^2}{4}a_n = \frac{2(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\mathrm{e}^{2x}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}n\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{n}{2}a_n = -\frac{n(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi})}{(n^2+4)\pi}.$$

故 $$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx - n\sin nx)\right],$$

其中 $x \neq (2n+1)\pi$，$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(3) $f(x)$为偶函数，故 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{2}{\pi}(\pi^2 - x^2)\frac{\sin nx}{n}\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{x(-\cos nx)}{n}\right]\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2},$$

故 $$\pi^2 - x^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\ -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

若令 $x=\pi$，则由

$$0=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi=\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n^2},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(4) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ax\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(a-b)$，

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\cos nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{b}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{a}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right]\bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{1}{n^2\pi}(b-a)(1-\cos n\pi)=\frac{b-a}{n^2\pi}[1-(-1)^n],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}bx\sin nx\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}ax\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{b}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]\bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{b}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)+\frac{a}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi\right)=\frac{a+b}{n}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

故

$$f(x)=\frac{\pi}{4}(a-b)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}(a+b)}{n}\sin nx\right\},$$

其中 $x\neq(2n+1)\pi$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

例 10 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，其傅里叶系数为 a_0，a_n，b_n.

(1) 求函数 $G(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$ 的傅里叶系数 A_0，A_n，B_n；

(2) 利用题(1)的结果证明巴塞瓦(Parseval)等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

解 因为 $G(x+2\pi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(2\pi+x+t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t=G(x),$$

所以 $G(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，符合收敛定理条件.

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t\ (令\ x+t=u)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a_0}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t=a_0^2.$$

$$A_n=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t\ (令\ x+t=u)$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\cos n(u-t)\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi+t}^{\pi+t}\cos nt f(u)\cos nu\mathrm{d}u\right.$$

$$\left.+\int_{-\pi+t}^{\pi+t}\sin nt f(u)\sin nu\mathrm{d}u\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos nt f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin nt f(t)\mathrm{d}t$$

$$=a_n^2+b_n^2.$$

同样可得 $B_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}G(x)\sin nx\mathrm{d}x=a_nb_n-a_nb_n=0.$

(2) 由题(1) 得 $G(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx$，在 $G(x)$ 中令 $x=0$，得

$$G(0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)\mathrm{d}t=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

即 $$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

例 11 将下列函数展开为傅里叶级数：

(1) $f(x)=|\sin x|$； (2) $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi+x}{2}, & -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$

解 (1) $|\sin x|$是偶函数，故 $b_n=0$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{\pi} - \cos x\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x]\mathrm{d}x \ (n \neq 1) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right] \\ &= \begin{cases} -\dfrac{4}{(n^2-1)\pi}, & n = 2,4,\cdots, \\ 0, & n = 3,5,\cdots, \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin^2 x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 0.$$

所以 $$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{15}\cos 4x - \frac{1}{35}\cos 6x - \cdots\right), \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) $f(x)$是奇函数，故 $a_0=0, a_n=0$.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi - x}{2n}\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

所以，在$[-\pi,0]\cup(0,\pi)$上，有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx.$$

$f(x)$在 $x=0$ 间断,其傅里叶级数收敛于

$$\frac{f(0+0)+f(0-0)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

下面我们讨论不是定义在$[-\pi,\pi]$上的函数展开为傅里叶级数的例子.

当 $f(x)$是$[0,\pi]$上分段光滑的奇函数(或偶函数)时,它的傅里叶级数是正弦级数(或余弦级数),但在展开前要先对函数作奇延拓(或偶延拓).所得级数在全数轴上收敛,在$(0,\pi)$内函数的连续点上收敛于函数本身.

例 12 展开下列函数为指定的傅里叶级数:

(1) $f(x)=(\pi-x)/2$, $x\in[0,\pi]$,正弦级数;

(2) $f(x)=x^2$, $x\in(0,\pi)$,正弦级数;

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\pi/2),\\ \pi-x, & x\in[\pi/2,\pi],\end{cases}$ 余弦级数;

(4) $f(x)=\begin{cases}3x/2, & x\in[0,\pi/3],\\ \pi/2, & x\in(\pi/3,2\pi/3),\\ 3(\pi-x)/2, & x\in(2\pi/3,\pi],\end{cases}$ 正弦级数.

解 (1) 作奇延拓,再作周期延拓,故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x, \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx - \frac{1}{2n^2}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

故
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx,\ 0 < x \leqslant \pi.$$

级数在 $x=0$ 收敛于

$$\frac{-\pi/2+\pi/2}{2} = 0.$$

(2) 作奇延拓,再作周期延拓,即考虑 $f(x)=x|x|$ $(-\pi<x$

<π)的傅里叶展开，故

$$a_0 = 0,\quad a_n = 0.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx \mathrm{d}x \\
&= -\frac{2x^2}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^2\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx \mathrm{d}x\right] \\
&= (-1)^{n-1}\frac{2\pi}{n} + \frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n - 1].
\end{aligned}$$

故
$$2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$$
$$= \begin{cases} x^2, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$

(3) 作偶延拓，再作周期延拓，故 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\pi - x\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{\pi}{4},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cos nx \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} \\
&= \frac{-2}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi}(-1)^n + \frac{2}{n^2\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} \\
&= -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{-2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right],
\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = \frac{\pi}{8} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right]\cos nx,$$
$$x \in [0,\pi/2) \cup (\pi/2,\pi].$$

在 $x=\pi/2$，级数收敛于$\frac{1}{2}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$.

(4) 作奇延拓，再作周期延拓，故 $a_0=0, a_n=0$.

$$b_0=\frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/3}\frac{3}{2}x\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{\pi}{2}\sin nx\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\int_{2\pi/3}^{\pi}\frac{3}{2}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi/3}+\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{\pi/3}^{2\pi/3}$$
$$+3\left[-\frac{1}{n}\cos x\right]\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}-\frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_{2\pi/3}^{\pi}$$
$$=\frac{3}{n^2\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{2n\pi}{3}\right)=\frac{6}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{6}$$
$$=\frac{6}{\pi(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}.$$

故

$$f(x)=\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)^{\pi}}{6}\sin(2n-1)x,$$
$$0\leqslant x\leqslant\pi.$$

例 13 证明：在$[0,\pi]$上，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2).$$

证 将函数 $f(x)=3x^2-6\pi x$ 作偶延拓，展开为余弦级数，故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\mathrm{d}x=-4\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\cos x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[3\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x-6\pi\int_0^{\pi}x\cos x\mathrm{d}x\right]$$
$$=\frac{2}{\pi}\left[3\left(\frac{\pi}{n^2}2\cos n\pi\right)-6\pi\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{12}{n^2}.$$

故 $$3x^2-6\pi x=-2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{n^2}\cos nx,$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2).$$

例 14 证明：在$[0,\pi]$上，有

(1) $x(\pi-x)=\dfrac{\pi^2}{6}-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}$；

(2) $x(\pi-x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$.

证 考虑其正弦级数与余弦级数.

(1) 对 $f(x)=x(\pi-x)$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，作偶延拓，故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\mathrm{d}x=\left[x^2-\frac{2x^3}{3\pi}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=2\left[\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{x}{n}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$
$$-\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n^2}(nx\sin nx+2\cos nx)-\frac{2}{n}\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$
$$=2\left[\frac{1}{n^2}(-1)^n-\frac{1}{n^2}\right]-\frac{4}{n^2}(-1)^n$$
$$=\frac{2}{n^2}(-1)^{n+1}-\frac{2}{n^2}=\frac{-4}{(2n)^2}.$$

所以，$f(x)=x(\pi-x)$在$[0,\pi]$上的余弦级数为
$$x(\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n)^2}\cos 2nx=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 2nx.$$

(2) 对 $f(x)=x(\pi-x)$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，作奇延拓. 故
$$a_0=0,\qquad a_n=0.$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\pi\int_0^{\pi}x\sin nx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin^2 nx\mathrm{d}x$$
$$=2\left[\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$-\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n^2}(2\sin x - nx\cos nx) + \frac{2}{n^2}\cos nx\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{2\pi}{n}(-1)^n + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]$$

$$= \frac{8}{\pi(2n-1)^3}.$$

所以，$f(x)=x(\pi-x)$在$[0,\pi]$上的正弦级数为

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x.$$

例 15 利用上例结果证明：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

证 令 $x=\pi/2$，分别代入 $x(\pi-x)$的正弦级数与余弦级数，可得

$$(1)\ \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n(\pi/2)}{n^2},$$

即
$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$(2)\ \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\cdot(\pi/2)}{(2n-1)^3}$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi - \pi/2)}{(2n-1)^3}.$$

因为 $\sin\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin n\pi\cos\frac{\pi}{2} - \cos n\pi\sin\frac{\pi}{2} = (-1)^{n-1}$,

所以
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

例 16 证明：在$(0,\pi)$内，有

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)}{2n-1} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

并求等式右边级数之和.

证 将 $f(x)=\pi/4$ 展开为正弦级数.故

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2n}[1-(-1)^n] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \dfrac{1}{2k-1}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \cdots.$$

在上式中令 $x=\pi/2$,即得

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n+1} + \cdots.$$

利用傅里叶级数还可以求数项级数的和,就是把所求数项级数的和化为傅里叶级数在某一点的值.解题的关键在于能适当地选择一点(有时还要选择一个适当的函数),使得傅里叶级数的和函数在该点的值恰好等于所求数项级数之和.

例 17 在$(-\pi,\pi)$内将 $f(x)=|x|$ 展开为傅里叶级数,并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解 $f(x)=|x|$是偶函数,故 $b_n=0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-1}{n^2}.$$

因为在$(-\pi,\pi)$内 $f(x)$分段光滑且连续,故

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n+1)x + \cdots\right).$$

令
$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots,$$
$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots,$$
$$S_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots,$$
$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots.$$
在 $f(x)$ 中令 $x=0$，有
$$S_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$
而
$$\begin{cases} S_1 = S_2 + S_3 = \pi^2/8, \\ 3S_2 - S_1 = 0(\text{由 } S_2 = S/4 = (S_1 + S_2)/4), \end{cases}$$
得
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = S_2 = \frac{S_1}{3} = \frac{\pi^2}{24},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} = S_3 = \frac{\pi^2}{12}.$$

例 18 将 $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开为傅里叶级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解 $f(x)$ 是偶函数，故 $b_n=0$.
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} dx = 1,$$
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{e^\pi - e^{-\pi}} \cos nx dx \\ &= \frac{1}{e^\pi - e^\pi}\left[\int_0^\pi e^x \cos nx dx + \int_0^\pi e^{-x} \cos nx dx\right] \\ &= \frac{1}{e^\pi - e^{-\pi}}\left[\frac{e^\pi \cos n\pi}{1+n^2} - \frac{1}{1+n^2} + \frac{e^{-\pi}(-\cos n\pi)}{1+n^2} - \frac{(-1)}{1+n^2}\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{(1+n^2)}. \end{aligned}$$

而 $$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi+0)}{2}=f(\pi)=f(-\pi).$$

故 $$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx,\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

当取 $x=\pi/2$ 时，有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+4^2}-\cdots+\frac{1}{1+(2n)^2}+\cdots,$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi/2}+e^{-\pi/2}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}-\frac{1}{2}.$$

例 19 将$[0,2\pi]$上周期为 2π 的函数 $f(x)=\frac{x}{4}(2\pi-x)$ 展开为傅里叶级数，并求出$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 和$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

解 $$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos nx\mathrm{d}x-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos x\mathrm{d}x=-\frac{1}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\sin nx\mathrm{d}x-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

因为 $f(0+0)=f(2\pi-0)$，所以

$$\frac{x}{4}(2\pi-x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

令 $x=0$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

因为$\frac{x}{4}(2\pi-x)-\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n^2}\cos nx$，逐项积分，有

$$\int_0^x\left[\frac{t}{4}(2\pi-t)-\frac{\pi^2}{6}\right]\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^x\cos nt\mathrm{d}t,$$

解得 $\frac{1}{6}\pi^2 x-\frac{1}{4}\pi x^2+\frac{x^3}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin nx,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$

再逐项积分两次,得在[0,2π]上有

$$-\frac{1}{36}\pi^2 x^3+\frac{1}{48}\pi x^4-\frac{x^5}{240}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{\sin nx}{n}-x\right),$$

令 $x=2\pi$,即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{90}\pi^4.$$

第二节　以 $2l$ 为周期的函数的展开式

主要内容

1. 设 f 是以 $2l$ 为周期的函数,在 $[-l,l]$ 上可积,则

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots.$$

2. 若 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数(或定义在 $[-l,l]$ 上的偶函数),则 f 的傅里叶级数是余弦级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

3. 若 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数(或定义在 $[-l,l]$ 上的奇函数),则 f 的傅里叶级数是正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

疑难解析

1. 讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式的意义.

答 在上节中,我们讨论的函数 f 是以 2π 为周期的周期函数.但实际上更多的周期函数是以 $2l$ 为周期的,因此需要讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式.

一般地,当 f 是以 $2l$ 为周期的函数时,通过变量代换:$\pi x/l=t$ 或 $x=lt/\pi$,可以把 f 变换成以 2π 为周期的函数,再依上节的公式展开.

当 f 不是周期函数时.如果函数 f 定义在$(-\infty,+\infty)$内(或$[-l,l]$上,或长度为 $2l$ 的区间上),则可以引入一个辅助函数 f^*,令 f^* 与 f 在$[-l,l]$内相同.然后,将 f^* 按周期延拓到整个数轴,成为以 $2l$ 为周期的周期函数.此时,可以在区间$[-l,l]$上将 f^* 展开为傅里叶级数,以满足研究函数 f 的需要.

因而,以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式的讨论对我们研究一般的周期函数与非周期函数是十分有用且至关重要的.

方法、技巧与典型例题分析

本节解题方法与技巧与上节基本相同,所要注意的是 l 的确定与傅里叶级数收敛的区间的确定,一定要认真思考.

例 1 设 $f(x)$是以 $2l$ 的周期的函数,在区间$(-l,l]$上,$f(x)=x+|x|$,求 $f(x)$的傅里叶级数.

解 $f(x)$在$(-l,l]$上表示为

$$f(x)=\begin{cases}0, & -l<x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

函数 $f(x)$满足收敛定理条件,可以展开为傅里叶级数.

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l 2x\mathrm{d}x = l,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l 2x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}\left[x\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Big|_0^l - \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_0^l 2x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x = (-1)^{n-1}\frac{2l}{n\pi}.$$

故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内，除 $x=(2k+1)l$ 外，傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]\cos\frac{n\pi x}{l} + (-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right].$$

在 $x=(2k+1)l$ $(k=0,\pm1,\cdots)$，级数收敛于

$$\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} = \frac{l}{2}.$$

例 2 求下列函数的傅里叶级数：

(1) $f(x)=\begin{cases}0, & -2\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\leqslant x<4,\\ x-6, & 4\leqslant x\leqslant 8;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1+\cos\pi x, & -1<x<1,\\ 0, & -2\leqslant x\leqslant -1 \text{ 和 } 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ -1, & 1/2\leqslant x<1.\end{cases}$

解 (1) $a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x\mathrm{d}x = 1,$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1],$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}(-1)^n.$$

所以，在(−2,2)内，有

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right].$$

在点 $x=\pm 2$，傅里叶级数收敛于 $\frac{2+0}{2}=1$.

(2) $$a_0=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4+\left(\frac{x^2}{2}-6\pi\right)\Big|_4^8\right]=0,$$

$$a_n=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\cos\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{8}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-\frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}-\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{4x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{24}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_4^8$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{-16}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1)]+\frac{16}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\right\}$$

$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{16}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{4}\left[\int_0^4(2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x+\int_4^8(x-6)\sin\frac{n\pi x}{4}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{-8}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}-\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_0^4$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{-4x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}+\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{4}+\frac{24}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{4}\right]\Bigg|_4^8=0.$$

所以，在(0,8)内，有

$$f(x)=\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{4}.$$

(3) $$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]\Big|_{-1}^{1}=1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1\left[\cos\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right)x + \cos\left(\pi-\frac{n\pi}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2\pi+n\pi}\sin\left(\pi+\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi-n\pi}\sin\left(\pi-\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{1}{2-(2n-1)\pi} + \frac{1}{2-(2n+1)\pi}\right](-1)^{n-1}$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\frac{1}{(2n-1)[4-(2n-1)^2]}(-1)^{n-1},$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos\pi x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x = 0.$$

因为 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，所以

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)[4-(2n-1)^2]}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$$

(4) $a_0 = \int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{1} - \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$,

$$a_n = \int_{-1}^{0}x\cos n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\cos n\pi x\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1}\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\mathrm{d}x + \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{1/2} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_{-1}^{0} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2} + \frac{2(-1)^{k-1}}{(2k-1)\pi},$$

$$b_n = \int_{-1}^{0}x\sin n\pi x\mathrm{d}x + \int_0^{1/2}\sin n\pi x\mathrm{d}x - \int_{1/2}^{1}\sin n\pi x\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{-1}^{0} + \int_1^0\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\mathrm{d}x$$

$$-\frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{1/2} + \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} - \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_{-1}^{0}$$

$$+\frac{1-\cos(n\pi/2)}{n\pi}+\frac{(-1)^n-\cos(n\pi/2)}{n\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

故，在$(-1,0)\cup(0,1/2)\cup(1/2,1)$上，有

$$f(x)=-\frac{1}{4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2\pi^2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\right]\cos(2n-1)\pi x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(1-2\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin n\pi x.$$

例 3 将下列函数展开成傅里叶级数：

(1) $f(x)=2+|x|,\ -1\leqslant x\leqslant 1$，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$之和；

(2) $f(x)=\begin{cases}\cos(n\pi x/l), & 0\leqslant x\leqslant l/2,\\ 0, & l/2<x\leqslant l,\end{cases}$展开为余弦级数.

解 (1) $f(x)$为偶函数，故$b_n=0$.

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=4\int_0^1\cos n\pi x\mathrm{d}x+2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x$$

$$=2\left[\frac{1}{n^2\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$

令$x=0$，得 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$

设$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$，则$S_1+S_2=S$，$S_2=\frac{S}{4}=$

$\dfrac{S_1+S_2}{2}$,于是 $S_2=\dfrac{1}{3}S_1=\dfrac{\pi^2}{24}$.

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=S_1+S_2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{6}.$$

(2) 进行偶延拓,故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{1}{l}\int_0^{l/2}\left(1+\cos\frac{2\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}+\int_0^{l/2}\cos\frac{2\pi x}{l}\mathrm{d}\,\frac{x}{l}=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l/2}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{l}\int_0^{l/2}\left[\cos\frac{(1-n)\pi x}{l}+\cos\frac{(1+n)\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{1-n}\sin\frac{(-n)\pi x}{l}+\frac{1}{1+n}\sin\frac{(1+n)\pi x}{l}\right]\Bigg|_0^{l/2}$$
$$=\begin{cases}0, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

$f(x)$在$(0,l)$内连续,延拓后在 $x=0,x=l$ 连续,故在$[0,l]$上有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}\cos\frac{n\pi}{l}x.$$

例 4 设 $f(x)=10-x,5<x<15,f(x+10)=f(x)$,求 $f(x)$ 的傅里叶级数.

解 $T=10$,故 $f(x)$可写为 $f(x)=-x$, $(-5,5)$.

$f(x)$是奇函数,故 $a_0=0,a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5(-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{10}{n\pi}.$$

故
$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}.$$

例 5 如图 9.1 所示函数的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}2E, & 0\leqslant x\leqslant \tau,\\ E, & \tau< x< 2\tau,\end{cases}$$

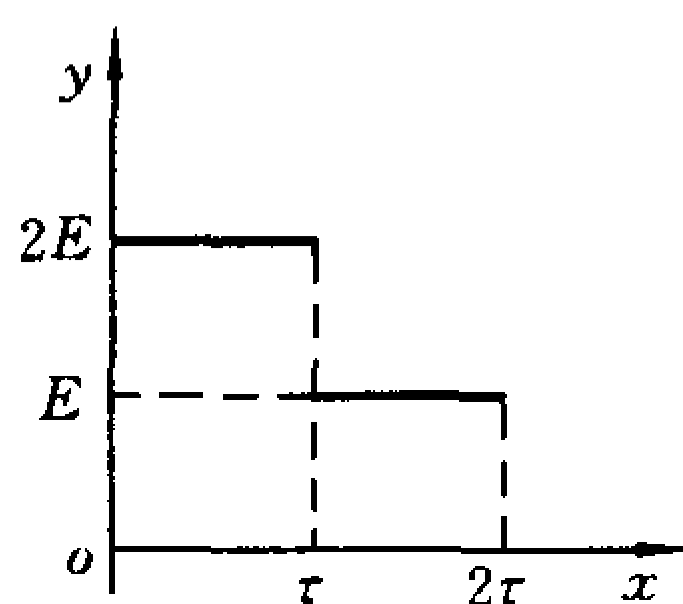


图 9.1

试展开为余弦级数(取前四项).

解 进行偶延拓,故 $b_n=0$.

$$a_0=\frac{2}{2\tau}\left(\int_0^{\tau}2E\mathrm{d}x+\int_{\tau}^{2\tau}E\mathrm{d}x\right)=3E,$$

$$a_n=\frac{1}{\tau}\left[\int_0^{\tau}2E\cos\frac{n\pi x}{2\tau}\mathrm{d}x+\int_{\tau}^{2\tau}E\cos\frac{n\pi x}{2\tau}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[2E\frac{2\tau}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\tau}\Big|_0^{\tau}+E\frac{2\tau}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2\tau}\Big|_{\tau}^{2\tau}\right]$$

$$=\frac{2E}{n\tau}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ (-1)^{k-1}\dfrac{2E}{(2k-1)\pi}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

所以,在$(0,\tau)\cup(\tau,2\tau)$上,有

$$f(x)=\frac{3E}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2E}{(2k-1)\pi}\cos\frac{2k-1}{2\tau}\pi x.$$

在 $x=\tau$,傅里叶级数收敛于 $3E/2$.

例 6 将 $f(x)=x\ (0\leqslant x\leqslant l)$展开为周期为 $2l$ 的傅里叶级数.

(1) 用函数 $F(x)=x\ (0\leqslant x\leqslant 2l)$;

(2) 展开为余弦级数;

(3) 展开为正弦级数.

解 (1) $a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^{2l}x\mathrm{d}x=2l,\quad a_n=\dfrac{1}{l}\int_0^{2l}x\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=0,$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{l}\left[-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\Big|_0^{2l}=-\frac{2l}{n\pi}.$$

在$[0,l]$上,有 $f(x)=F(x)$,所以,在$(0,l]$上,有

$$f(x)=l-\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

在 $x=0$,傅里叶级数收敛于 l.

(2) 进行偶延拓,故 $b_0=0, a_0=\frac{2}{l}\int_0^l x\mathrm{d}x=l$.

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left(\frac{lx}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l$$

$$=\frac{2l}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{-4l}{n^2\pi^2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

所以,在$[0,l]$上,有

$$f(x)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

(3) 进行奇延拓,故 $a_0=0, a_n=0$.

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\left(-\frac{lx}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_0^l$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}.$$

所以,在$[0,l)$上,有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

在 $x=l$ 处,傅里叶级数收敛于零.

注意 三种情形下傅里叶级数收敛于 $f(x)$ 的区间是不同的.

第三节 收敛定理

主要内容

1. 贝塞尔不等式 若函数 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a_n,b_n 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数.

2. 黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue)定理　若 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0.$$

3. 若 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(n+1/2)x\mathrm{d}x = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(n+1/2)x\mathrm{d}x = 0.$$

4. 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则其傅里叶级数部分和 $S_n(x)$ 可表示为(狄利克雷积分)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$

当 $t=0$ 时，被积函数中的不定式由极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = n+\frac{1}{2}$$

确定.

5. 收敛定理(狄利克雷-约当定理)　若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段光滑，则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$，f 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中 a_n,b_n 是 f 的傅里叶系数.

疑难解析

1. 收敛定理有哪些不同的表述方式?

答　关于傅里叶级数的敛散性有许多不同的判别法. 有些判别法，如狄尼条件与李普希兹条件判别法只能保证函数在一点展

开为傅里叶级数，而狄利克雷-约当判别法可以保证函数在整个区间上展开为傅里叶级数.

在保留函数 $f(x)$ 的周期性的情况下，收敛定理可以表述为

(1) $f(x)$ 囿变；

(2) $f(x)$ 只有有限个第一类间断点和有限个极值点；

(3) $f(x)$ 可以表示为两个非负递增函数之差；

(4) $f(x)$ 可以表示为两个递增函数之差.

只要满足这四条中的一条，就有

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$\to f^*(x) = \frac{1}{2}[f(x+0) - f(x-0)].$$

因为后三条中的每一条都是函数囿变的充要条件.

因为当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数 $f'(x)$ 时，$f'(x)$ 有界，即 $|f'(x)| \leqslant M$，于是

$$\sup\sum|f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

$$= \sup\sum|f'(\eta_i)||x_i - x_{i-1}| \leqslant M(b-a),$$

所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿变；若 $f(x)$ 分段光滑，则 $[a,b]$ 可分成有限多个子区间，在每个小区间上 $f(x)$ 有连续导数 $f'(x)$，故在每个子区间上囿变，即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上囿变. 从而有

(1) 如果 $f(x)$ 分段光滑，则 $S_m(x) \to f^*(x)$；

(2) 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的囿变连续函数(或分段光滑的连续函数)，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在全区间上一致收敛于 $f(x)$.

方法、技巧与典型例题分析

涉及傅里叶级数敛散性的问题大多是证明题，除了运用函数项级数的有关命题外，大多数命题需要利用积分的技巧来完成.

例 1 设 f 是周期为 2π 的可积函数，记

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m}[S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{m-1}(x)].$$

证明：(1) $S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$; ①

(2) $\sigma_m(x) = \frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$ ②

其中
$$S_0(x) = a_0/2.$$

证 (1) 利用被积函数的周期性，有

$$\begin{aligned}
S_m(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t\right]\cos nx \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{m}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t\right]\sin nx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}(\cos nt\cos nx + \sin nt\sin nx)\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n(t-x)\right]\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{m}\cos n\tau\right]\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\frac{\sin(m+1/2)\tau}{\sin(\tau/2)}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

取 $f(x)=1$，有 $S_0(x)=a_0/2=1$，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t = 1.$$

此式与式①都称为狄利克雷积分.

又
$$\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)} = \frac{\sin(m+1/2)t\sin(t/2)}{\sin^2(t/2)}$$

$$= \frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1-\cos t},$$

故 $$S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\cos mt - \cos(m+1)t}{1-\cos t}\mathrm{d}t.$$

(2) 由题(1)的结果,有

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{n=0}^{m-1} S_n(x)$$

$$= \frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1-\cos t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$$

当 $f(x)=1$ 时,$\sigma_m(x)=1$,得

$$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$$

此式与式②均称为费吉尔(Fejer)积分,$\sigma_m(x)$称为积分和.

例 2 证明:若 $f(x)$是以 2π 为周期的可积函数,则有

$$f(x) - S_m(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)^t}{\sin(t/2)}[2f(x) - f(x+t) - f(x-t)]\mathrm{d}t.$$

证 由例(1)知

$$f(x) = f(x)\cdot 1 = f(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t,$$

而 $$S_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\right.$$

$$\left. + \int_0^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\,\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}\mathrm{d}t.$$

两式相减，即得

$$
\begin{aligned}
& f(x)-S_m(x) \\
= & \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1/2)t}{\sin(t/2)}[2f(x)-f(x+t)-f(x-t)]\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

例 3 证明：若 $f(x)$是以 2π 为周期的连续函数，则

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m(x)=f(x).$$

证 由例 1 知$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t=1$，故

$$\sigma_m(x)=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t.$$

因为 $f(x)$在闭区间上连续，所以 $f(x)$一致连续，故$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得只要$|t|>\delta$，则对一切 x，有$|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon/2$.

若记 M 为$|f(x)|$在$[-\pi,\pi]$上的最大值，则

$$
\begin{aligned}
& |\sigma_m(x)-f(x)| \\
= & \frac{1}{2m\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(t)]\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t\right| \\
< & \frac{2M}{2m\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t+\frac{\varepsilon}{4m\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t \\
& +\frac{2M}{2m\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中$\frac{1}{2m\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t<\frac{1}{2m\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t=1$，

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\delta}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t= & \int_{\delta}^{\pi}\left[\frac{\sin(mt/2)}{\sin(t/2)}\right]^2\mathrm{d}t \\
& <\int_{\delta}^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2(\delta/2)}<\frac{\pi}{\sin^2(\delta/2)},
\end{aligned}
$$

所以
$$|\sigma_m(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)}.$$

在 n 充分大时，取 $m>n$，就有$\frac{2M}{m\sin^2(\delta/2)}<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|\sigma_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

即
$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m(x) = f(x).$$

本命题称为费吉尔定理，说明收敛是一致收敛的，从而当 $|\sigma_m(x)-f(x)|<\sqrt{\varepsilon/2\pi}$ 时，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\sigma_m(x) - f(x)|^2\mathrm{d}x < \varepsilon \to 0.$$

例 4 设 $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$，$S_0(x) = \dfrac{1}{2}$，且

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1},$$

证明：(1) $\sigma_n(x)=\dfrac{1}{2(n+1)}\left[\dfrac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}\right]^2$；

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x = \pi.$

证 (1) 利用三角公式

$$2\sin(x/2)\cos kx = \sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x,$$

有
$$S_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

$$S_n(x) = 1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

$$= \frac{\sin(x/2) + \sum\limits_{k=1}^{n}[\sin(k+1/2)x - \sin(k-1/2)x]}{2\sin(x/2)}$$

$$= \frac{\sin(n+1/2)x}{2\sin(x/2)}.$$

再由 $2\sin(x/2)\sin(k+1/2)x=\cos kx-\cos(k+1)x$，

得
$$\sin(k+1/2)x = \frac{\cos kx - \cos(k+1)x}{2\sin(x/2)},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2\sin(x/2)}\sum_{k=0}^{n}[\cos kx - \cos(k+1)x]$$

$$= \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin(x/2)} = \frac{\sin^2(n+1)x/2}{\sin(x/2)}.$$

于是 $\sigma_n(x)=\dfrac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}S_k(x)=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin(x/2)}\right]^2.$$

(2) 因为原点是 $\sigma_n(x)$的可去间断点，所以 $\sigma_n(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积. 又 $\sigma_n(x)$是偶函数，故

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x,$$

而
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ (\text{见例 }1(1)).$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{\pi}\frac{\sin(k+1/2)x}{\sin(x/2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n+1}\cdot(n+1)\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 5 设 $0<\alpha<1$，$f(x)=\cos\alpha x$ 在$(-\pi,\pi)$内的傅里叶级数为

$$\cos\alpha x=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx\right],$$

证明：(1) $\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\dfrac{1}{\alpha}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}$；

(2) $\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\ (0<x<\pi)$；

(3) $\pi=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\pi}\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi.$

证 (1) 在所给傅里叶级数中令 $x=0$,即得

$$\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}=\frac{1}{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos nx.$$

(2) $\forall\ x\in(0,\pi)$,令 $\alpha=x/\pi$,则 $0<\alpha<1$,代入题(1)的结果,化简得

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}.$$

(3) 将上面结果改写为

$$1=\frac{\sin x}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\quad(0<x<\pi),$$

令

$$u_0(x)=\begin{cases}\sin x/x, & 0<x<\pi,\\ 1, & x=0,\end{cases}$$

$$u_1(x)=\begin{cases}-2x\sin x/(x^2-\pi^2), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 1, & x=\pi,\end{cases}$$

$$u_n(x)=(-1)^n\frac{2x\sin nx}{x^2-nx^2\pi^2}\ (n\geqslant 2,0\leqslant x\leqslant\pi),$$

则$\forall\ n\geqslant 0,u_n(x)$在$[0,\pi]$上连续,且由题(1)有

$$1=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

当 $n\geqslant 2$ 时,$\forall\ x\in[0,\pi]$,有

$$|u_n(x)|\leqslant\frac{2\pi}{n^2\pi^2-\pi^2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}.$$

而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\leqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}<+\infty$,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$在$[0,\pi]$上收敛且一致收敛,故可在$[0,\pi]$上逐项积分,得

$$\pi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}u_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\int_0^{\pi}\frac{2x\sin x}{x^2-n^2\pi^2}\mathrm{d}x.$$

(4) 将所给无穷区间上的积分转化为有限区间上的积分的级数,得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-n\pi}^{-(n-1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \left[\frac{\sin t}{t+n\pi} + \frac{\sin t}{t-n\pi}\right] dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{2t\sin t}{t^2 - n^2\pi^2} dt = \pi(\text{由题}(3)).$$

事实上，若将题给傅里叶级数写成

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\cos\alpha x}{\sin\alpha\pi} = \frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha\cos nx}{\alpha^2 - \pi^2},$$

在式中令 $x=\pi$，再将 $\alpha\pi$ 改写为 x，可得

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x-n\pi} + \frac{1}{x+n\pi}\right).$$

利用 $\tan x = -\cot(x-\pi/2)$，即得

$$\tan\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{x-(2n+1)\pi/2} + \frac{1}{x+(2n-1)\pi/2}\right] - \frac{2}{2x-\pi}.$$

可见，利用傅里叶级数的收敛性质，能通过一个函数的傅里叶级数得到许多有用的公式.

例 6 设 f 在$[-\pi,\pi]$上可积且平方可积，证明贝塞尔不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

成立. 其中 $a_0, a_n, b_n (n=1,2,\cdots)$ 是 f 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶系数.

证 讨论积分$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx$，其中

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

因为
$$|f(x) - S_n(x)|^2$$
$$= (f(x) - S_n(x))(\overline{f(x)} - \overline{S_n(x)})$$
$$= |f(x)|^2 - 2\mathrm{Re} S_n(x) f(x) + |S_n(x)|^2,$$

而 $\int_{-\pi}^{\pi} 2\mathrm{Re}S_n(x)f(x)\mathrm{d}x = 2\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)f(x)\mathrm{d}x$

$$= 2\pi\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k^2 + b_k^2)\right],$$

$$\int_0^{2\pi} |S_n(x)|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2(a_k^2 + b_k^2)\pi,$$

所以 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x + \frac{\pi a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2(a_k^2 + b_k^2)\pi$$

$$- 2\pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k^2 + b_k^2)\right]$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x - \frac{\pi a_0^2}{2} - \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$$

$$+ \frac{\pi}{n^2}\sum_{n=1}^{\infty}k^2(a_k^2 + b_k^2).$$

由
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

得 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) - \frac{\pi}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2(a_k^2 + b_k^2).$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(a_k^2+b_k^2)=0$，故

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

例 7 若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是正项数列且单调减少并趋向于零，证明：级数 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 在任何区间 $0\leqslant\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$ 上一致收敛.

证 因为，有

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin[(n+1)x/2]\sin(nx/2)}{\sin(x/2)},$$

$$C_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin[(n+1/2)x]}{2\sin(x/2)}.$$

则 $$|S_n|<\frac{1}{\sin(\delta/2)}=\eta,\quad |C_n|<\frac{1}{2\sin(\delta/2)}=\frac{\eta}{2}.$$

由于$\{a_n\}$，$\{b_n\}$单调减少并趋向于零，且为正项数列，故依狄利克雷判别法知，所证级数收敛.

由$|S_n|<\eta$，$|C_n|<\frac{\eta}{2}$，即有

$$R_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\to 0.$$

令 $$R'_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k\cos kx,\quad R''_m(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

则 $$\begin{aligned}&R'_n(x)-R'_{n+p}(x)\\&=a_{n+1}\cos(n+1)x+\cdots+a_{n+p}\cos(n+p)x\\&=a_{n+1}(C_{n+1}-C_n)+\cdots+a_{n+p}(C_{n+p}-C_{n+p-1})\\&=-a_{n+1}C_n+\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})C_k+a_{n+p}C_{n+p}.\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}&|R'_n(x)-R'_{n+p}(x)|\\&<[a_{n+1}+(a_{n+1}-a_{n+p})+a_{n+p}]\frac{\eta}{2}=a_{n+1}\eta.\end{aligned}$$

由$\{a_n\}\to 0$，故当$a_{N+1}<\varepsilon/\eta$时，$\forall\ n>N$及$p\in\mathbf{N}$，有

$$|R'_n(x)-R'_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

由于N与x无关，所以$R'_m(x)$一致收敛于零.

同样可证$R''_m(x)$一致收敛于零，从而$R_m(x)$一致收敛于零，即题给级数一致收敛.

例 8 若$f(x)$是以2π为周期的连续函数，且存在连续的一阶和二阶导数. 证明：$f(x)$的傅里叶级数一致收敛.

证 因为$f(x)$以2π为周期，所以$f'(x)$，$f''(x)$仍以2π为周期.

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin nx}{n\pi}f(x)\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$= \frac{\cos nx}{n^2 x} f'(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2 \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos nx \mathrm{d}x.$$

由 $f'(x)$及 $\cos nx$ 的周期性知，第一项等于零；又 $|f''(x)|<M$（闭区间上连续），故 $|a_m|<2M/n^2$. 同理，$|b_n|<2M/n^2$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性知，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛，依例 7 知，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且一致收敛.

例 9 若 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上囿变，证明：存在常数 $k>0$，$\forall$ 傅里叶系数 a_n，b_n，有 $|a_n|\leqslant k/n$，$|b_n|\leqslant k/n$.

证 若 $f(x)$以 2π 为周期，在$[-\pi,\pi]$上只有有限个第一类间断点和有限个极值点，则称函数 $f(x)$囿变.

当 $f(x)$是正的囿变递增函数时，有

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{f(x)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x$$

$$= \frac{f(\pi)}{\pi} \cdot \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin n\zeta),$$

故 $|a_n|<\frac{|f(\pi)|}{n}$. 同理 $|b_n|<\frac{|f(\pi)|}{n}$.

由于 $f(x)$囿变，则 $f(x)$必可表示为两个非负单调增加函数之差（见疑难解析 2），即 $f(x)=F(x)-h(x)$. 于是

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - h(x)] \cos nx \mathrm{d}x$$

$$= \frac{F(\pi)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x - \frac{h(\pi)}{\pi} \int_{\zeta}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x,$$

即 $$|a_n| < \left| \frac{F(\pi)}{n} \right| + \left| \frac{h(\pi)}{n} \right|.$$

同理 $$|b_n| < \left| \frac{F(\pi)}{n} \right| + \left| \frac{h(\pi)}{n} \right|.$$

故可以选出一个常数 k，使得 $n|a_n|\leqslant k$，$n|b_n|\leqslant k$，对一切 n 成立. 从而命题得证.

例 10 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，用傅里叶展开式证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$|\sin x|$有一个一致收敛的傅里叶展开式(见第一节例 11(1))

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k)^2-1}\ (-\infty,+\infty),$$

所以 $$|\sin nx| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2knx}{(2k)^2-1}\ [-\pi,\pi].$$

若用有界函数乘以一致收敛级数的各项，则所得级数仍一致收敛. 而 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积，故$\exists\ M$，使得$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，有$|f(x)|\leqslant M$. 于是

$$f(x)|\sin nx| = \frac{2}{\pi}f(x) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}f(x)\frac{\cos 2knx}{4k^2-1},\ [-\pi,\pi]$$

一致收敛. 逐项积分得

$$\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x.$$

因为 $$\left|\int_a^b\frac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M(b-a)}{4k^2-1},$$

而$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{M(b-a)}{4k^2-1}$收敛，故$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_a^b\dfrac{f(x)\cos 2knx}{4k^2-1}\mathrm{d}x$一致收敛.

取 $n\to\infty$的极限，并利用黎曼引理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f(x)\cos 2knx\mathrm{d}x}{4k^2-1} = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 11 设 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上有连续导数，且 $f'(x)$ 在$[0,\pi]$上分段光滑，$\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x = 0$. 证明：$\int_0^{\pi}[f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x$.

证 对 $f(x)$进行偶延拓，故 $a_0=0,b_n=0$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,\ x\in[0,\pi],$$

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin nx,\ x \in [0,\pi].$$

由巴塞瓦等式得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2 \mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_0^{\pi}[f'(x)]^2 \mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\pi}[f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

例 12 设 $f(x)$是周期为 2π 的连续函数，证明：

(1) $F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$ $(h>0)$也是周期为 2π 的连续函数；

(2) $\forall\ \varepsilon>0, \exists\ h>0$，使得在$[-\pi,\pi]$上，有$|f(x)-F(x)|<\varepsilon$.

(3) $\forall\ \varepsilon<0, \exists\ n$ 阶三角多项式 $\tilde{S}_n(x)$，使得在$[-\pi,\pi]$上有 $|f(x)-\tilde{S}_n(x)|<2\varepsilon$.

证 设 $f(x)$的傅里叶级数为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则对傅里叶级数逐项积分后，得

$$F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n\sin nh}{n}\cos nx + \frac{b_n\sin nh}{n}\sin nx\right].$$

可以由此讨论所证命题.

下面给出另一种形式的但更直接的证明.

(1) 作代换 $t=x+y$，得

$$F(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+y)\mathrm{d}y,$$

则 $F(x+2\pi)= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+2\pi+y)\mathrm{d}y$ ($f(x)$ 周期为 2π)

$$= \frac{2}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+y)\mathrm{d}y = F(x),$$

故 $F(x)$是以 2π 为周期的连续函数. 又

$$F(x)=\frac{1}{2h}\left[\int_0^{x+h}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-h}f(t)\mathrm{d}t\right],$$

由变上限函数性质与 $f(x)$ 的连续性知，$F(x)$ 也是连续函数.

（2）由积分中值定理，$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$ 及 $h>0$，$\exists\ \xi_x\in[x-h,x+h]$，使得

$$F(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi_x).$$

又由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一致连续性，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得 $\forall\ x_1,x_2\in\mathbf{R}$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

取 $h\in(0,\delta)$，由 $|\xi_x-x|\leqslant h<\delta$，即得

$$|F(x)-f(x)|=|f(\xi_x)-f(x)|<\varepsilon\quad(|x|\leqslant\pi).$$

（3）因为 $F(x)$ 是变限积分函数，所以 $F(x)$ 连续可微，有

$$F'(x)=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\ (|x|\leqslant\pi),$$

所以 $F'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上二阶连续可导，$F(x)$ 的傅里叶级数一致收敛于 $F(x)$.

设 $F(x)$ 的傅里叶级数的部分和为 $\widetilde{S}_k(x)$，则当 $k\to\infty$ 时，$\forall\ x\in[-\pi,\pi]$，$\widetilde{S}_k(x)\rightrightarrows F(x)$. 于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n\in\mathbf{N}$，使得

$$|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|<\varepsilon\ (|x|\leqslant\pi).$$

故 $\forall\ \varepsilon>0$，先取定 h，使得 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$ 成立，再取定 $\widetilde{S}_n(x)$，使得 $|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|<\varepsilon$ 成立. 由此两式即得

$$\begin{aligned}|f(x)-\widetilde{S}_n(x)|&\leqslant|f(x)-F(x)|+|F(x)-\widetilde{S}_n(x)|\\&<2\varepsilon\ (|x|\leqslant\pi).\end{aligned}$$

连续函数的傅里叶级数可以在一些点上发散，所以不一定收敛，更不一定一致收敛. 但是连续的周期函数却总可用三角多项式一致逼近.

关于傅里叶级数的应用与傅里叶级数的复数形式，本书将不予讨论.

第十章　多元函数微分学

本章先讨论多元实值函数的微分学，而把向量函数的微分学放在第十二章单独进行讨论.

第一节　平面点集与多元函数

主要内容

一、平面点集

1. 坐标平面上满足某种条件 P 的点的集合称为平面点集，记作 $E=\{(x,y)\mid(x,y)$满足条件 $P\}$.

平面点集$\{(x,y)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$称为以点 $A(x_0,y_0)$为中心的 δ 圆邻域，$\{(x,y)\mid|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$称为以点$A(x_0,y_0)$为中心的 δ 方邻域. 并且以记号 $U(A;\delta)$或 $U(A)$不加区分地表示这两种邻域. $U^\circ(A;\delta)$或$U^\circ(A)$表示点 A 的去心邻域.

2. 任意点 $A\in\mathbf{R}^2$ 与任意点集 $E\subset\mathbf{R}^2$ 的关系

若存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A)\subset E$，且称 A 为点集 E 的内点；E 的全体内点构成 E 的内部，记作 $\mathrm{int}E$.

若存在点 A 的某邻域 $U(A)$，使得 $U(A)\cap E=\varnothing$，则称 A 为点集 E 的外点.

若在点 A 的任何邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点，则称 A 是集合 E 的边界点.

$E^C=\mathbf{R}^2\backslash E$ 是 E 关于 $\mathbf{R}^2$ 的余集；E 的边界点的全体构成 E 的

边界，记作 ∂E.

3. 点 A 与数集 E 中点的关系

若在 A 任一邻域 $U^\circ(A)$ 内均含有 E 中的点，则称 A 是 E 的聚点. 聚点可以属于 E，也可以不属于 E.

若点 $A\in E$，但不是 E 的聚点，则称 A 是 E 的孤立点.

4. 一些重要的平面点集

若平面点集 E 的每一点都是 E 的内点，则称为 E 为开集.

若平面点集 E 的所有聚点都属于 E，则称为 E 为闭集. 若 E 没有聚点，E 也称为闭集.

$\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是既开又闭的点集.

连通（即 E 中任意两点可以用一条完全在 E 内的折线相连接）的开集 E 称为开域.

开域及其边界构成的点集称为闭域.

开域、闭域或者开域及其部分边界点构成的点集统称为区域.

5. 点集的有界性

对于平面点集 E，若存在原点的某邻域 $U(0,r)$，使得 $E\subset U(0,r)$ $(r>0)$，则称 E 是有界点集. 否则，称 E 是无界点集.

E 也可以表示为：存在矩形区域 $D=[a,b]\times[c,d]\supset E$. 或者用点集的直径 $d(E)=\sup\limits_{P_1,P_2\in E}\rho(P_1,P_2)$ 来讨论：当且仅当 $d(E)$ 为有限值时，E 是有界点集. 其中

$$\rho(P_1,P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

对 $\mathbf{R}^2$ 平面上任何三点 P_1,P_2,P_3，下式成立：

$$\rho(P_1,P_2)\leqslant\rho(P_1,P_3)+\rho(P_2,P_3).$$

二、$\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理

1. 设 $\{P_n\}\subset\mathbf{R}^2$ 为平面点列，P_0 为 $\mathbf{R}^2$ 定点. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，有 $P_n\in U(P_0)$，则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于 P_0，记作

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \quad 或 \quad P_n\to P_0,\ n\to\infty.$$

2. 柯西收敛准则　平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon>$

0，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，使得当 $n>N$ 时，$\forall\ P\in\mathbf{N}$，总有 $\rho(P_n,P_{n+p})<\varepsilon$.

3. 闭域套定理　设$\{D_n\}$是 $\mathbf{R}^2$ 中的闭域列，满足：$D_n\supset D_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$；$d_n=d(D_n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}d_n=0$，则存在惟一的点 $P_0\in D_n$，$n=1,2,\cdots$.

4. 聚点定理　设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为有界无限点集，则 E 在 $\mathbf{R}^2$ 中至少有一个聚点.

5. 有限覆盖定理　设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭域，$\{\Delta_\alpha\}$为一开域族，覆盖了 D（即 $D\subset\bigcup\limits_{\alpha}\Delta_\alpha$），则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$，它们也覆盖了 D（即 $D\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Delta_i$）.

三、二元函数与 n 元函数

1. 设平面点集 $D\subset\mathbf{R}^2$，若按某对应法则 f，D 中每一点$P(x,y)$都有惟一确定的实数 Z 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的二元函数（或称 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射），记作 $f:D\to\mathbf{R}$，$P\mapsto Z$.

若二元函数的值域为有界数集，则该函数称为有界函数.

2. n 个有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体称为 n 维向量空间（或 n 维空间），记作 $\mathbf{R}^n$. 任一有序实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为 $\mathbf{R}^n$ 的一个点；n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是该点的坐标.

设 E 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若按某对应法则 f，使得 E 中每一点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$都有惟一的一个实数与之对应，则称 f 为定义在 E 上的 n 元函数（或称 f 为 $E\subset\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射），记作 $f:E\to\mathbf{R}$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto y$ 或 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$.

疑 难 解 析

1. 内点、外点、边界点、聚点及孤立点与数集 E 有何关系？

答　E 的内点一定属于 E；E 的外点一定不属于 E；E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E；聚点可能属于 E，也可能不属于 E；孤立点一定属于 E.

它们之间还存在这样的关系：孤立点一定是界点；内点与非孤立的界点一定是聚点；既不是聚点又不是孤立点的点一定是外点.

2. $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理与实数系的完备性定理有什么联系？

答 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理是实数系的完备性定理的推广，它们同样是二元函数极限理论的基础.

这些定理的证明方法与实数系的完备性定理的证明方法完全相同，仅需将闭区间换成闭区域. 因此，本章不多讨论.

方法、技巧与典型例题分析

本节讨论两个问题：一是平面区域问题与 $\mathbf{R}^2$ 上的完备性定理. 通过概念来认识实际问题，区分实际的平面区域是哪类区域，并进行讨论. 这需要读者对概念有清晰的认识，能运用概念辨析实际问题. 二是函数的基本概念，即函数式、函数值、函数定义域及其点集形式的讨论与确定. 可以利用讨论一元函数的技巧与方法来讨论二元与 n 元函数的同类问题.

例 1 证明：邻域是开集.

证 设邻域为 $U(a)$，A 为 $U(a)$上任一点，则 $|A-a|<\delta$. 因此，存在正数 h，使得 $|A-a|<\delta-h$. 故$\forall\ x\in U(A;h)$，以下不等式成立：

$$|x-a|\leqslant|x-A|+|A-a|<\delta.$$

所以，$x\in U(a)$，即 A 是 $U(a)$的内点. 依定义知，$U(a)$为开集.

例 2 证明：E 为闭集的充分必要条件是 E^{C} 是开集.

证 **必要性** 若 E 为闭集，则因为 E 的一切聚点都属于 E，从而$\forall\ x\in E^{\mathrm{C}}$，$x$ 不是 E 的聚点. 即存在 $U(x)$，使得 $U(x)\cap E=\varnothing$，也就是 $U(x)\subset E^{\mathrm{C}}$. 故 E^{C} 是开集.

充分性 $\forall$ 任 $x\in E^{\mathrm{C}}$，因为 E^{C} 是开集，所以$\exists\ U(x)\in E^{\mathrm{C}}$，即 x 不是 E 的聚点. 故若 E 有聚点，则聚点必属于 E.

类似可证：E 为开集的充分必要条件是 E^{C} 是闭集.

例 3 证明：

(1) 任意一组开集$\{E_\alpha\}$的并集$(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)$是开集；

(2) 任意一组闭集$\{E_\alpha\}$的交集$(\bigcap\limits_\alpha E_\alpha)$是闭集；

(3) 任意有限个开集 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 的交集$(\bigcap\limits_{i=1}^m E_i)$是开集；

(4) 任意有限个闭集 $E_1,E_2,\cdots,E_m$ 的并集$(\bigcup\limits_{i=1}^m E_i)$是闭集.

证 要用到德·摩根(De-Morgan)公式：设$\{E_\alpha\}$是若干(有限或无限多个)$\mathbf{R}^k(k=2,3,\cdots,n)$中子集 E_α 的一组，则成立

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^{\mathrm{C}}=(\bigcap_\alpha E_\alpha^{\mathrm{C}});\quad (\bigcap_\alpha E_\alpha)^{\mathrm{C}}=(\bigcup_\alpha E_\alpha^{\mathrm{C}}).$$

其证明见上册第一章.

(1) 若 $x\in(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)$，则存在某个 α，使得 $x\in E_\alpha$. 而 E_α 是开集，故 x 是 E_α 的内点，即$(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)$的内点，从而$(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha)$是开集.

(2) 依德·摩根公式，$(\bigcap\limits_\alpha E_\alpha)^{\mathrm{C}}=(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha^{\mathrm{C}})$. 由于 E_α 是闭集，故 E_α^{C} 是开集. 由题(1)知，$(\bigcup\limits_\alpha E_\alpha^{\mathrm{C}})$是开集，即$(\bigcap\limits_\alpha E_\alpha)^{\mathrm{C}}$ 是开集，从而$(\bigcap\limits_\alpha E_\alpha)$是闭集.

(3) 若 $x\in(\bigcap\limits_{i=1}^m E_i)$，则 $x\in$ 某 E_i，故存在 $U(x;\delta_i)$，使得 $U(x;\delta_i)\subset E_\alpha$. 可以取 $\delta=\min\limits_{0\leqslant i\leqslant m}(\delta_i)$，则对任一 i $(i=1,2,\cdots,m)$，$U(x;\delta)$成立，从而 x 是$(\bigcap\limits_{i=1}^m E_i)$的内点，即$(\bigcap\limits_{i=1}^m E_i)$是开集.

(4) 类似题(2)的证法，利用德·摩根公式和余集概念，由题(3)的结论即可得出. 请读者自己写出证明过程.

但是，任意个开集的交集不一定是开集，任意个闭集的和集不一定是闭集.

例 4 求下列各集的导集(所有聚点构成的集合)，并说明它是否闭集.

(1) $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2>2\}$；

(2) $E=\{(1/m,1/n)\mid m,n\in\mathbf{N}\}$；

(3) $E=\{(x,y)\mid x,y$ 为整数$\}$;

(4) $E=\{(x,y)\mid x,y$ 为有理数$\}$.

解 (1) 导集 $E'=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2\}$,$E$ 是开集,E' 是闭集.

(2) 导集 $E'=\{(0,0)\}$,E 不是闭集.

(3) 导集 $E'=\varnothing$,E 是闭集.

(4) 导集 $E'=\mathbf{R}^2$,E 不是闭集.

例 5 下列集合是开集还是闭集?求出它们的内部(int)和边界,并确定是什么区域.

(1) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 1\}$;

(2) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y<x^2\}$;

(3) $E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid -1<x<1,y=0\}$.

解 (1) E 是闭集.

$$\mathrm{int}E=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x>0,y>0,x+y<1\}.$$

$$\partial E=\{(x,y)\mid x=0,0\leqslant y\leqslant 1\}\cup\{(x,y)\mid y=0,0\leqslant x\leqslant 1\},$$
$$\cup\{(x,y)\mid x+y=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$

E 是有界闭区域.

(2) E 是开集. $\mathrm{int}E=E$,$\partial E=\{(x,y)\mid y=x^2\}$. E 是无界开区域.

(3) E 既不是开集又不是闭集. $\mathrm{int}E=\varnothing$. $\partial E=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,y=0\}$. E 不是区域.

例 6 画出下列平面区域,并指出它是什么样的区域.

(1) $\{(x,y)\mid x^2>y\}$; (2) $\{(x,y)\mid x^2-y^2\leqslant 1\}$;

(3) $\{(x,y)\mid |xy|\leqslant 1\}$; (4) $\{(x,y)\mid |x|+y\leqslant 1\}$.

解 (1) 如图 10.1(a)所示是开区域,无界区域.

(2) 如图 10.1(b)所示是闭区域,无界区域.

(3) 如图 10.2(a)所示是闭区域,无界区域.

(4) 如图 10.2(b)所示是闭区域,无界区域.

例 7 画出下列空间区间,并指出它们各是什么区域.

(1) $V=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 9\}$;

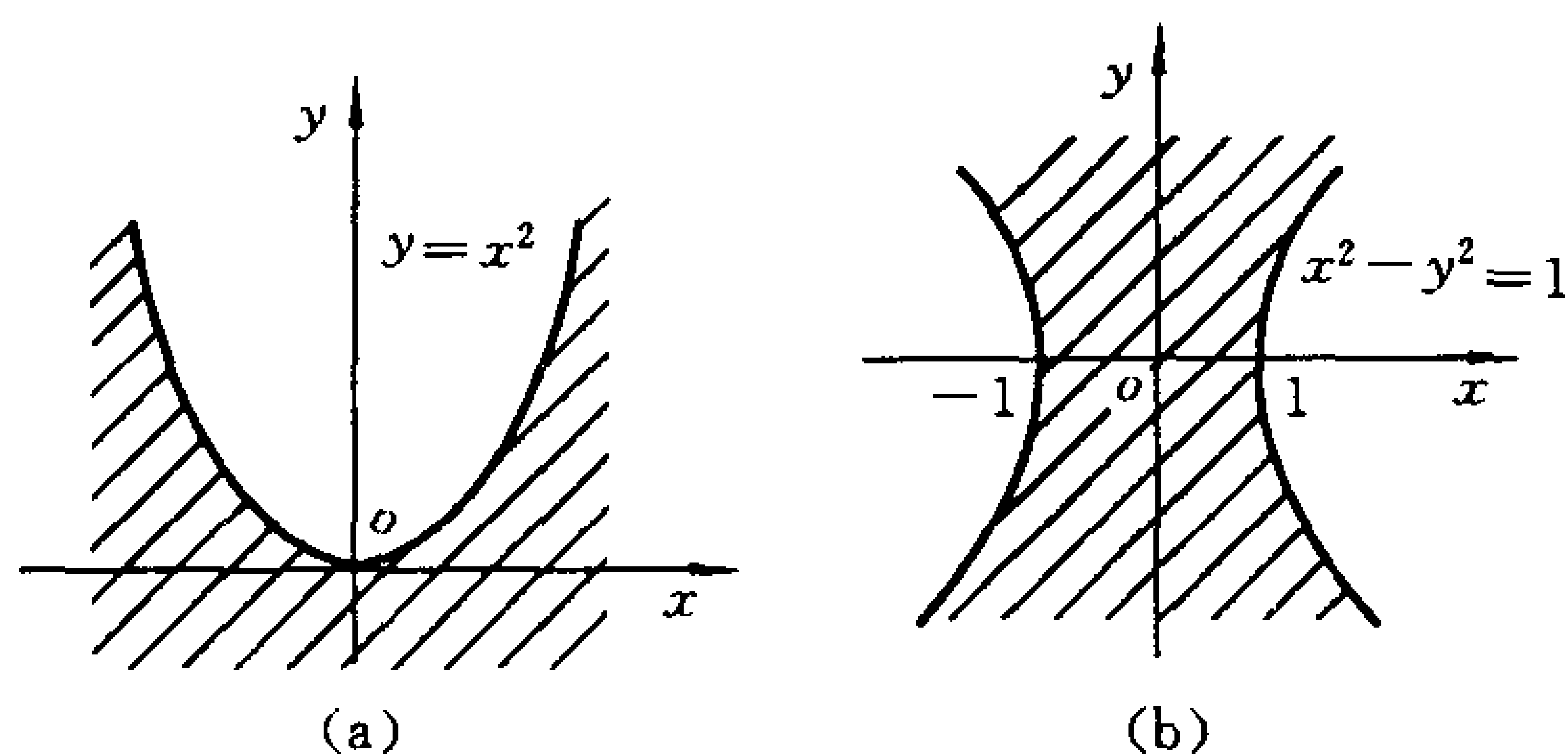


图 10.1

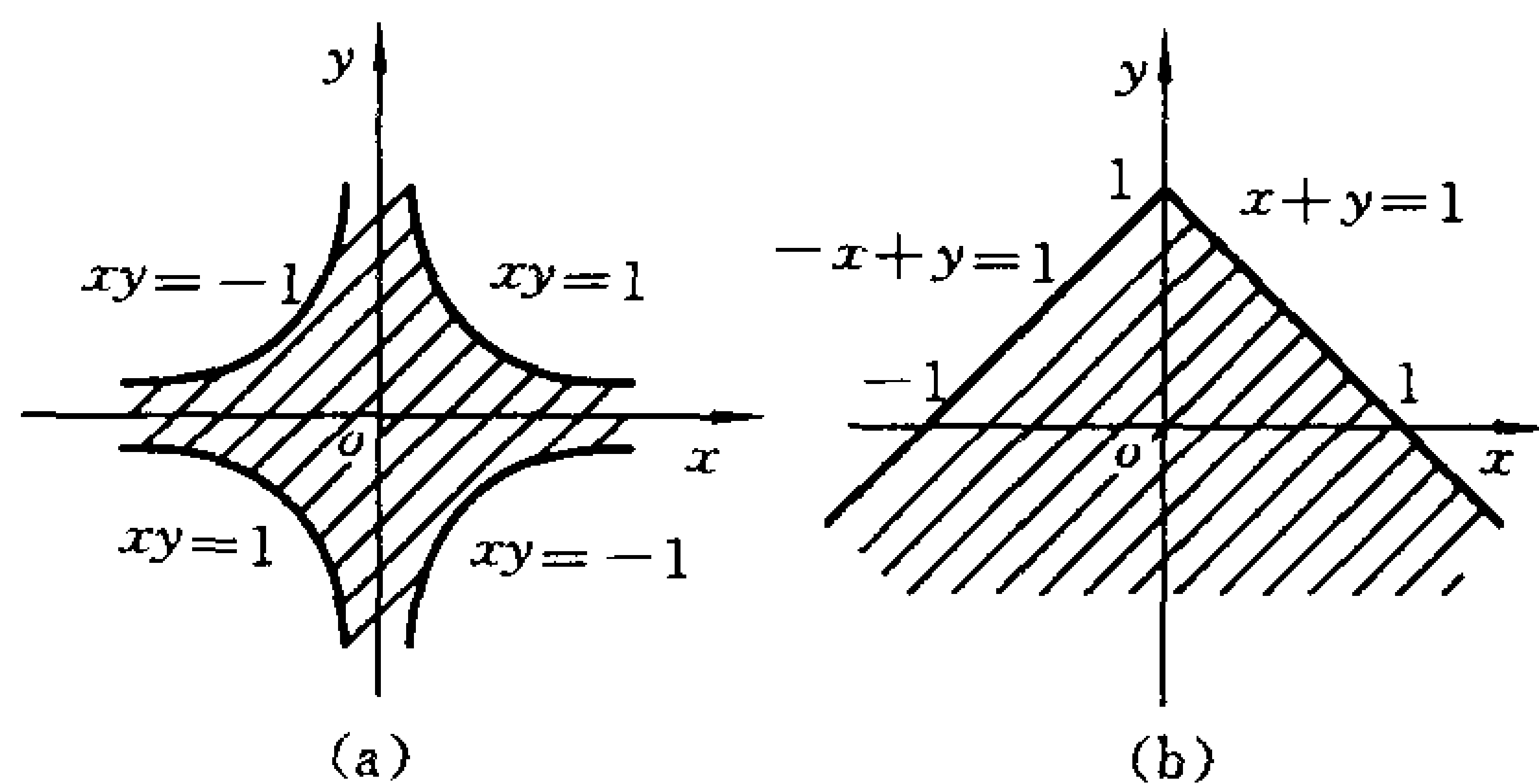


图 10.2

(2) $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2,|z|\leqslant b\}$;

(3) $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2<z,z<2\}$;

(4) $V=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|\leqslant 1\}$.

解 (1) 是以原点为中心、半径等于 3 的球体，是闭区域，如图 10.3(a)所示.

(2) 是以 z 轴为中心轴、半径等于 a、高为 $2b$ 的圆柱体，是闭区域，如图 10.3(b)所示.

(3) 是以原点为顶点、z 轴为中心轴、开口向上的旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 与平面 $z=2$ 所围立体的内部，是开区域，如图 10.4(a)所示.

(4) 是以原点中心、八个平面所围成的八面体区域，是闭区域，如图 10.4(b)所示.

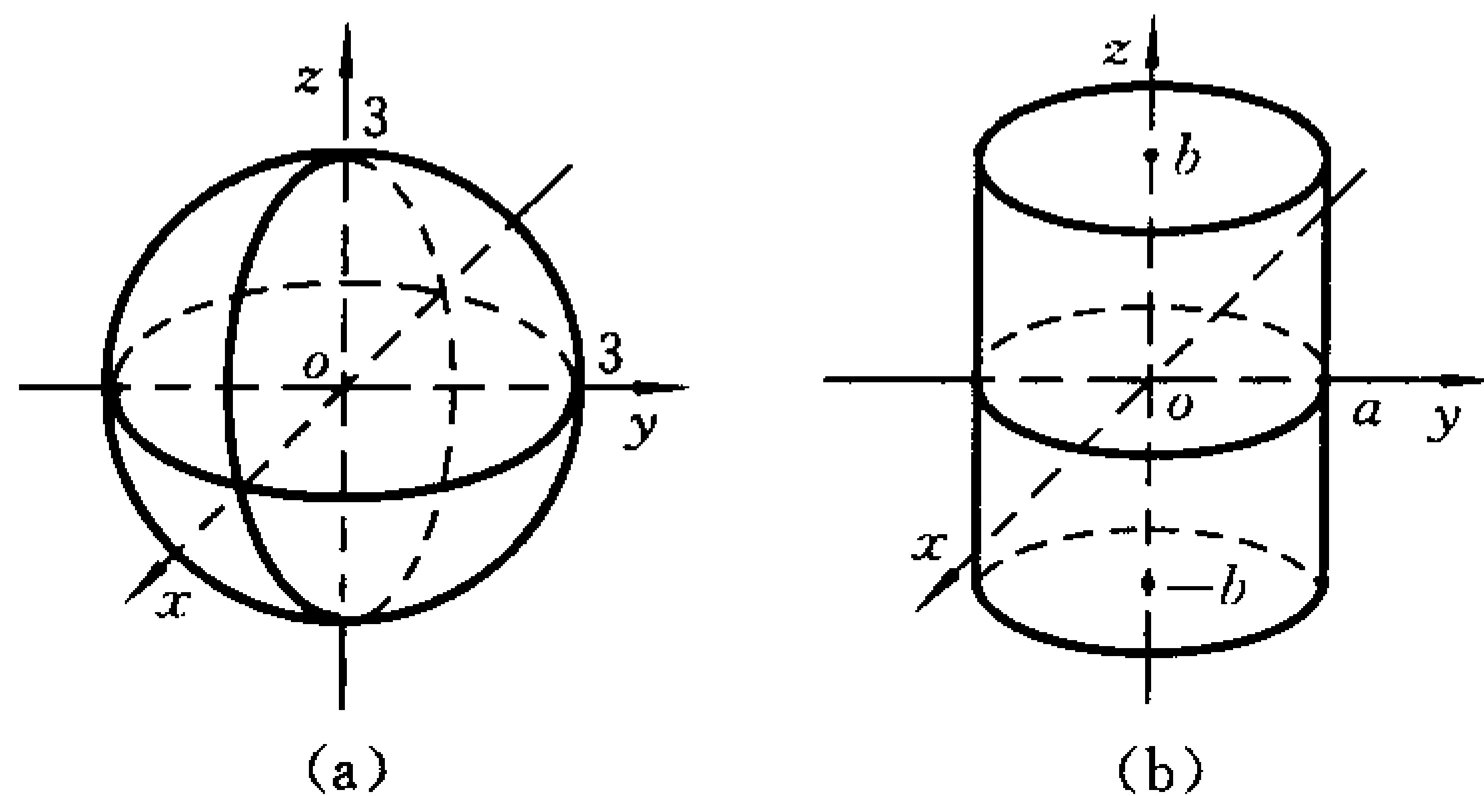


图 10.3

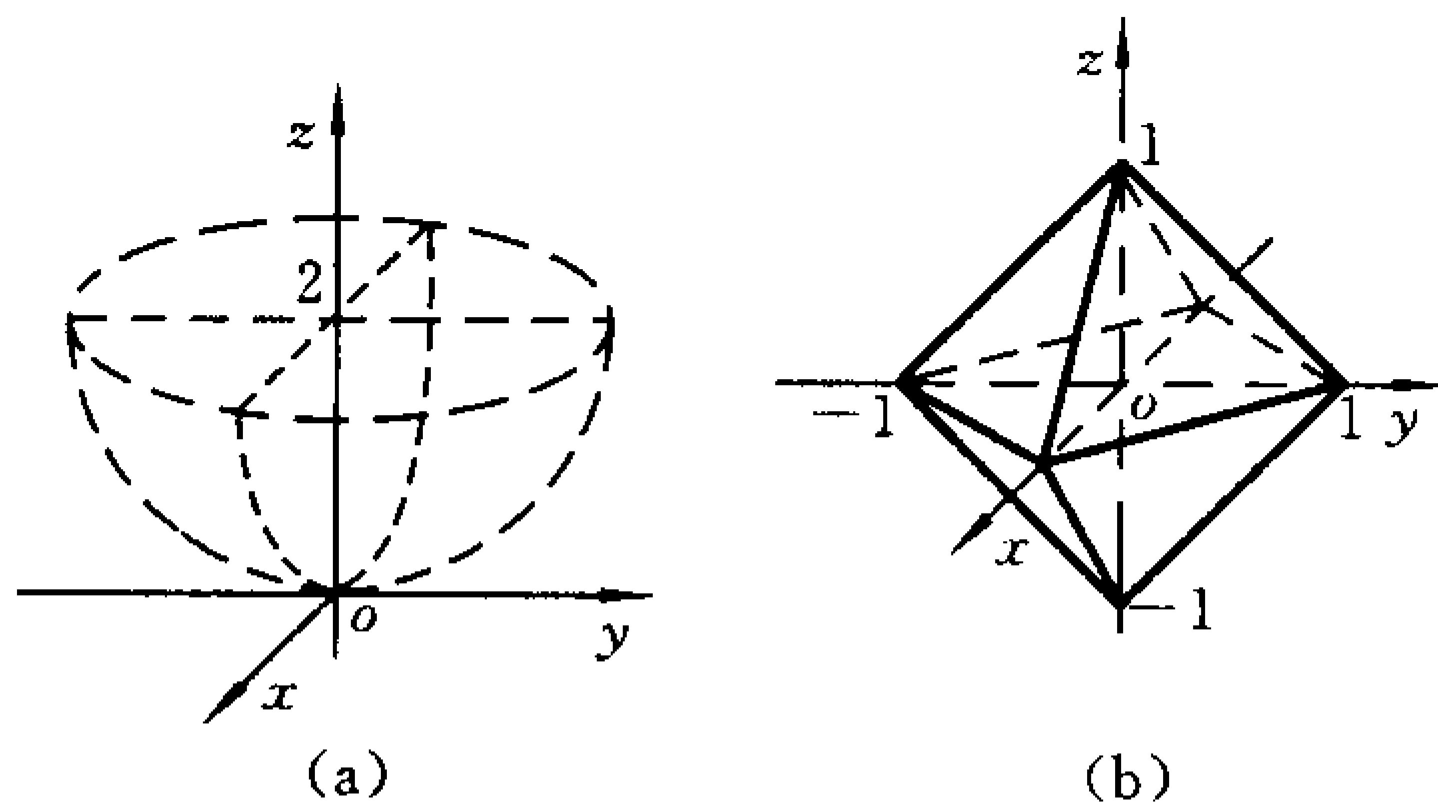


图 10.4

例 8 证明:点 P 是 E 的聚点的充分必要条件是:$\forall\ \delta>0$, $U^{\circ}(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$.

证 必要性 若 P 是 E 的聚点,则$\forall\ \delta>0$,$U(P;\delta)$内有 E 的无限多个点,故 $U^{\circ}(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$.

充分性 若 $\forall\ n\in\mathbf{N}$, $U^{\circ}(P;1/n)\cap E\neq\varnothing$, 即 $\exists\ P_n\in U^{\circ}(P;1/n)\cap E$. 这样,$\forall\ \delta>0$,$\exists\ N\in\mathbf{N}$,使得当 $\delta>1/N$ 时,有 $U^{\circ}(P;1/N)\subset U^{\circ}(P;\delta)$. 于是,$\forall\ n>N$,有无限多个 $P_n\in E$,使得 $P_n\in U^{\circ}(P;\delta)$,故 P 是 E 的聚点.

例 9 利用闭区域套定理证明:三角形的中线交于一点.

证 记带边界三角形为$\triangle ABC$,它是一个闭集.

如图 10.5 所示,$\triangle ABC$ 的三中线包含在$\triangle ABC$ 内,三中点又构成$\triangle A_1B_1C_1$,有$\triangle A_1B_1C_1\subset\triangle ABC$.

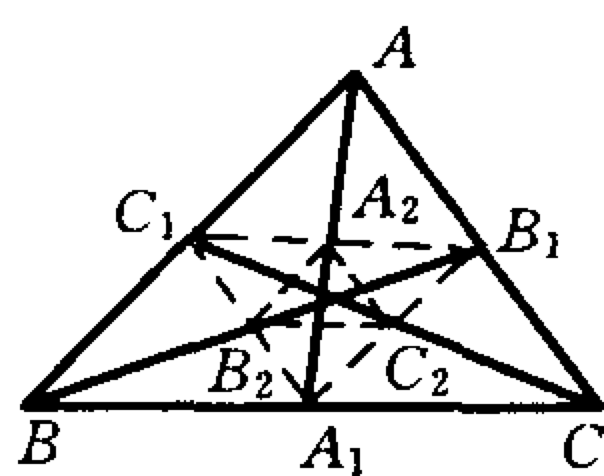


图 10.5

$\triangle ABC$ 三中线的一部分恰为$\triangle A_1B_1C_1$ 的三中线，且$\triangle ABC$ 三中线两两的交点也是$\triangle A_1B_1C_1$ 三中线两两的交点. $\triangle A_1B_1C_1$ 的三中点又构成$\triangle A_2B_2C_2$，有$\triangle A_2B_2C_2 \subset \triangle A_1B_1C_1$. $\triangle A_1B_1C_1$ 的三中线恰为$\triangle A_2B_2C_2$ 的三中线. 如此继续，得一闭三角形区域套

$$\triangle ABC \supset \triangle A_1B_1C_1 \supset \triangle A_2B_2C_2 \supset \cdots,$$

且有$\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$. 因此，存在惟一的点 o 属于闭三角形区间套，点 o 即三角形三中线的交点.

例 10 证明有限覆盖定理：设 $D\subset \mathbf{R}^2$ 为一有界闭区域，$\{\Delta_\alpha\}$ 为一开域族，它覆盖 D(即 $D\subset \bigcup\limits_{\alpha} \Delta_\alpha$)，则在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$，它们同样覆盖了 D(即 $D \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Delta_i$).

证 (仿照实数系的有限覆盖定理的证明)用反证法. 设在$\{\Delta_\alpha\}$中不存在有限个开域 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_m$ 可以覆盖 D. 将 D 等分为四个子域时，其中至少有一个子域不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个子域所覆盖，记此子域为 D_1，且 $d(D_1) = \dfrac{1}{2} d(D)$.

再将 D_1 等分为四个子域. 同样地，其中至少有一个子域不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域所覆盖，记此子域为 D_2，且 $d(D_2) = \dfrac{1}{2^2} d(D)$.

如此继续，则得到一个闭区域列$\{D_n\}$($n=1,2,\cdots$)，有

$$D \supset D_1 \supset D_2 \supset \cdots, \quad \text{即} \quad D_n \supset D_{n+1},\ n = 1,2,\cdots,$$

$$d(D_n) = \frac{1}{2^n} d(D) \xrightarrow{n\to 0} 0.$$

每一个闭域 D_n 都不能用$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域来覆盖. 依闭区域套定理，存在惟一的点 $P\in D_n$，$n=1,2,\cdots$. 但 P 必含于$\{\Delta_\alpha\}$的某一个开域 Δ 内，当 n 充分大时，有 $D_n \subset \Delta$. 此式说明，$\{\Delta_\alpha\}$中的一个开域 Δ 即可覆盖 D_n，从而与假设下推出的 D_n“不能被$\{\Delta_\alpha\}$中有限个开域来覆盖”相矛盾. 可见，假设是错误的，即在$\{\Delta_\alpha\}$中必存在有限个

开域 $\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_m$,它们同样覆盖了 D.

例 11 求下列平面点列的极限:

(1) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n},\dfrac{n}{n-1}\right\}$;　　　　(2) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1},\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n-1}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(-1)^n}{n},\frac{n}{n-1}\right\}=(0,1).$$

(2) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2-n+1}=1,\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2+1}{n^2-n+1},\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}=(1,\mathrm{e}).$$

这里用到了点列收敛的充要条件(见例 12).

例 12 证明:点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$ 的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

证 **必要性** 因为 $\forall\ n\in\mathbf{N}$,恒有

$$|x_n-x_0|<\rho(P_n,P_0)<\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 同理可证,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

充分性 设 $\forall\ n\in\mathbf{N}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$,则 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N_1\in\mathbf{N}$,使得当 $k>N_1$ 时,$|x_k-x_0|<\varepsilon/\sqrt{2}$;同样,$\exists\ N_2\in\mathbf{N}$,使得当 $k>N_2$ 时,$|y_k-y_0|<\varepsilon/\sqrt{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $k>N$ 时,恒有

$$|x_k-x_0|<\varepsilon/\sqrt{2},\quad |y_k-y_0|<\varepsilon/\sqrt{2},$$

于是,$\forall\ k>N$,有 $\rho(P_k,P_0)<\varepsilon$. 即

$$\lim_{n\to\infty}\{P_n(x_n,y_n)\}=P_0(x_0,y_0).$$

例 13 求下列函数的表达式:

(1) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,求 $f(1,\dfrac{y}{x})$;

(2) $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x>0)$,求 $f(x)$;

(3) $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$，且当 $y=1$ 时 $z=x$，求函数 f,z；

(4) $z=x+y+f(x-y)$，且当 $y=0$ 时 $z=x^2$，求函数 f,z.

解 求函数表达式的方法与一元函数同类题的解法一样，读者可参看上册中的有关说明.

(1) $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot y/x}{1+(y/x)^2}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

(2) 因为 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$，所以

$$f(x)=\sqrt{1+x^2}.$$

(3) 因为当 $y=1$ 时，$z=x$，所以

$$\begin{aligned}f(\sqrt{x}-1)&=z-\sqrt{y}\xlongequal{y=1}x-1\\&=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)\\&=(\sqrt{x}-1)[(\sqrt{x}-1)+2].\end{aligned}$$

于是
$$f(t)=t(t+2)=t^2+2t,$$

$$z=\sqrt{y}+x-1\ (\text{利用}\ f(\sqrt{x}-1)=x-1).$$

(4) 因为当 $y=0$ 时，$z=x^2$，所以，$x^2=x+f(x)$，即 $f(x)=x^2-x$. 则

$$z=x+y+(x-y)^2-(x-y)=2y+(x-y)^2.$$

例 14 求下列函数的函数值：

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$，求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$；

(2) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan(x/y)$，求 $f(tx,ty)$.

解 代入运算即可.

(1) 因为 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=1$，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

故
$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\pi/4}{\pi/3}\right)^3=\frac{27}{64}.$$

(2)
$$\begin{aligned}f(tx,ty)&=(tx)^2+(ty)^2-xyt^2\tan(x/y)\\&=t^2[x^2+y^2-xy\tan(x/y)]=t^2f(x,y).\end{aligned}$$

例 15 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；

(2) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$；

(3) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}$

$$+\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2-y^2-z^2}}(R>r);$$

(4) $f(x,y)=\arcsin(x/y^2)+\arcsin(1-y)$.

解 一般需通过解不等式组确定.

(1) $\begin{cases}1-x^2\geqslant 0,\\ y^2-1\geqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}|x|\leqslant 1,\\ |y|\geqslant 1.\end{matrix}$定义域如图 10.6(a)所示.

(2) $\sin(x^2+y^2)\geqslant 0\Rightarrow 2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi,k=0,1,2,\cdots$. 定义域如图 10.6(b)所示.

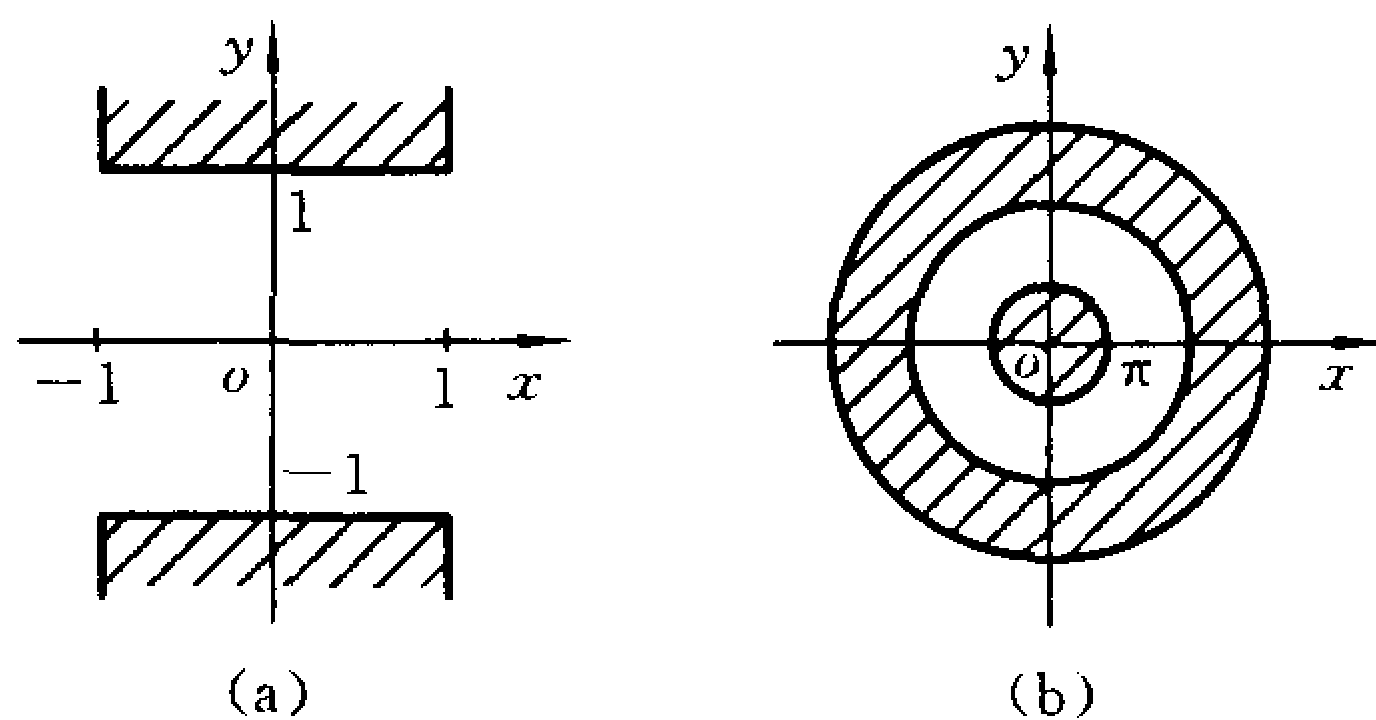


图 10.6

(3) $r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，是两个球体所围区域. 定义域如图 10.7(a)所示.

(4) $\begin{cases}|x/y^2|\leqslant 1,\\ |1-y|\leqslant 1\end{cases}(y\neq 0)\Rightarrow\begin{cases}y^2\geqslant x,\\ 0<y\leqslant 2,\end{cases}$ 和 $\begin{cases}y^2\geqslant -x,\\ 0<y\leqslant 2.\end{cases}$

定义域如图 10.7(b)所示.

例 16 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$；　　(2) $z=\arccos\dfrac{x}{x+y}$；

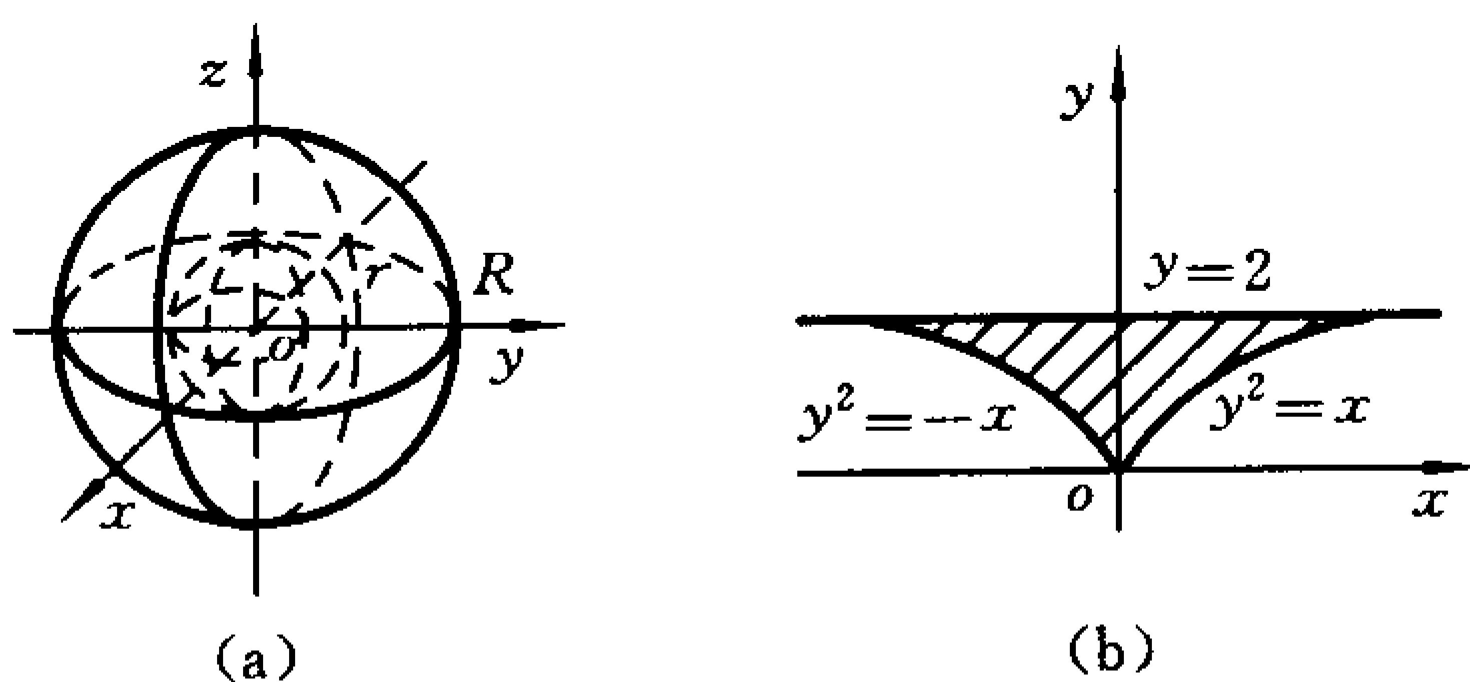


图 10.7

(2) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　(4) $u=\ln(-1-x^2-y^2+z^2)$.

解　(1) $\begin{cases}x\leqslant x^2+y^2,\\x^2+y^2<2x,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-1/2)^2+y^2\geqslant(1/2)^2,\\(x-1)^2+y^2<1,\end{cases}$

定义域是一月牙形区域,如图 10.8(a)所示.

(2) $\left|\dfrac{x}{x+y}\right|\leqslant1\Rightarrow|x|\leqslant|x+y|$ $(x\neq-y)$,即

$$x^2\leqslant x^2+2xy+y^2\quad\text{或}\quad y(y+2x)\geqslant0.$$

$\begin{cases}y\geqslant0,\\y\geqslant-2x,\end{cases}$　或　$\begin{cases}y\leqslant0,\\y\leqslant-2x,\end{cases}$ (x,y 不同时为零).

定义域如图 10.8(b)所示.

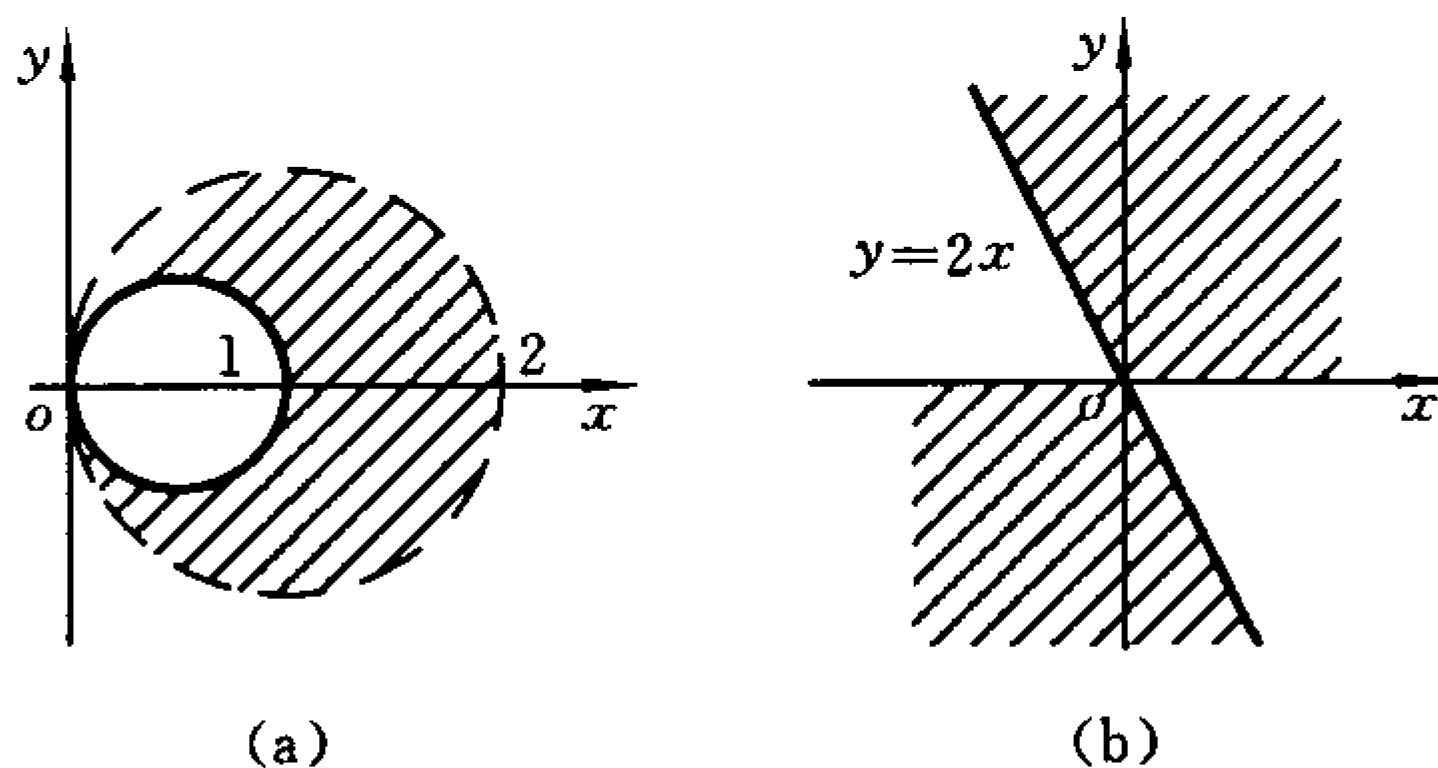


图 10.8

(3) $\left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant1\Rightarrow x^2+y^2-z^2\geqslant0$,定义域是圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的外部,如图 10.9(a)所示.

(4) $-x^2-y^2+z^2-1>0 \Rightarrow x^2+y^2-z^2<1$,定义域是双叶双曲面内部,如图 10.9(b)所示.

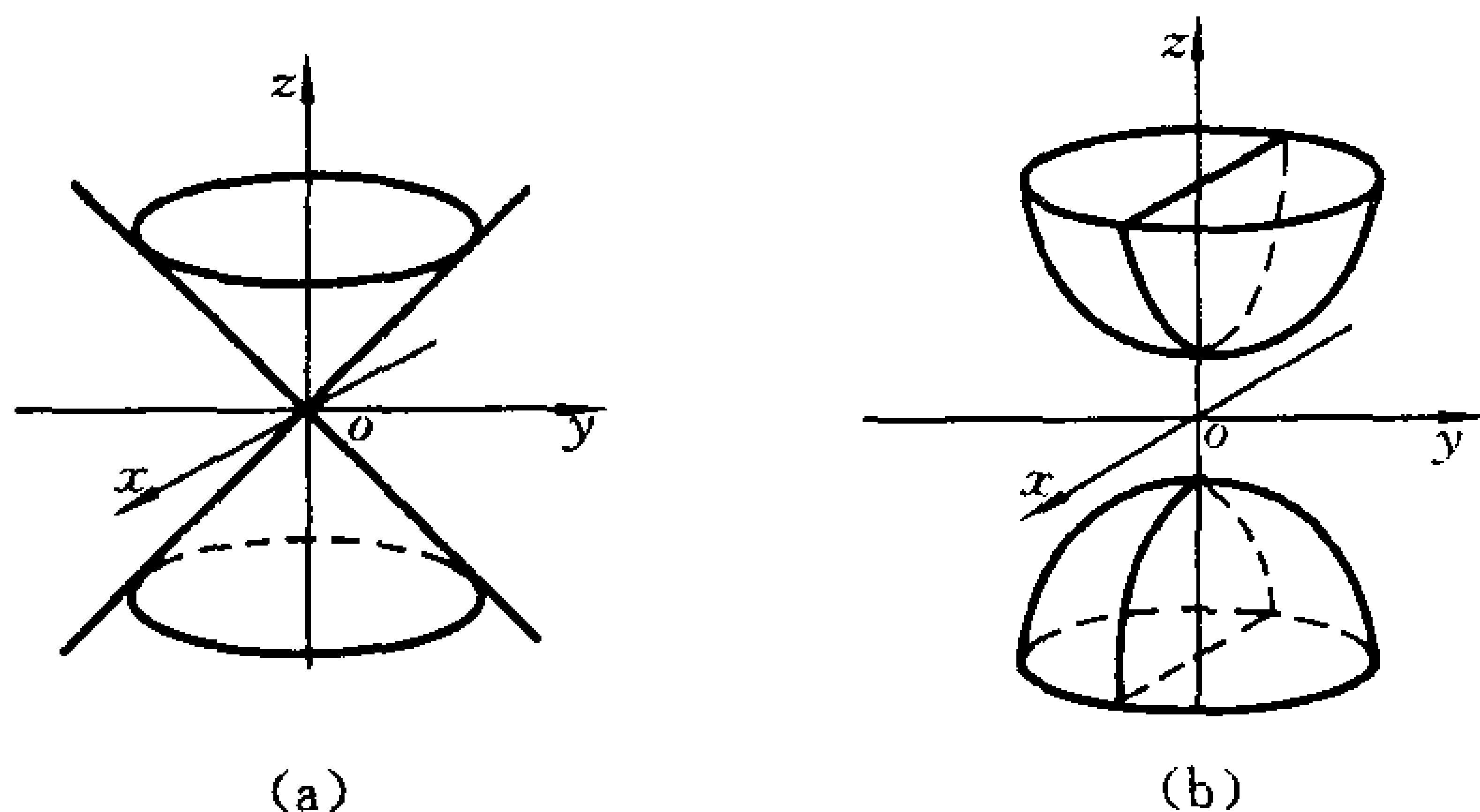


图 10.9

第二节　二元函数的极限与连续性

主要内容

一、二元函数的极限

1. 设 f 为定义在 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的二元函数,P_0 为 D 的一个聚点,A 为确定的实数. 若$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得当 $P \in U^\circ(P_0;\delta) \cap D$ 时,恒有 $|f(P)-A|<\varepsilon$,则称 f 在 D 上当 $P \to P_0$ 时,以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)=A$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$.

2. $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)=A$ 的充要条件是:$\forall$ 任 $E \subset D$,只要 P_0 是 E 的聚点.

推论 1　设 $E_1 \subset D$,P_0 是 E_1 的聚点,若 $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$不存在,则 $\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in D}} f(P)$也不存在.

推论 2 设 $E_1, E_2 \subset D$，P_0 是它们的聚点，若存在极限：$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)=A_1$，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_2}} f(P)=A_2$，但 $A_1\neq A_2$，则 $\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in E_1}} f(P)$ 不存在.

推论 3 极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对于 D 中任一满足条件 $P_n\neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=P_0$ 的点列 $\{P_n\}$，它所对应的函数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛.

3. 设 f 为定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 若 $\forall$ 任 $M>0$，$\exists\ U(P_0;\delta)$，使得 $\forall\ P(x,y)\in U^{\circ}(P_0;\delta)$，有 $f(P)>M$，则称 f 在 D 上当 $P\to P_0$ 时存在非正常极限 $+\infty$，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=+\infty \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(P)=+\infty.$$

类似可定义 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=-\infty$ 与 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=\infty$.

4. x,y 依一定顺序先后趋向于 x_0,y_0 时 f 的极限称为累次极限. 而前面的极限称为二重极限.

设 f 是定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 的二元函数，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 如果对于每个 $y\neq y_0$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，且极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

存在，则称此极限值为函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 先对 x 后对 y 的二次极限.

同理可得函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 先对 y 后对 x 的二次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

5. 若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$（或 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$），则它们必然相等.

(1) 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在但不相等，则二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 必不存在.

(2) 若累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 以及二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 都存在，则三者相等.

二、二元函数的连续性

1. 设 f 为定义在点集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上的二元函数，点 $P_0\in D$(P_0 是 D 的聚点或孤立点). $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$，当点 $P\in U(P_0;\delta)\cap D$，就有 $|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon$，则称 f 关于集合 D 在 P_0 连续.

若 f 在 D 上任何点都连续，则称 f 为 D 上的连续函数.

若 P_0 是 D 的聚点，则 f 关于 D 在 P_0 连续等价于

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0).$$

若 P_0 是 D 的聚点，但 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)\neq f(P_0)$，则称 P_0 是 f 的不连续点(或间断点). 若 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)$ 存在，但不等于 $f(P_0)$，则称 P_0 为可去间断点.

2. 复合函数的连续性　设函数 $u=\varphi(x,y)$ 和 $v=\psi(x,y)$ 在 xoy 平面上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 P_0 连续，函数 $f(u,v)$ 在 uov 平面上点 $Q_0(u_0,v_0)$ 的某邻域内有定义，并在点 Q_0 连续，其中 $u_0=\varphi(x_0,y_0)$, $v_0=\psi(x_0,y_0)$，则复合函数 $g(x,y)=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 P_0 也连续.

3. 有界闭域上连续函数的性质

(1) 有界性与最大值、最小值定理　若函数 f 在有界闭域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 连续，则 f 在 D 上有界，且能取得最大值与最小值.

(2) 一致连续性定理　若函数 f 在有界闭域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 连续，则 f 在 D 上一致连续.

(3) 介值性定理　设函数 f 在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，P_1, P_2 为 D 中任意两点，且 $f(P_1)<f(P_2)$，则对任何满足不等式 $f(P_1)<\mu<f(P_2)$ 的实数 μ，必存在点 $P_0\in D$，使得 $f(P_0)=\mu$.

疑 难 解 析

1. 一元函数的极限概念与二元函数的极限概念有何异同?

答　一元函数的极限与二元函数的极限都是讨论在自变量的

某个变化趋势下，函数值与某个常量之间的关系. 只是二元函数比一元函数对自变量的要求更高，也更为复杂. 如对$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，只要求在 x_0 的左、右极限存在且相等，则函数在 x_0 的极限就存在. 而对 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$，要求点 $P(x,y)$以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$都趋向于同一个极限. 任何方式包含了 x 与 y 的不同关系与趋向时的不同路径. 这为我们判断函数不存在提供了方便.

在二元函数极限概念中还存在因自变量变化而产生的二重极限与二次极限的区别，而这在一元函数极限概念中是没有的.

但是，一元函数的极限的性质，如惟一性、局部有界性、局部保序性、局部迫敛性以及极限的四则运算法则，在二元函数极限中依然成立. 读者可试着证明.

2. 什么是二次极限与二重极限？它们之间有什么样的关系？

答 在求二元函数 $f(x,y)$极限的过程中，如果自变量是同时变化的，则极限称为二重极限，如 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$. 如果自变量的变化有先后之分，则极限称为二次极限，如$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$. 二重极限与二次极限是两个不同的概念，彼此间关系很复杂.

如果 $f(x,y)$存在 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$与$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，则它们必相等. 如果二重极限与两个二次极限都存在，则三者相等.

若两个二次极限存在但不相等，则二重极限必不存在，即二次极限存在也不能保证二重极限存在. 同样，二重极限存在不能保证二次极限存在.

例如，对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/x)\cos(1/y), & x\neq 0,y\neq 0,\\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0,\end{cases}$$

由于$|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，但是两个二次极限都不存在.

而对于函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin(1/x), & x\neq 0, y\neq 0, \\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0, \end{cases}$$

二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$ 存在，但先对 x 后对 y 的二次极限 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在.

又如，对于函数

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2},$$

二次极限存在且相等，即 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$，但是二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. 因为

沿直线 $x=0$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(0,y)=0$，

沿直线 $x=y$ 时，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x)=1$.

方法、技巧与典型例题分析

一、二元函数的极限

证明函数的极限难度是比较大的，因为要证明点 $P(x,y)$ 在任何方式下趋向于 $P(x_0,y_0)$ 时有同一极限是不可能的. 一般都用定义来证，即证当 $P\in U^{\circ}(P_0,\delta)$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立. 也可以利用坐标系的转换，将二元函数化为一元函数的极限来证.

例 1 证明：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证法 1 因为由 $|f(P)-A|$，得

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{2|xy|}}\leqslant\sqrt{|x||y|},$$

所以，$\forall\ \varepsilon>0$. 令 $\delta=\varepsilon$，则当 $(x,y)\neq(0,0)$ 且 $0<|x-0|<\delta, 0<|y-0|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

证法 2 将所给函数化为一元函数，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则 $\forall$ 任 $\theta,(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $r\to 0$，则

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = r\sin\theta\cos\theta.$$

由于 $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$ 在 $r\to 0$ 时是有界量，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0.$$

例 2 证明下列极限存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}} \frac{xy-1}{y+1}=3$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(4x^2+3y)=19.$

证 (1) $y\to+\infty$，可以设为 $y>0$，于是

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right| = \left|\frac{xy-1-3y-3}{y+1}\right| = \left|\frac{(x-3)y-4}{y+1}\right|$$

$$\leqslant \frac{|x-3|y}{y+1}+\frac{4}{y+1} < |x-3|+\frac{4}{y}.$$

$\forall\ \varepsilon>0$，取 $0<\delta<\varepsilon/5, A>1/\delta$，则当 $|x-3|<\delta, y>A$ 时，恒有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right| < |x-3|+4/y < \delta+4/A$$

$$< \delta+4\delta = 5\delta = \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to+\infty}} \frac{xy-1}{y+1}=3.$$

(2) 取 $\delta_1=1$，并限定 $|x-2|<1, |y-1|<1$，则

$$|x+2| = |x-2+4| \leqslant |x-2|+4 < 5.$$

$\forall\ \varepsilon<0$，要使不等式

$$|(4x^2+3y)-19| = |(4x^2-16)+3(y-1)|$$

$$\leqslant 4|x-2||x+2|+3|y-1|$$

$$< 20(|x-2|+|y-1|) < \varepsilon$$

成立，只需 $|x-2|<\varepsilon/40, |y-1|<\varepsilon/40$，可取 $\delta_2=\varepsilon/40$. 于是，$\forall\ \varepsilon$

>0，$\exists\ \delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，使得当 $|x-2|<\delta$，$|y-1|<\delta$ 时，恒有

$$|(4x^2+3y)-19|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to2}}(4x^2+3y)=19.$$

例 3 证明：限制在区域 $D=\{(x,y)\,|\,|y|<x^2\}$ 内的函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 存在极限 1（关于 D）.

证 区域 D 如图 10.10 所示. $\forall\ \varepsilon>0$，要使不等式

$$\left|\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|=\frac{2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{2y^2}{2|xy|}$$

$$=\frac{|y|}{|x|}<\frac{|x^2|}{|x|}=|x|<\varepsilon\ (\text{因为 } |y|<x^2)$$

成立，只需取 $\delta=\varepsilon$. 于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=\varepsilon>0$，$\forall\ (x,y)\in D$：$|x|<\delta$，$|y|<\delta$，恒有 $\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-1\right|<\varepsilon$ 成立. 故

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1\ (\text{关于 } D).$$

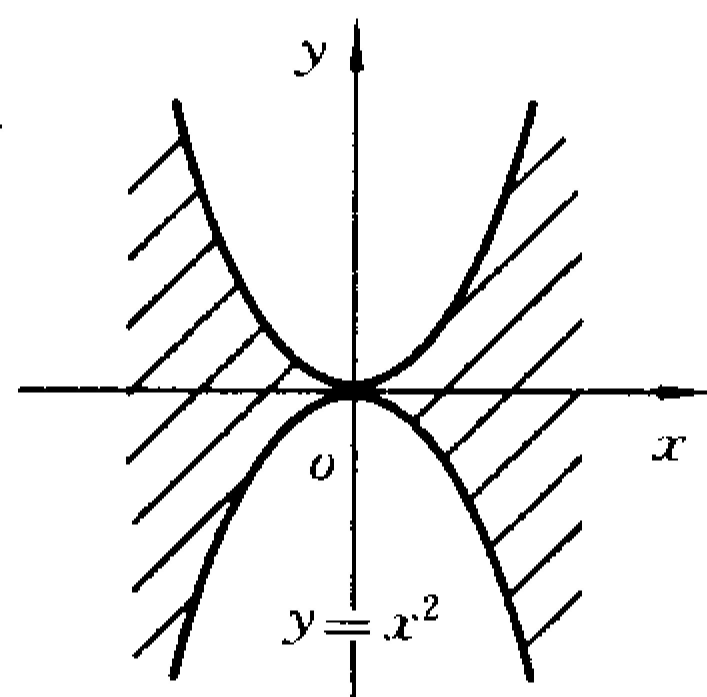


图 10.10

证明函数的极限不存在则要简单得多，一般的方法是：

(1) 在某种方式下点 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，函数极限不存在；

(2) 在两种不同方式下点 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，函数极限都存在，但不相等.

一般采用的趋向方式是：点 (x,y) 沿 $x=0$，或 $y=0$，或 $y=kx$，或 $y=x^k$ 趋向于 (x_0,y_0).

例 4 证明：对于函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

证 按 $y=kx\to(0,0)$ 方向取极限，得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4k^2}{x^4k^2+x^2(1-k^2)^2}.$$

当 $k=0$ 时，极限为零；当 $k=1$ 时，极限为 1. 故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

例 5 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$.

证 (1) 取 $x_n=1/n, y_n=0$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}=\lim_{n\to\infty}[1+0]^n=1;$$

取 $x_n=\dfrac{1}{n}, y_n=\dfrac{-1}{n+1}$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x_ny_n)^{\frac{1}{x_n+y_n}}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n(n+1)}\right]^{n(n+1)}=\mathrm{e}^{-1}.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

(2) 当点 $P(x,y)$ 沿 $y=kx\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0;$$

当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x^2\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

(3) 当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x^3-x\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3(x^3-x)+x(x^3-x)^4+x^2(x^3-x)}{x+(x^3-x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^3-x^4+o(x^4)}{x^3}=-1;$$

当点 $P(x,y)$ 沿 $y=x\to P_0(0,0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x + y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + x^5 + x^3}{2x} = 0.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+xy^4+x^2y}{x+y}$不存在.

(4) 当点 $P(x,y)$沿 $y=x\to(\infty,\infty)$时,有

$$\lim_{P\to\infty} \left| \frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{\sqrt{|x|}}{5x} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0;$$

当点 $P(x,y)$沿 $y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\sqrt{|x|}}{2}\to(\infty,\infty)$时,有

$$\lim_{P\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{3x + 2y} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{\sqrt{|x|}} = 1.$$

从而知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$不存在.

计算二元函数的极限常利用一元函数求极限的方法,如迫敛性、有界函数与无穷小量乘积、有理化、两个重要极限等方法. 如果能进行变量代换,化为一元函数形式,则洛必达法则、无穷大的次数比等方法也可以使用.

例 6 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$;　　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 令 $x^2+y^2=t$,则当 $x\to 0, y\to 0$ 时,$t\to 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2 + y^2)^2\ln(x^2 + y^2)$$

$$= \lim t^2\ln t = \lim \frac{\ln t}{1/t^2} \overset{L'}{=\!=} \lim_{t\to 0} -\frac{1}{2}t^2 = 0.$$

(2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}2\,\frac{\sin^2(x^2+y^2)/2}{[(x^2+y^2)/2]^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{4x^2y^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=+\infty.$$

(3) 令 $\sqrt{x^2+y^2}=t$，当 $x\to 0, y\to 0$ 时，$t\to 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}$$

$$\stackrel{\text{L}'}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}\stackrel{\text{L}'}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

(4) 利用连续性与极限运算法则，有

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2.$$

例 7 计算下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$;

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$;　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}$;

(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}$.

解 (1) 因为

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y^{3/2}}{2x^2y}\right|=\frac{1}{2}|y|\to 0$$

成立，所以
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^{3/2}}{x^4+y^2}=0.$$

(2) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，由 $(x,y)\to(0,0)$ 得 $r\to 0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0}r^4\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\ln r^2.$$

由洛必达法则得 $\lim\limits_{r\to 0}r^4\ln r^2=0$，而 $\sin^2 2\theta$ 为有界量，从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0.$$

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2}$,

而
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|\to 0,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1,$$

故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

(4) 因为若 $x\to+\infty, y\to+\infty$时，可设 $x>0, y>0$，则

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}\to 0,$$

所以
$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x}{y(x+y)}}$,

而
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\frac{x}{y(x+y)}=\frac{1}{a},\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{xy}=\mathrm{e},$$

故
$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\frac{1}{xy}\right)^{x^2/(x+y)}=\mathrm{e}^{1/a}.$$

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin[(y+1)(x^2+y^2)]}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{[(y+1)(x^2+y^2)]}{(y+1)(x^2+y^2)}\cdot(y+1)=1\cdot 1=1.$$

例 8 证明：若 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \varepsilon>0,\forall\ r\ (0<r<\delta),\forall\ \theta\ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，有

$$|f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

证 此例事实上证明了极限过程中坐标变换的合理性.

必要性 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$，则 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0,\forall\ (x,y)$:

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

设 $x=x_0+r\cos\theta, y=y_0+r\sin\theta$，则 $\forall\ \theta: 0<\theta<2\pi$，有

$$|x-x_0|=|r\cos\theta|\leqslant r,\quad |y-y_0|=|r\sin\theta|\leqslant r.$$

从而 $\forall\ r: 0<r<\delta$ 和 $\forall\ \theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$. 得

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon.$$

充分性 若$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,且$\forall\ r:0\leqslant r\leqslant\delta,\forall\ \theta:0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$,有

$$|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta-A|<\varepsilon.$$

设$x=x_0+r\cos\theta,y=y_0+r\sin\theta$,则$\forall\ \theta\in[0,2\pi]$,有

$$|x-x_0|\leqslant r,\quad |y-y_0|\leqslant r,$$

其中 $$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

取$\eta=\delta/\sqrt{2}$,则$\forall\ \varepsilon>0,\eta>0$ 且$\forall\ (x,y)$,有

$$|x-x_0|<\eta,\quad |y-y_0|<\delta\ (r<\delta),$$

且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,于是

$$|f(x,y)-A|=|f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)-A|<\varepsilon,$$

即 $$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A.$$

例 9 若$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\varphi(x,y)=A$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\psi(x,y)=0$,且在$(x_0,y_0)$的邻域内$|f(x,y)-\varphi(x,y)|\leqslant\psi(x,y)$成立,证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$.

证 由题设知$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得$\forall\ (x,y):|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$,且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,有

$$|\varphi(x,y)-A|<\varepsilon,\quad |\psi(x,y)-0|<\varepsilon.$$

于是,$\forall\ (x,y):|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$,且$(x,y)\neq(x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned}|f(x,y)-A|&\leqslant|f(x,y)-\varphi(x,y)|+|\varphi(x,y)-A|\\&\leqslant\psi(x,y)+|\varphi(x,y)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

二、二元函数的连续性

如同极限问题一样,二元函数的连续性问题要比一元函数要

求更高，处理起来也更复杂．但是，一切从基本概念出发，熟知连续性的定义和定理，参考一元函数连续性问题的解决方法，二元函数连续性的问题就不难解决．

例 10 求下列函数的间断点（或间断线）：

(1) $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$； (2) $z=\dfrac{1}{\sin x\sin y}$；

(3) $z=\ln(1-x^2-y^2)$； (4) $z=\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sin\pi y}$.

解 考虑使函数无意义的点．

(1) 曲线 $y^2=2x$ 是函数的间断线．

(2) 直线 $x=m\pi$ 与 $y=n\pi$ $(m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$是函数的间断线．

(3) 圆周 $x^2+y^2=1$ 是函数的间断线．

(4) 直线 $y=m\pi$ $(m=0,1,2,\cdots)$和 $x=0$ 是函数的间断线．

例 11 讨论下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$； (4) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

解 (1) 当 $x^2+y^2\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$连续．

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}=\lim\frac{k}{1+k^2}$$

显然与 k 有关．所以函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$不连续．

即函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上除点$(0,0)$外都连续．

(2) 当 $x^2+y^2\neq0$ 时，函数 $f(x,y)$连续．由

$$0<\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\to0$$

知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 所以函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$连续.

即函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(3) $\forall\ (x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,有

$$
\begin{aligned}
&|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \\
&= \left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^0}\right| \\
&= 2\left|\cos\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}}{2}\right|\left|\sin\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{2}\right| \\
&\leqslant \left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right| \leqslant \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},
\end{aligned}
$$

则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\varepsilon$,当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

即函数 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续,所以 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续.

(4) 函数 $f(x,y)$在 $x^2+y^2\neq 0$ 时连续.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2}$$

随 k 变化而变化,所以 $f(x,y)$在点$(0,0)$不连续.

即函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上除点$(0,0)$外连续.

例 12 讨论以下函数的连续性:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin(x-2y)}{x-2y}, & x\neq 2y,\\ 0, & x=2y.\end{cases}$$

解 当 $x\neq 2y$ 时,函数 $f(x,y)$连续.

当 $x_0=2y_0\neq 0$ 时,取路径 $x=2y$,有

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0=x_0/2}} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}x_0\frac{\sin(x-2y_0)}{x-2y_0}=x_0,$$

而在点$(0,0)$,极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x\frac{\sin(x-2y)}{x-2y}=0=f(0,0),$$

从而 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

但 $x_0\neq 0$,故不等于 $f(0,0)$,直线 $2y=x$ 上除点 $(0,0)$ 外的点是函数的间断点.

例 13 证明:函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 当 (x,y) 沿过点 $(0,0)$ 的每一条射线

$$x=t\cos\alpha,\quad y=t\sin\alpha\quad (0<t<+\infty)$$

连续,即 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$. 但函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

证 当 $\sin\alpha=0$ 时,$\cos\alpha=1$ 或 -1. 当 $t\neq 0$ 时,$f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\dfrac{t^2\cdot 0}{t^4+0}=0$,而 $f(0,0)=0$,故 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$.

但当点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2\to(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}\neq f(0,0),$$

从而,函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

例 14 设函数 $f(x,y)$ 在域 D 内对变量 x 是连续的,并对变量 y 满足李卜希兹条件,即 $\forall\ (x,y'),(x,y'')\in D$,有

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 L 为常数. 证明:$f(x,y)$ 在 D 上连续.

证 $\forall\ (x_0,y_0)\in D$,由于 $f(x,y)$ 对 x 连续,则 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_1(x_0,y_0)>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

取 $\delta_2=\varepsilon/(2L)>0$,则当 $|y-y_0|<\delta$ 时,由条件有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|<L\varepsilon/(2L)=\varepsilon/2.$$

故取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 且 $U((x_0,y_0),\delta)\subset D$ 时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leqslant |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
$$\leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$
即知 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续. 由(x_0,y_0)的任意性知,$f(x,y)$在 D 上连续.

例 15 证明尤格定理:若 $f(x,y)$分别对于 x 与 y 连续,且对于其中一个变量是单调的,则 $f(x,y)$对两个变量总体是连续的.

证 由题设,$f(x,y)$对任意(x_0,y_0)关于 x 和 y 连续,则$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_1>0$,使得当$|x-x_0|<\delta_1$ 时,有
$$|f(x,y_0)-f(x,y)|<\varepsilon/2.$$
特别地,有
$$|f(x_0+\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(x_0-\delta_1,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$
$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta_2>0$,使得当$|y-y_0|<\delta_2$ 时,有
$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0+\delta_1,y_0)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0-\delta_1,y_0)|<\varepsilon/2.$$
于是,当$|x-x_0|\leqslant\delta_1$,$|y-y_0|\leqslant\delta_2$ 时,由 $f(x,y)$对 x 的单调性得
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant\max\{|f(x_0-\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|,$$
$$|f(x_0+\delta_1,y)-f(x_0,y_0)|\}<\varepsilon.$$
在 $f(x,y)$对于 y 单调时同样可证.

例 16 证明:若函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上连续,且$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=A$,则函数 $f(x,y)$在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.

证 由$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}f(x,y)=A$ 知:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ T>1$,对任意的$(x,y)\in\mathbf{R}^2$,当$|x|>T$,$|y|>T$ 时,有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$. 从而,$\forall\ (x_1,y_1)$和(x_2,y_2),当$|x_1|>T$,$|x_2|>T$,$|y_1|>T$,$|y_2|>T$ 时,有
$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|$$
$$\leqslant|f(x_1,y_1)-A|+|f(x_2,y_2)-A|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$
即 $f(x,y)$在区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|>T,|y|>T\}$内一致连续.

而在有界闭方形区域 $G=\{(x,y)\,|\,|x|<T+1,|y|<T+1\}$

内，由于 $f(x,y)$ 连续，所以一致连续. 即 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ 0<\delta<1$，对于 (x_1,y_1)，$(x_2,y_2)\in G$，且 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$，有

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon.$$

这样，$\forall\ (x_1,y_1)$ 与 $(x_2,y_2)\in\mathbf{R}^2$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，$|y_1-y_2|<\delta$，点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 一定同在 D 或 G 内. 于是

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<2\varepsilon,$$

即 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上一致连续.

例 17 证明：对于函数 $f(x,y)=x\sin(1/y)$，若 $y\neq 0$，则 $f(x,y)=0$ 的间断点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0\neq 0$ 时，函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 即在 $\mathbf{R}^2$ 上除 x 轴外的一切点连续. 又

$$0\leqslant|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|\leqslant|x|\to 0,$$

所以，当 $y_0\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 也连续.

当 $x_0\neq 0$ 时，对点 $(x_0,0)$，极限 $\lim\limits_{y\to 0}x_0\sin(1/y)$ 不存在. 所以，当 $x_0\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ 不连续. 也就是说，$f(x,y)$ 的全部不连续点为 x 轴上除点 $(0,0)$ 外的所有点，但点 $(0,0)$ 是不连续点的聚点而不是间断点. 从而知 $f(x,y)$ 的不连续点的集合不封闭.

例 18 设函数 $f(x,y)$ 在域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，函数列 $\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛并满足 $b\leqslant\varphi_n(x)\leqslant B$. 证明：函数列 $F_n(x)=f(x,\varphi_n(x))$ $(n=1,2,\cdots)$ 也在 $[a,A]$ 上一致收敛.

证 由于 $f(x,y)$ 在闭域 $a\leqslant x\leqslant A$，$b\leqslant y\leqslant B$ 上连续，故必一致连续，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $y',y''\in[b,B]$ 时，只要 $|y'-y''|<\delta$，就有 $|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon$.

又 $\varphi_n(x)$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，故 $\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $m>N$，$n>N$ 时，$\forall\ x\in[a,A]$，有 $|\varphi_m(x)-\varphi_n(x)|<\delta$.

由题设，$b\leqslant\varphi_m(x)$，$\varphi_n(x)\leqslant B$，故 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $m>N$，$n>N$，且 $a\leqslant x\leqslant A$ 时，有

$$|F_m(x)-F_n(x)|=|f(x,\varphi_m(x))-f(x,\varphi_n(x))|<\varepsilon,$$

即 $F_n(x)$在$[a,A]$上一致收敛.

例 19 设$f(x,y)$在域$a<x<A,b<y<B$内连续,函数$\varphi(x)$在区间(a,A)连续并有属于区间(b,B)的值. 证明:函数$F(x)=f[x,\varphi(x)]$在区间(a,A)内连续.

证 任取点(x_0,y_0)属于$a<x<A,b<y<B$,则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta$时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

又对上述$\delta>0,\exists\ \eta<0$(可取$\eta<\delta$),使得当$|x-x_0|<\eta$ $(x\in(a,A))$时,有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|y-y_0|<\delta,$$

于是 $$|F(x)-F(x_0)|=|f(x,\varphi(x))-f(x_0,\varphi(x_0))|<\varepsilon,$$

即$F(x)$在x_0连续. 由x_0的任意性知,$F(x)$在区间(a,A)内连续.

例 20 设函数$f(x,y)$在域$R(a<x<A,b<y<B)$内连续,函数$x=\varphi(u,v)$与$y=\psi(u,v)$在域$R'(a'<u<A',b'<v<B')$内连续并有属于(a,A)与(b,B)的值. 证明:函数$F(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$在域$R'$内连续.

证 取足够小的δ与η,使得点的δ或η邻域在所给域内.

任取$(x_0,y_0)\in R$,则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得当$|x-x_0|<\delta$,$|y-y_0|<\delta$时,有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

由$\varphi(u,v)$与$\psi(u,v)$的连续性知,$\forall$ 上述$\delta<0,\forall\ \eta>0$,使得当$|u-u_0|<\eta,|v-v_0|<\eta$时,有

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

其中 $$x_0=\varphi(u_0,v_0),\quad y_0=\psi(u_0,v_0).$$

于是,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,使得当$|u-u_0|<\eta,|v-v_0|<\eta$时,有

$$\begin{aligned}&|F(u,v)-F(u_0,v_0)|\\&=|f(\varphi(u,v),\psi(u,v))-f(\varphi(u_0,v_0),\psi(u_0,v_0))|<\varepsilon,\end{aligned}$$

则$F(u,v)$在点(u_0,v_0)连续. 由(u_0,v_0)的任意性知,$F(u,v)$在R'内连续.

第三节　多元函数的偏导数与全微分

主要内容

1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内有定义，$\forall\ P(x,y)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in U(P)$，若函数 $f(x,y)$ 在 P_0 的全增量 Δz 可表示为

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &= A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\end{aligned}$$

其中 A,B 是仅与 P_0 有关的常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微.

$\Delta x,\Delta y$ 的线性函数 $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数在点 P_0 的全微分. 记作 $\mathrm{d}z|_{P_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$.

2. 设函数 $f(x,y)$ 定义在 D 上，若 $(x_0,y_0)\in D$，且 $f(x,y)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则称极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 x 的偏导数，记作

$$f_x(x_0,y_0)\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}.$$

类似地，定义极限

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

为函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 关于 y 的偏导数.

若函数 $f(x,y)$ 在 D 上每一点 (x,y) 都存在关于 x（或 y）的偏导数，则称函数 $f(x,y)$ 在 D 上有关于 x（或 y）的偏导函数，记作 $f_x(x,y),f_y(x,y)$；$\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$；简记为 f_x,z_x.

3. 偏导数的几何意义　$f_x(x_0,y_0)$表示曲面$z=f(x,y)$与平面$y=y_0$的交线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=y_0\end{cases}$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的切线$T_x$的斜率(或切线$T_x$与$x$轴正向夹角$\alpha$的正切). 类似地,$f_y(x_0,y_0)$表示曲面$z=f(x,y)$与平面$x=x_0$的交线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ x=x_0\end{cases}$在点$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$的切线$T_y$的斜率(或切线$T_y$与$y$轴正向夹角$\beta$的正切). 即

$$f_x(x_0,y_0)=\tan\alpha,\quad f_y(x_0,y_0)=\tan\beta.$$

4. 可微的必要条件　若函数$f(x,y)$在其定义域内一点(x_0,y_0)可微,则函数f在该点的偏导数$f_x(x_0,y_0)$,$f_y(x_0,y_0)$都存在,且

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$$

或
$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

5. 可微的充分条件　若函数$f(x,y)$的偏导数在$U((x_0,y_0);\delta)$存在,且f_x与f_y在点(x_0,y_0)连续,则函数f在点(x_0,y_0)可微.

6. 设函数$f(x,y)$在$U((x_0,y_0);\delta)$存在偏导数,$(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)$,则$\exists\ \xi=x_0+\theta_1(x-x_0)$,$\eta=y_0+\theta_2(y-y_0)$, $0<\theta_1,\theta_2<1$,使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0).$$

7. 曲面$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于z轴的切平面π的充要条件是,函数f在点$P_0(x_0,y_0)$可微.

若函数$f(x,y)$在(x_0,y_0)可微,则曲面$z=f(x,y)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的切平面方程和法线方程分别为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

疑难解析

1. 说明函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续与在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数之间的关系.

答 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数不一定存在. 例如 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 连续，但是

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

不存在. 同理，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 也不存在，这是因为 $f(x,y)$ 连续不能保证左、右导数存在且相等.

反之，函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的偏导数存在也不能确定函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 存在偏导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=0$，但在点 $(0,0)$ 不连续. 这是因为 $f_x(x_0,y_0)$ 只反映函数 $f(x,y_0)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 作为 x 的函数在 x_0 是连续的，$f_y(x_0,y_0)$ 只反映函数 $f(x_0,y)$ 作为 y 的函数在 y_0 是连续的. 而 $f(x,y_0)$ 在 x_0 连续与 $f(x_0,y)$ 在 y_0 连续并无必然联系，并且 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续要求函数 $f(x,y)$ 在经过点 $P_0(x_0,y_0)$ 的任何方向上连续，这是偏导数存在不能保证的.

但是函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微时，由定义 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$，保证 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

2. 说明函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微与偏导数存在之间的关系.

答 若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数必存在. 因为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在是 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微的必要条件，且

$$\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

但反过来不一定成立，例如，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，在点 $(0,0)$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微. 因为若按上式，有

$$\mathrm{d}f|_{(0,0)} = 0\cdot\mathrm{d}x + 0\cdot\mathrm{d}y = 0.$$

而 $$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

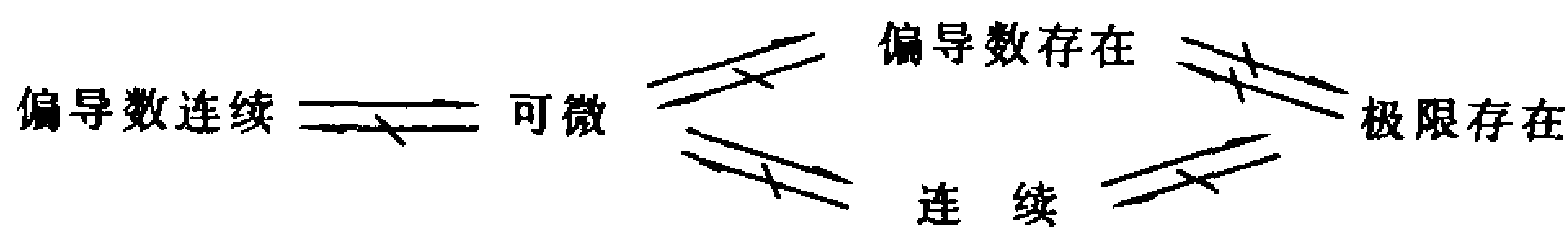
当取 $\Delta x=\Delta y$ 时，$\Delta f=|\Delta x|$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{2}\,|\Delta x|$，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f-\mathrm{d}f}{\rho}=\lim\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

从而，Δf 与 ρ 为同阶无穷小，与可微性定义相矛盾. 因此，$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内偏导数存在，且偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续，则函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微. 但偏导数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续不是函数可微的必要条件.

二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的可微、连续、极限与偏导数存在之间有如下关系.



方法、技巧与典型例题分析

在计算函数在其一点的偏导数或区域上的偏导函数时，可以利用一元函数的求导法则，只要牢记只有一个变量在变，而把其余变量视作常数就行. 也可以利用全微分的形式不变性求偏导数，即求出全微分时同时得到几个偏导数. 这样不仅简捷方便，而且在计

算中还不必区别自变量与中间变量，避免出错.

若函数在个别孤立点有定义但不知偏导数是否存在，更不知偏导函数在该点是否连续，则必须依定义来讨论函数在该点的偏导数.

例 1 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$：(1)偏导数是否存在；(2)偏导数是否连续；(3)是否可微.

解 (1) 由定义知

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x^2)}{x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin(1/y^2)}{y}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 偏导数存在.

(2) 因为当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，$f(x,y)$ 偏导数存在，故

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\left[\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right], & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\begin{cases}2y\left[\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right], & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 不存在，故偏导数在点 $(0,0)$ 不连续.

(3) $\Delta z=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)2+(\Delta y)^2}$,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\rho\to 0}\rho\sin\frac{1}{\rho^2}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且全微分 $dz=0$.

本例说明在二元函数的不连续点函数仍可能可微. 偏导数连

续是可微的充分条件，而不是充要条件.

例 2 证明：$f_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]$.

证 依定义知

$$f_x(x,b)=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b},$$

而
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x}.$$

因为 y 与 Δx 无关，所以

$$\begin{aligned}&\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}\right]_{y=b}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,b)-f(x,b)}{\Delta x},\end{aligned}$$

即
$$f_x(x,b)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x,b)].$$

例 3 (1) $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

求 $f_x(0,0)$，$f_x(x,0)$ $(x\neq 0)$，$f_x(0,y)$ $(y\neq 0)$；

(2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$

求 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$，$f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$.

解 由于点(0,0)是分段函数分界点，故需依定义求解.

(1) $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，

当 $x\neq 0$ 时，$f_x(x,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$；

当 $y\neq 0$ 时，$f_x(0,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,y)-f(0,y)}{\Delta x}=-y$.

(2) 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，应用求导公式，得

$$f_x(x,y)=\frac{(x^2+y^2)y-xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{(x^2+y^2)x-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，依定义得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

例 4 求下列函数的偏导数：

(1) $z=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　(2) $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$；

(3) $z=(1+xy)^x$；　　(4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$；

(5) $u=xze^{\sin(yz)}$；　　(6) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$.

解 (1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[1\Big/\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\right]\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x^2/\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$=\frac{|y|}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[1\Big/\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\right]\frac{(-xy)/\sqrt{x^2+y^2}}{(\sqrt{x^2+y^2})^2}$$

$$=-\frac{xy}{|y|(x^2+y^2)}.$$

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=1\Big/\left[1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2\right]\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=1\Big/\left[1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2\right]\frac{(x-y)+(x+y)}{(x-y)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

(3) 对 $z=(1+xy)^x$ 两边取对数，得

$$\ln z=x\ln(1+xy),$$

两边分别对 x 求导，得 $\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(1+xy)+x\frac{y}{1+xy}$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + xy)^x\left[\ln(1 + xy) + \frac{xy}{1 + xy}\right],$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1 + xy)^{x-1} \cdot x = x^2(1 + xy)^{x-1}.$$

(4) $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}(x+\sqrt{x^2+y^2})}.$$

(5) $$\frac{\partial u}{\partial x}=z\mathrm{e}^{\sin(yz)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}= xz\mathrm{e}^{\sin(yz)}\cos(yz) \cdot z = xz^2\mathrm{e}^{\sin(yz)}\cos(yz),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}= x\mathrm{e}^{\sin(yz)} + xz\mathrm{e}^{\sin(yz)}\cos(yz) \cdot y$$

$$= x\mathrm{e}^{\sin(yz)}[1 + yz\mathrm{e}^{\cos(yz)}\cos(yz)].$$

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{z}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{z}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}+\frac{x}{z^2}$.

例 5 利用对称性,求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^yy^x$; (2) $u=\ln(x^yy^zz^x)$, $x>0,y>0,z>0$;

(3) $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$; (4) $z=xy-\frac{2xy^3}{x^2+y^2}$.

解 函数的对称性是指函数的任意两个自变量交换位置后函数不变的性质,如 $z=x^2\arctan(x/y)+y^2\arctan(y/x)$ 就是如此. 对称性可以使计算变得简便. 有些函数虽然不是对称函数,但利用轮换对称或对换,也能得到对称性的效果.

(1) 等式两边取对数,得

$$\ln z = y\ln x + x\ln y,$$

两边再对 x 求导,得 $\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}+\ln y$,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{y}{x}+\ln y\right)=x^y y^x\left(\frac{y}{x}+\ln y\right).$$

依对称性得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=x^y y^x\left(\frac{x}{y}+\ln x\right).$$

(2) 直接求导,得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{\frac{x^2+y^2}{xy}}+(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}\left[\frac{2x\cdot xy-(x^2+y^2)y}{x^2y^2}\right]$$

$$=\frac{x^4-y^4+2x^3y}{x^2y}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

依对称性得 $$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y^4-x^4+2xy^3}{xy^2}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}.$$

(3) $u=\ln(x^y y^z z^x)=y\ln x+x\ln y+x\ln z$ 不是三元对称函数,但在变换 $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ y & z & x \end{pmatrix}$ 下,函数不变,称为三元轮换对称函数(在多元函数积分学中常见).可对任一变量的结果进行字母(变量)的轮换得到需要的结果.

u 对 x 直接求导,得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{x}+\ln z.$$

利用变换轮换变量,得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{z}{x}+\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x}{z}+\ln y.$$

(4) z 不是 x 和 y 的对称函数,但由

$$z=xy-\frac{2xy^3}{x^2+y^2}=xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

可知,当 x,y 互换后所得函数与原来函数只相差一个负号,即 $(f(x,y))=-f(y,x)$.故

$$\frac{\partial}{\partial y}[f(x,y)]=-\frac{\partial}{\partial y}[-f(x,y)]=-\frac{\partial}{\partial y}[f(y,x)].$$

因为 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{2y^3(x^2+y^2)-2xy^3\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y + \frac{2y^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial y} = - x + \frac{2x^3(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

例 6 设 $u=\sin x+\varphi(\sin x+\cos y)$，其中 φ 为可导函数，且当 $x=0$ 时，$u=\sin^2 y$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$.

解 先求 $\varphi(t)$ 的表达式. 因为 $x=0$ 时，$u=\sin^2 y$，即

$$u = \varphi(\cos y) = \sin^2 y = 1 - \cos^2 y,$$

所以
$$\varphi(t) = 1 - t^2,$$
$$\varphi(\sin x + \cos y) = 1 - (\sin x + \cos y)^2,$$

从而
$$u = \sin x + 1 - (\sin x + \cos y)^2,$$

于是
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x - 2(\sin x + \cos y)\cos x,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2(\sin x + \cos y)\sin y.$$

例 7 求下列函数的偏导数：

(1) $u=x^{yz}$； (2) $u=\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}$.

解 先求全微分，再求偏导数.

(1) 两边取对数，得 $\ln u=yz\ln x$，再求微分，得

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{yz}{x}\mathrm{d}x + z\ln x\mathrm{d}y + y\ln x\mathrm{d}z,$$

即
$$\mathrm{d}u = x^{yz}\left[\frac{yz}{x}\mathrm{d}x + z\ln x\mathrm{d}y + y\ln x\mathrm{d}z\right],$$

得
$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^{yz}\frac{yz}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{yz}z\ln x \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{yz}y\ln x.$$

(2) 两边取对数，得

$$\ln u = \frac{y}{z}\ln\frac{x}{y} = \frac{y}{z}(\ln x - \ln y),$$

两边求微分，得

$$\frac{1}{u}\mathrm{d}u=\frac{y}{zx}\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}\mathrm{d}z.$$

即 $$\mathrm{d}u=\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\left[\frac{y}{xz}\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right)\mathrm{d}y-\frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}\mathrm{d}z\right],$$

得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{y}{xz},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{1}{z}\left(\ln\frac{x}{y}-1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\left(\frac{x}{y}\right)^{y/z}\frac{y}{z^2}\ln\frac{x}{y}.$$

例 8 计算下列偏导数：

(1) $z=x^2+(y^2-1)\tan\sqrt{x/y}$，求 $z_x(x,1)$；

(2) $z=\dfrac{\cos(x-2y)}{\cos(x+y)}$，求 $z_y\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)$.

解 (1) 先求偏导函数，再求偏导数值.

$$z_x=2x+(y^2-1)\sec^2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=2x+\frac{y^2-1}{2\sqrt{xy}}\sec^2\sqrt{\frac{x}{y}},$$

则 $$z_x(x,1)=2x.$$

(2) 先求一元函数 $f(\pi,y)$ 和 $f_y(\pi,y)$，得

$$f(\pi,y)=\frac{\cos(\pi-2y)}{\cos(\pi+y)}=\frac{\cos 2y}{\cos y},$$

$$f_y(\pi,y)=\frac{-2\sin 2y\cos y+\cos 2y\sin y}{\cos^2 y},$$

则 $$z_y(\pi,\pi/4)=-2\sqrt{2}.$$

计算函数的全微分，可以用先求各个偏导数后组合的方法，也可以由一阶微分的形式不变性直接求出.

例 9 求下列函数的全微分：

(1) $z=x\ln(xy)$； (2) $z=y\cos(x-2y)$ 在点 $(\pi,\pi/4)$；

(3) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$ 在点 $(1,2,1)$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+1=\ln(\mathrm{e}xy),\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}$,故

$$\mathrm{d}z=\ln(\mathrm{e}xy)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y.$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=y\sin(x-2y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\cos(x-2y)+2y\sin(x-2y)$,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\pi,\frac{\pi}{4})}=\frac{\pi}{4},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\pi,\frac{\pi}{4})}=\frac{\pi}{2},$$

故

$$\mathrm{d}z|_{(\pi,\frac{\pi}{4})}=\frac{\pi}{4}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y).$$

(3) $\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz\mathrm{e}^{yz}+1$, $\frac{\partial u}{\partial z}=xy\mathrm{e}^{yz}-\mathrm{e}^{-z}$,

$$\mathrm{d}z=\mathrm{e}^{yz}\mathrm{d}x+(xz\mathrm{e}^{yz}+1)\mathrm{d}y+(xy\mathrm{e}^{yz}-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{d}z,$$

故

$$\mathrm{d}z|_{(1,2,1)}=\mathrm{e}^{2}\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{2}+1)\mathrm{d}y+(2\mathrm{e}^{2}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}z.$$

当求空间曲面的切平面与法线方程时,若曲面由显式方程给出,则只需求出各个偏导数,然后依公式代入即可.

例 10 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

解 令 $u=x^2+2y^2+z^2-1$,则$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=4y,\frac{\partial u}{\partial z}=2z$,故平面法向量 $\boldsymbol{n}=(2x,4y,2z)$.

而已知平面法向量为$\{1,-1,2\}$,由平行关系得

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{-1}=\frac{2z}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}z,y=-\frac{1}{4}z.$$

代入椭球面方程得

$$(z/2)^2+2(-z/4)^2+z^2=1.$$

解得

$$z=\pm 2\sqrt{\frac{2}{11}},\quad x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\quad y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}.$$

所求切平面方程为

$$\left(x\mp\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\mp 2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即 $$x - y + 2z = \pm\sqrt{11/2}.$$

例 11 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使得在这点的法线垂直于平面 $x+2y+z+9=0$，求法线方程.

解 令 $u=xy-z$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=y, \frac{\partial u}{\partial y}=x, \frac{\partial u}{\partial z}=-1$. 于是平面法向量 $\boldsymbol{n}=\{y,x,-1\}$.

而已知平面法向量为 $\{1,3,1\}$，与 $\boldsymbol{n}$ 平行. 由

$$\frac{y}{1}=\frac{x}{3}=\frac{-1}{1}\Rightarrow x=-3,\quad y=-1,\quad z=xy=3,$$

所求点为 $P(-3,-1,3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

例 12 设 $f(x,y)$ 在域 D 内有一阶连续偏导数，且恒有 $f_x=f_y=0$，证明：f 是 D 内常数函数.

证 由题设知，$f(x,y)$ 在 D 内可微，则

$$\mathrm{d}f = f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow f = c(\text{常数}),$$

故 $\forall\ (x,y)\in D, f(x,y)=c$(常数).

例 13 证明：若在域 D 上，$f(x,y)$(对每一个固定的 y)对 x 连续，且对 y 的偏导数有界，则 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

证 任取 $(x_0,y_0)\in D$，由 $f(x,y)$ 对 x 连续知，$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon/2.$$

又由拉格朗日中值定理知

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| = |f_y'(x,\xi)(y-y_0)| \leqslant M|y-y_0|,$$

其中 ξ 位于 y 与 y_0 之间，$|f'_y|\leqslant M$.

取 $\delta'=\min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{2(M+1)}\right\}$，当 $|x-x_0|<\delta', |y-y_0|<\delta'$ 时，有

$$\begin{aligned}&|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant\ &|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ \leqslant\ &M|y-y_0|+\varepsilon/2<\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续. 由(x_0,y_0)的任意性知,$f(x,y)$在 D 内连续.

例 14 证明:若 $f_x(x,y)$与 $f_y(x,y)$在矩形域 D 有界,则函数 $f(x,y)$在 D 内一致有界.

证 因为 $f_x(x,y)$与 $f_y(x,y)$在 D 有界,即$\forall\ (x,y)\in D$, $\exists\ M>0$,有$|f_x(x,y)|\leqslant M$ 与$|f_y(x,y)|\leqslant M$. 因而$\forall\ P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)\in D$,有 $Q(x_2,y_1)$. $\forall\ \varepsilon>0$,使得

$$\begin{aligned}
&|f(P_1)-f(P_2)| = |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\\
&\leqslant |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_1)| + |f(x_2,y_1)-f(x_2,y_2)|\\
&= |f_x(\xi,y_1)||x_1-x_2| + |f_y(x_2,\eta)||y_1-y_2|\\
&\leqslant M|x_1-x_2| + M|y_1-y_2| \leqslant 2M|P_1-P_2| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 ξ 在 x_1,x_2 之间,η 在 y_1,y_2 之间. 取 $\delta=\varepsilon/(2M)>0$,于是,$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta=\varepsilon/(2M)>0$,使得$\forall\ P_1,P_2\in D$:$|P_1-P_2|<\delta$,有上面的不等式成立,即 $f(x,y)$在 D 内一致连续.

第四节 复合函数微分法与方向导数

主要内容

一、复合函数微分法

设函数 $x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$定义在 sot 平面的区域 D 上,函数 $z=f(x,y)$定义在 xoy 平面的区域 D_1 上,且

$$\{(x,y)\,|\,x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t),(s,t)\in D\}\subset D_1,$$

则函数 $z=F(s,t)=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$,$(s,t)\in D$ 是以 $z=f(x,y)$ 为外函数,$x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$为内函数的复合函数.

1. **定理** 若函数 $x=\varphi(s,t)$,$y=\psi(s,t)$在点$(s,t)\in D$ 可微,$z=f(x,y)$在点$(x,y)=[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$可微,则复合函数 $z=$

$f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$在点$(s,t)$可微,它关于$s$与$t$的偏导数分别为

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

2. 若$z=f(x,y)$可微,则$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

若$z=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$可微,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial z}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

因而又有$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$,即多元函数的一阶微分形式不变性.

二、方向导数与梯度

1. 设函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)\subset\mathbf{R}^3$内有定义.$\boldsymbol{l}$为从点$P_0$出发的射线,$P(x,y,z)$为$\boldsymbol{l}$上且含于$U(P_0)$内的任一点,以$\rho$表示$P$与$P_0$间的距离.若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在,则称此极限为函数f在点P_0沿方向$\boldsymbol{l}$的方向导数,记作

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0},\quad f_l(P_0),\quad f_l(x_0,y_0,z_0).$$

2. 若函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微,则f在点P_0沿任一方向$\boldsymbol{l}$的方向导数都存在,且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦.

3. 若函数$f(x,y,z)$在点$P_0(x,y,z)$存在对各自变量的偏导数,则称向量$(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$为函数$f$在点$P_0$的梯度,记作

$$\mathbf{grad}f=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0)),$$

向量 $\mathbf{grad}f$ 的模（长度）为

$$|\mathbf{grad}f| = \sqrt{f_x(P_0)^2 + f_y(P_0)^2 + f_z(P_0)^2}.$$

疑难解析

1. 怎样用复合函数求导法则求导数？

答 多元复合函数的求导，关键是分析复合关系，即应搞清楚有几个复合层次，几个中间变量，中间变量又是几元函数. 为了清晰明了地表示这些关系，最好画出“树形图”，例如 $z=xy+xF(u)$，$u=y/x$，则其树形图如图 10.11 所示。然后利用树形图，按链式法则求导即可.

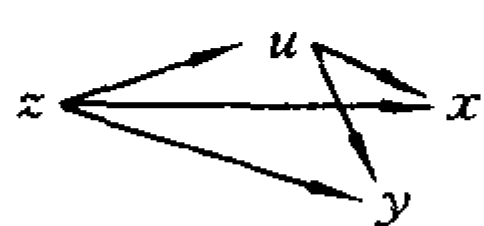


图 10.11

注意 若中间变量是一元函数，则求得的导数称为全导数，否则称为偏导数.

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向 l 的方向导数存在、可微、连续之间有什么关系？

答 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微是 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任一方向 l 的方向导数存在的充分条件，而不是必要条件. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, -\infty < x < +\infty, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

在点(0,0)不连续也不可微. 但在从原点出发的任何射线上都存在包含原点的充分小一段，使得 $f=0$，故在原点沿任何方向 l 的方向导数都存在，且为 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0$. 可见，$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微和连续都不是方向导数存在的必要条件.

若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿任何方向 l 的方向导数存在，则在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处偏导数存在.

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的梯度与在该点的方向导数有何关系?

答 因为梯度 $\mathbf{grad}f=(f_x(P_0),f_y(P_0))$，而分量 $f_x(P_0)$，$f_y(P_0)$ 是 f 沿 x 轴和 y 轴方向的方向导数. 梯度的模 $|\mathbf{grad}f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2}$ 也与 f 沿 x 轴和 y 轴方向的方向导数有关.

若记 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$f_l(P_0)=\mathbf{grad}f(P_0)\cdot\boldsymbol{l}_0=|\mathbf{grad}f|\cos\theta.$$

其中 θ 是梯度向量 $\mathbf{grad}f(P_0)$ 与 $\boldsymbol{l}_0$ 的夹角，当 $\theta=0$ 时，$\cos\theta=1$，$f_l(P_0)$ 取最大值，最大值为 $|\mathbf{grad}f(P_0)|$. 因此，f 在点 P_0 可微时，f 在点 P_0 的梯度方向是 f 增长最快的方向；沿这一方向的变化率就是梯度的模. 而 $\boldsymbol{l}$ 与梯度向量方向相反时，方向导数取得最小值，最小值为 $-|\mathbf{grad}f(P_0)|$.

方法、技巧与典型例题分析

一、多元复合函数求导与全微分

多元复合函数求导，首先要弄清复合关系，然后要正确运用链式法则.

例 1 求下列函数的全导数：

(1) $z=uv+\sin t, u=e^t, v=\cos t$，求 dz/dt；

(2) $z=\arcsin(x-y), x=3t, y=4t^3$，求 dz/dt；

(3) $z=f(x,y), x=t+\sin t, y=\varphi(t)$，求 dz/dt.

解 此例中间变量都是 t 的一元函数，所以是求全导数.

(1) 复合关系如图 10.12(a)所示，故

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}=\cos t\cdot e^t-e^t\sin t+\sin t.$$

(2) 复合关系如图 10.12(b)所示，故

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-(x-y)^2}} - \frac{12t^2}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$$

$$= \frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}.$$

(3) 复合关系如图 10.12(b)所示,故

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= f_x(x,y)(1-\cos t) + f_y(x,y)\varphi'(t).$$

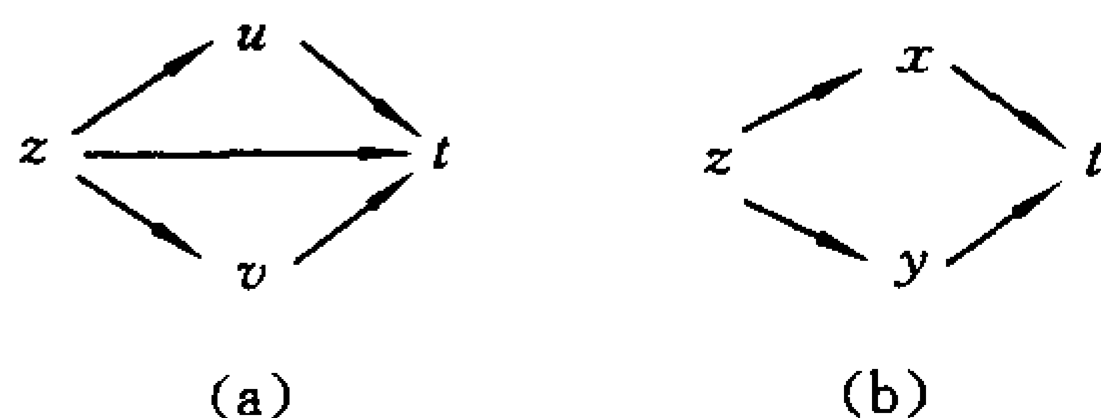


图 10.12

例 2 设函数 $f(x,y)$存在一阶连续偏导数,且 $f(1,1)=1$, $f'_1(1,1)=a$, $f'_2(1,1)=b$. 又 $\varphi(x)=f\{x,f[x,f(x,x)]\}$. 求 $\varphi(1)$ 和 $\varphi'(1)$.

解 $\varphi(1)=f\{1,f[1,f(1,1)]\}=f\{1,f(1,1)\}=f(1,1)=1.$

由 $$\varphi'(x)=f'_1\{x,f[x,f(x,x)]\} + f'_2\{x,f[x,f(x,x)]\}\{f'_1[x,f(x,x)] + f'_2[x,f(x,x)][f'_1(x,x)+f'_2(x,x)]\},$$

故 $$\varphi'(1)= f_1(1,1) + f_2(1,1)\{[f'_1(1,1)+f'_2(1,1)] \cdot [f'_1(1,1)+f'_2(1,1)]\}$$

$$= a + b[a + b(a+b)] = a + ab + ab^2 + b^3.$$

例 3 (1) $z=u^2v-v^2u$, $u=x\cos y$, $v=x\sin y$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $z=e^u\sin v$, $u=xy$, $v=x+y$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(3) $z=e^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\cdot\arctan(u/v)}$, 求$\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

解 (1) 复合关系如图 10.13(a)所示,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=(2uv-v^2)\cos y+(u^2-2vu)\sin y$$
$$=3x^2\cos y\sin y(\cos y-\sin y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=(2uv-v^2)(-x\sin y)+(u^2-2vu)x\cos y$$
$$=-2x^3\sin y\cos y(\sin y+\cos y)+x^3(\cos^3 y+\sin^3 y).$$

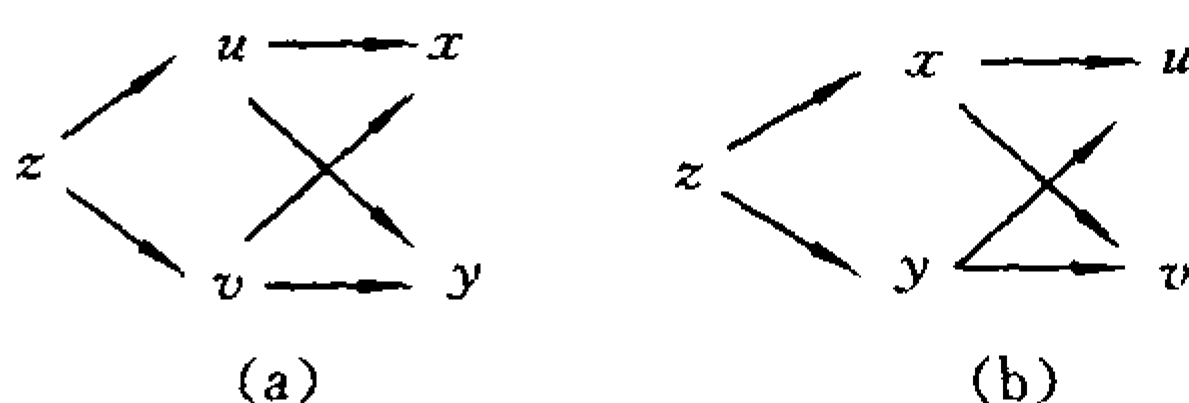


图 10.13

(2) 复合关系如图 10.13(a)所示,故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=ye^u\sin v+e^u\cos v$$
$$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)],$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=xe^u\sin v+e^u\cos v$$
$$=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

(3) 设 $x=\ln\sqrt{u^2+v^2}$, $y=\arctan(u/v)$,则 $z=e^{xy}$成为复合函数,复合关系如图 10.13(b)所示,故

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$=ye^{xy}\frac{u}{u^2+v^2}+xe^{xy}\frac{1}{1+(u/v)^2}\cdot\frac{1}{v}$$
$$=e^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\cdot\arctan(u/v)}\cdot\frac{u\arctan(u/v)+v\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= ye^{xy}\frac{v}{u^2+v^2}+xe^{xy}\frac{-u}{1+(u/v)^2}$$

$$= e^{\ln\sqrt{u^2+v^2}\arctan(u/v)}\cdot\frac{v\arctan(u/v)-u\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u^2+v^2}.$$

对于抽象函数形式的复合函数，一定要认真分析复合关系和步骤. 为简单起见，一般以下标来标记中间变量的顺序关系，以免出错.

例 4 设 $z=F(u,v,w)$，$v=f(u,x)$，$x=g(u,w)$，求 $\frac{\partial z}{\partial u}$，$\frac{\partial z}{\partial w}$.

解 复合关系如图 10.14 所示，故



图 10.14

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}u}+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w}\right)+\frac{\partial F}{\partial w}=\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial w}.$$

例 5 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f 和 φ 都有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 因为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x$，而 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 要由隐函数方程解出. 对 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 求导，得

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cdot y_x'+\varphi_3'\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,$$

即得
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{2x\varphi_1'+e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'},$$

故
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\cos x\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{2x\varphi_1'+e^y\varphi_2'\cos x}{\varphi_3'}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

例 6 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3f(xy,\frac{y}{x})$，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial z}{\partial x}$；

(2) $u=f(x,y,z)$，$z=\varphi(y,t)$，$t=\psi(x,y)$，其中 f，φ 有一阶连续偏导数，ψ 可导，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$；

(3) $u=f(x,xy,xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$；

(4) $z=f(x,u,v),u=u(x,y),v=v(x,y,u)$.

解 用乘积及复合导数求导法则求解.

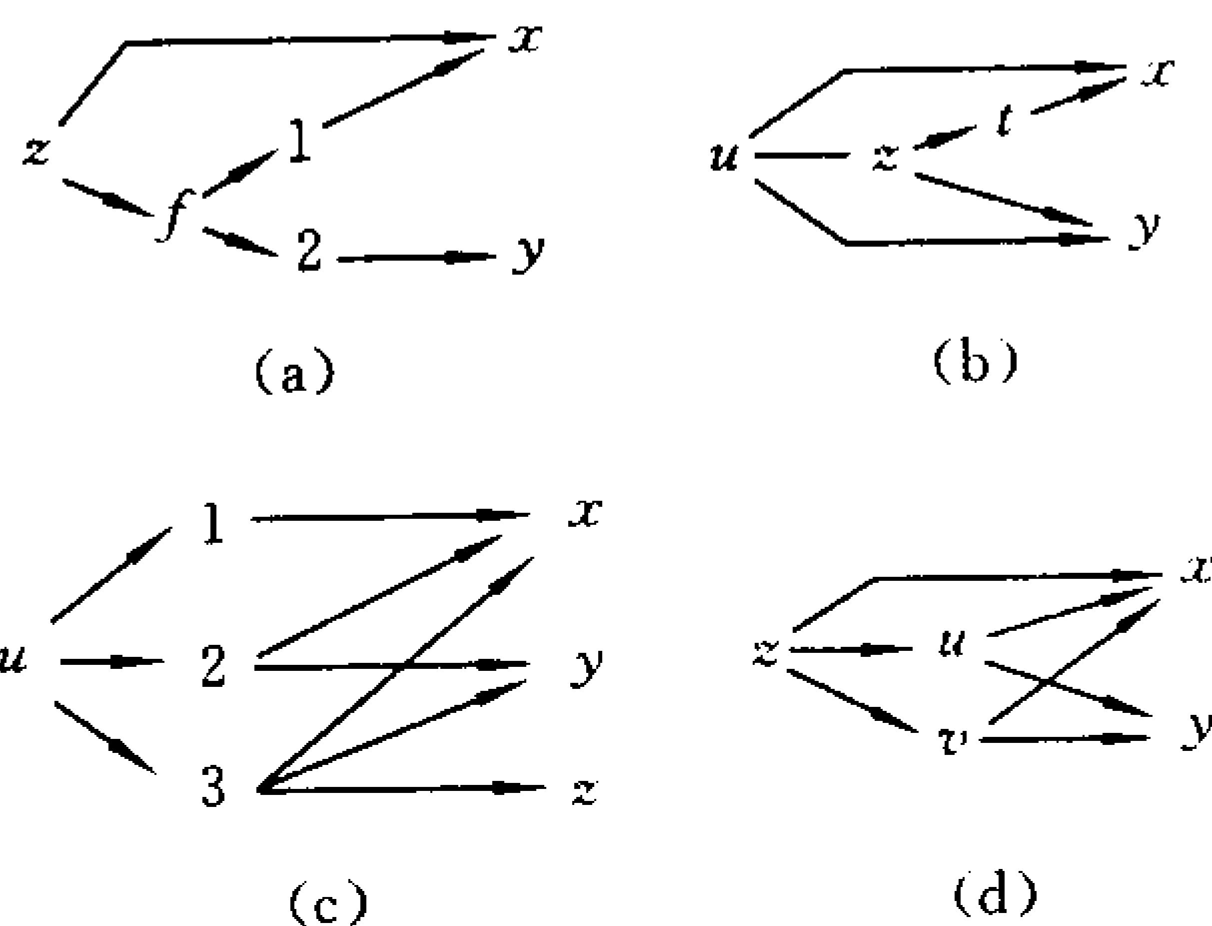


图 10.15

(1) 复合关系如图 10.15(a)所示，故

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3f_1'\cdot x+x^3f_2'\cdot\frac{1}{x}=x^4f_1'+x^2f_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2f+x^3f_1'\cdot y+x^3f_2'\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=3x^2f+x^3yf_1'-xyf_2'.$$

(2) 复合关系如图 10.15(b)所示，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\varphi_t'\cdot\psi_x',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}(\varphi_y'+\varphi_t'\cdot\psi_y').$$

(3) 复合关系如图 10.15(c)所示，故

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'y+f_3'yz,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'x+f_3'xz,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'xy.$$

(4) 复合关系如图 10.15(d)所示，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

例 7 证明：

(1) $z=\arctan\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2x$ 的一个解；

(2) $z=xy+xF(u)$，$u=\dfrac{y}{x}$，$F(u)$可导，满足方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$；

(3) $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，$f(u)$可导，满足方程$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

证 只要求出偏导数代入验证即可.

(1) $$\frac{\partial z}{\partial x}=1\Bigg/\left[1+\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\right)^2\right]\cdot\frac{3x^2(x-y)-(x^3-y^3)}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{2x^3-3x^2y+y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3-3xy^2+2y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},\quad \tan z=\frac{x^3-y^3}{x-y}.$$

代入得 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

又有 $$\sin 2z=\frac{2\tan z}{1+\tan^2 z}=\frac{2(x-y)(x^3-y^3)}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2},$$

从而 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z,$$

即 $z=\arctan\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$是方程 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ 的解.

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x}=y+F(u)+x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F(u)-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\left(\frac{1}{x}\right)=x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}.$$

代入得 $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(y+F(u)-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right)+y\left(x+\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u}\right)$$
$$=xy+xF(u)+xy=z+xy.$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\cdot f_u'\cdot 2x}{f^2(u)}=-\frac{2xyf_u'}{f^2(u)}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-yf_u'(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{2y^2f_u'}{f^2(u)}.$$

代入得 $\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf_u'}{f^2(u)}+\frac{1}{y}\frac{1}{f(u)}+\frac{2yf_u'}{f^2(u)}$

$$=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y/z}=\frac{z}{y^2}.$$

这里,运用了关系式 $f(u)=z/y$.

例 8 设 u 满足方程$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$,作变量代换 $\xi=x,\eta=y-x,\zeta=z-x$,证明:在新变量下,满足方程$\frac{\partial u}{\partial \xi}=0$.

证 因为 $x=\xi,y=\eta+x=\eta+\xi,z=\zeta+x=\zeta+\xi$,所以$\frac{\partial x}{\partial \xi}=1$,$\frac{\partial y}{\partial \xi}=1,\frac{\partial z}{\partial \xi}=1$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot 1$$
$$=0\cdot 1=0.$$

例 9 设 $x=\frac{1}{u}+\frac{1}{v},y=\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2},z=\frac{1}{u^3}+\frac{1}{v^3}+e^x$,求 dz.

解
$$dx=-\frac{1}{u^2}du-\frac{1}{v^2}dv, \quad ①$$
$$dy=-\frac{2}{u^3}du-\frac{2}{v^3}dv, \quad ②$$
$$dz=-\frac{3}{u^4}du-\frac{3}{v^4}dv+e^x dx. \quad ③$$

由式②解得 $du=-\frac{u^3}{2}dy-\frac{u^3}{v^3}dv$,

代入式①得 $dx=\frac{u}{2}dy+\frac{u-v}{v^3}dv$.

再将 du,dx 代入式③,得

$$dz=\left(\frac{3}{2u}+\frac{ue^x}{2}\right)dy+\left(\frac{3}{uv^3}+\frac{u-v}{v^3}e^x-\frac{3}{v^4}\right)dv.$$

例 10 若$\forall\ t>0$，n 为整数，关系式 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 恒成立，则称 f 是 n 次齐次函数. 证明：n 次齐次函数一定满足关系式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y).$$

证 令 $u=tx,v=ty$，则$\frac{\partial u}{\partial t}=x,\frac{\partial v}{\partial t}=y$. 对 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 两边关于 t 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}=nt^{n-1}f(x,y),$$

即
$$x\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}=nt^{n-1}f(x,y).$$

两边乘以 t，得

$$tx\frac{\partial f}{\partial u}+ty\frac{\partial f}{\partial v}=nt^n f(x,y),$$

即
$$u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}=nf(tx,ty)=nf(u,v),$$

更换字母，得 $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf(x,y)$.

此公式可以推广到 m $(m\geqslant 2)$元函数情形.

二、方向导数与梯度

求方向导数的关键是正确求出偏导数与 $\boldsymbol{l}$ 的方向向量，要正确使用公式 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{\Delta x}{\rho},\frac{\Delta y}{\rho},\frac{\Delta z}{\rho}\right)$，要明确$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$中的 $\boldsymbol{l}$ 不是变量，$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$只是导数形式（为简便起见，可将$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$写成$\frac{\partial f}{\partial l}$）.

例 11 求下列函数的方向导数：

(1) $f(x,y)=x^2-y^2$ 在点(1,1)沿与 x 轴正向成 60°角方向的方向导数；

(2) $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$ 在点(1,2,1)沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$ 的方向导数；

(3) $f(x,y,z)=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点 $A(1,0,1)$沿 A 指向点 $B(3,-2,2)$的方向导数.

解 (1) 因为 $\alpha=60°$,所以 $\boldsymbol{l}_0=\left(1/2,\sqrt{3}/2\right)$.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2x\mid_{(1,1)}=2,\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=-2y\mid_{(1,1)}=-2.$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-2)=1-\sqrt{3}.$$

(2) $\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$, $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}=y^2\mid_{(2)}=4$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,1)}=(2xy+z^3)\mid_{(1,2,1)}=5,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,1)}=3yz^2\mid_{(1,2,1)}=6,$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=4\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}+5\cdot\frac{2}{\sqrt{30}}+6\cdot\frac{5}{\sqrt{30}}=\frac{44}{\sqrt{30}}.$$

(3) $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,0,1)}=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

故
$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot 0+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

例 12 设 $f(x,y)$ 在点 P_0 可微,$\boldsymbol{l}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$\boldsymbol{l}_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=1$,$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=0$,确定 $\boldsymbol{l}$,使得

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

解 设 $\boldsymbol{l}_0=(\cos\theta,\sin\theta)$,则由题设得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1,\\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0,\end{cases}$$

解方程组,得 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

于是 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f(P_0)}{\partial y}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)=\frac{7}{5\sqrt{2}},$$

即 $$\cos\theta+\sin\theta=\frac{7}{5}\Rightarrow\cos\theta\sin\theta=\frac{12}{25}.$$

构造方程 $$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{12}{25}=0\Rightarrow x_1=\frac{3}{5},x_2=\frac{4}{5}.$$

即得 $$\cos\theta=\frac{3}{5}\text{或}\frac{4}{5},\quad \sin\theta=\frac{4}{5}\text{或}\frac{3}{5}.$$

故所求方向 $$\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\quad\text{或}\quad\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right).$$

例 13 设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(2,0)$ 处沿 $\boldsymbol{l}_1=(2,-1)$ 方向的方向导数是 1,沿 $\boldsymbol{l}_2=(-2,0)$ 方向的方向导数是 -3,求 f 沿 $\boldsymbol{l}=(3,2)$ 方向的方向导数.

解 因为 $\boldsymbol{l}_{1_0}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\boldsymbol{l}_{2_0}=(-1,0)$, $\boldsymbol{l}_0=\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}},\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$,所以,由题设按公式有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_1}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=1,\\ \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial l_2}=\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x}(-1)+\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y}(0)=-3,\end{cases}$$

解方程组,得 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}=3,\quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial y}=3-\sqrt{2}.$$

于是 $$\frac{\partial f(P_0)}{\partial l}=3\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+(3-\sqrt{2})\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{15-2\sqrt{2}}{\sqrt{13}}.$$

例 14 (1) 求函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 在点 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点内法线方向上的方向导数；

(2) 求函数 $u=xyz$ 在点 $M(3,4,5)$ 沿锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的法线方向的方向导数.

解 (1) 求内法线的方向余弦,需先求曲线切线的斜率和内法线的斜率. 因为椭圆的切线方程为 $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=0$,所以,过点 P 的切线方程为 $\frac{x}{\sqrt{2}a}+\frac{y}{\sqrt{2}b}=0$,于是 $\tan\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow$ 内法线斜率 $\tan\theta=\frac{a}{b}$. 故

$$\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

而 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_P=-\left.\frac{2x}{a^2}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{a}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_P=-\left.\frac{2y}{b^2}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{b}$.

得
$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_P=-\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 求出锥面的法向量 $\boldsymbol{n}=\pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$ 在点 M 有 $\boldsymbol{n}=\pm\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right)$,故在点 M 有

$$\boldsymbol{n}_0=\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{10},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

而 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz\mid_M=20$, $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz\mid_M=15$, $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy\mid_M=12$.

于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\pm\left[20\cdot\frac{3\sqrt{2}}{10}+15\cdot\frac{2\sqrt{2}}{5}+12\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

$= \pm 6\sqrt{2}$.

例 15 在 xoy 平面上存在温度场 $T=4x^2+9y^2$.

(1) 求在点 $P(9,4)$沿方向角为 210°的方向 $\boldsymbol{l}$ 的温度变化率；

(2) 在什么方向上，点 P 的温度变化率取得最大值？并求出最大值.

解 (1) 依题意，求温度变化率就是求方向导数$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_P$.

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_P = \left.\left(\frac{\partial T}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial T}{\partial y}\sin\alpha\right)\right|_P$$

$$= (\cos 210° \cdot 8x + \sin 210° \cdot 18y)\ |_P$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 72 + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 72 = -36(1+\sqrt{3}).$$

(2) 梯度方向是变化率最大的方向.

$$\mathbf{grad}T\ |_P = \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_P \boldsymbol{i} + \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_P \boldsymbol{j} = 72\boldsymbol{i} + 72\boldsymbol{j}.$$

此时，$\tan\alpha=1$，方向角 $\alpha=45°$，温度变化率的最大值为

$$|\mathbf{grad}T| = \sqrt{72^2+72^2} = 72\sqrt{2}.$$

例 16 求函数 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在点 $M(x,y,z)$沿 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数，并讨论在哪些点的方向导数等于梯度的大小，考虑：(1) a,b,c 两两不相等；(2) $a=b\neq c$；(3) $a=b=c$.

解 $\mathbf{grad}u=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$, $\quad \boldsymbol{r}_0=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$,

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial r}=\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{r}_0=\frac{2}{r}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right).$$

(1) 当 a,b,c 两两不相等时，等值面为椭球面 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k$ (k 为常数). 梯度方向为等值面的法线方向，由低值面指向高值面. 在点$(0,0,\pm c\sqrt{c})$，$(0,\pm b\sqrt{b},0)$，$(\pm a\sqrt{a},0,0)$等 6

个点的法线方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，有 $\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

（2）当 $a=b\neq c$ 时，等值面为旋转椭球面. 在等值面的两个顶点 $(0,0,\pm c\sqrt{c})$ 及等值面与 $z=0$ 的平面的交线 $x^2+y^2=\lambda a^2, z=0$ 上，梯度方向与 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，$\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

（3）当 $a=b=c$ 时，等值面为球面. 球面上每一点的外法线方向与矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向相同，即球面上处处有 $\frac{\partial u}{\partial r}=|\mathbf{grad}u|$.

例 17 函数 $f(x,y)$ 在点 $P(2,0)$ 沿 $\boldsymbol{l}_1=(2,-2)$ 方向的方向导数是 $2\sqrt{2}$，沿 $\boldsymbol{l}_2=(-2,0)$ 方向的方向导数是 -2. 求 f 在点 P 沿 $\boldsymbol{l}=(3,2)$ 方向的方向导数.

解 $\boldsymbol{l}_{1_0}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\boldsymbol{l}_{2_0}=(-1,0)$，$\boldsymbol{l}_0=\left(\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

由

$$\begin{cases}\frac{\partial f(P)}{\partial l_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b)=2\sqrt{2},\\ \frac{\partial f(P)}{\partial l_2}=-a=-2,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2,\\ b=-2.\end{cases}$$

这里设 $\mathbf{grad}P=(a,b)$，故 $\mathbf{grad}f=(2,-2)$. 从而得

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot 2+\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot(-2)=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

第五节　泰勒公式与极值问题

主要内容

1. 如果函数 $f(x,y)$ 在域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上有一阶偏导数，f'_x, f'_y 是 x,y 的二元函数，若它们的偏导数也存在，则称之为 $f(x,y)$ 的二

阶偏导数.

一般定义函数的 n 阶偏导数的偏导数(若存在)为 $n+1$ 阶偏导数. 一般地, m 元函数的 n 阶偏导数可以有 m^n 个.

2. 如果函数 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续,则等式 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$ 成立.

此结论可以推广到 n 元函数情形.

3. 如果函数 $f(x,y)$ 在域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上可微, $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$, 则称 $\mathrm{d}z$ 的微分为 z 的二阶微分 $\mathrm{d}^2z=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)$.

类似地,有 $\mathrm{d}^kz=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}z)$. 二阶及二阶以上微分统称为高阶微分.

4. 中值定理　设二元函数 f 在凸区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续,在 D 的所有内点都可微,则对 D 内任意两点 $P(a,b),Q(a+h,b+k)\in \mathrm{int}D$,存在某 θ $(0<\theta<1)$,使得

$$\begin{aligned}&f(a+h,b+k)-f(a,b)\\&=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k.\end{aligned}$$

5. 泰勒定理　若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域 $U((x_0,y_0);\delta)$ 有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数,则对 $U((x_0,y_0);\delta)$ 内任一点 (x_0+h,y_0+k) 存在相应的 $\theta\in(0,1)$,使得

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)\\&=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)\\&\quad+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots\\&\quad+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\end{aligned}$$

6. 设函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 有定义,若对于任何点 $P(x,y)\in U(P_0)$,不等式 $f(P)\leqslant f(P_0)$ (或 $f(P)\geqslant$

$f(P_0)$)成立,则称函数 f 在点 P_0 取得极大值(或极小值). 点 P_0 称为 f 的极大值点(或极小值点).

7. 极值必要条件　若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$存在偏导数,且在 P_0 取得极值,则有

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0.$$

若函数 f 在点 P_0 满足以上两个等式,则称 P_0 为 f 的稳定点(或驻点、静止点).

若函数 f 存在二阶连续偏导数,则称矩阵

$$H_f(P_0)=\begin{bmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$$

为函数 f 在 P_0 的黑塞(Hesse)矩阵.

8. 极值充分条件　设 $f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域 $U(P_0)$内存在二阶连续偏导数,且 P_0 是 f 的稳定点,则当 $H_f(P_0)$是正定矩阵时,f 在 P_0 取得极小值;当 $H_f(P_0)$是负定矩阵时,f 在 P_0 取得极大值;当 $H_f(P_0)$是不定矩阵时,f 在 P_0 无极值.

极值必要条件与充分条件均可推广到 n 元函数情形.

疑难解析

1. 写出求 $C^{(2)}$类函数 f 的极值的步骤(若 f 在 I 上有 n 阶连续的导数,则称 f 为 $C^{(n)}$类函数).

答　首先求出 f 的所有稳定点 P_0;然后求出 f 在 P_0 的黑塞矩阵,判定黑塞矩阵的类型;最后确定 $f(P_0)$是极大值、极小值,或不是极值.

若 $z=f(x,y)$,令 $f_{xx}(P_0)=A,f_{xy}(P_0)=B,f_{yy}(P_0)=C$,则 $H_f(P_0)=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$,于是

(1) 若 $A>0,AC-B^2>0$(即 $H_f(P_0)$正定),则 $f(P_0)$为极小值;

(2) 若 $A<0, AC-B^2>0$(即 $H_f(P_0)$ 负定),则 $f(P_0)$ 为极大值;

(3) 若 $AC-B^2<0$(即 $H_f(P_0)$ 不定),则 $f(P_0)$ 不是极值;

(4) 若 $AC-B^2=0$,不能肯定 f 在点 P_0 是否有极值.

方法、技巧与典型例题分析

一、高阶偏导数与全微分

求高阶偏导数与全微分没有什么新的方法,一般用逐阶求导法.应注意微分形式不变性已不复存在,并注意求导时不要增项和丢项,以保证运算的正确.

例 1 求下列函数的高阶导数:

(1) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $z=x\ln(x,y)$,求 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$;

(3) $z=\dfrac{1}{x}f(x,y)+y\varphi(x+y)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(4) $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 此例中的 f,φ 均有二阶连续偏导数.

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x[\cos y+(x+1)\sin y], \dfrac{\partial z}{\partial y}=e^x(-\sin y+x\cos y)$,

故
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}= e^x[\cos y + (x + 1)\sin y] + e^x\sin y$$
$$= e^x[\cos y + (x + 2)\sin y],$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = e^x[- \sin y + (x + 1)\cos y] = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}= e^x(- \cos y - x\sin y) =- e^x(\cos y + x\sin y).$$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{x}{y^2}$,故

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=0,\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

(3) 因为$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(x,y)+y\varphi'(x+y)$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{x^2}f'(xy)x+\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{y}{x}f''(xy)\cdot x$$
$$+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$$
$$=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'e^x\sin y+2xf_2'$，故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f_{11}''e^{2x}\sin y\cos y+2e^x f_{12}''(y\sin y+x\cos y)$$
$$=4xyf_{xy}''+f_1'e^x\cos y.$$

例 2 求变上限函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$ 的关系式

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

解 $$\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-(xy)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-(xy)^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-(xy)^2},$$

故 $$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-(xy)^2}.$$

例 3 求下列函数指定阶的偏导数：

(1) $u=x^3\sin y+y^3\sin x$，求$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$；

(2) $u=\arctan\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$，求$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$；

(3) $f(x,y)=e^x\sin y$，求 $f_{x^m y^m}^{(m+n)}(0,0)$.

解 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2\sin y+y^3\cos x$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x\sin y-y^3\sin x$，

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=6\sin y-y^3\cos x,\quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}=6\cos y-3y^2\cos x,$$

$$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6\sin y - 6y\cos x, \quad \frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6(\cos y + \cos x).$$

(2) $u = \arctan x + \arctan y + \arctan z + \varepsilon\pi \ (\varepsilon = 0, \pm 1)$,

所以
$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

(3) $f_{x^m}^{(m)} = e^x \sin y, f_{x^m y^n}^{(m+n)} = e^x \sin(y + n\pi/2)$,

所以
$$f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0,0) = e^0 \sin(n\pi/2) = \sin(n\pi/2).$$

例 4 求下列函数的高阶全微分：

(1) $u = \ln(x^x y^y z^z)$，求 $d^4 u$； (2) $u = e^{ax+by}$，求 $d^n u$；

(3) $u = x^p y^q z^r$，求 $d^n u$，并由此证明

$$d^n P_n(x,y,z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

解 (1) $u = x\ln x + y\ln y + z\ln z$，故

$$\begin{aligned} d^4 u &= (x\ln x)^{(4)} dx^4 + (y\ln y)^{(4)} dy^4 + (z\ln z)^{(4)} dz^4 \\ &= 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right). \end{aligned}$$

(2) 因为 $d(ax+by) = a dx + b dy, d^2(ax+by) = 0$，故

$$d^n u = d^n(e^{ax+by}) = e^{ax+by}[d(ax+by)]^n = e^{ax+by}(a dx + b dy)^n.$$

$$\begin{aligned} (3)\ d(x^p y^q z^r) &= C_n^{p+q} d^{p+q}(x^p y^q) \cdot d^r(z^r) \\ &= \frac{n!}{r!\ (p+q)!}[C_{p+q}^p d^p(x^p) d^q(y^q) d^r(z^r)] \\ &= \frac{n!}{r!\ (p+q)!} \frac{(p+q)!}{p!\ q!} p!\ q!\ r!\ dx^p dy^q dz^r \\ &= n!\ dx^p dy^q dz^r. \end{aligned}$$

而 $P_n(x,y,z)$ 是 n 次齐次多项式，可表示为形如 $Ax^p y^q z^r$ 的若干个单项式的和，其中 A 是常数.

由 $d^n(x^p y^q z^r) = n!\ dx^p dy^q dz^r$ 立即可得

$$d^n P_n(x,y,z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

例 5 求下列函数指定阶的全微分：

(1) $u = f(\sqrt{x^2+y^2})$，求 $d^2 u$；

(2) $u = f(\xi, \eta), \xi = xy, \eta = x/y$，求 $d^2 u$；

(3) $u=f(x,y,z), x=t, y=t^2, z=t^3$,求 d^2u;

(4) $u=f(\xi,\eta,\zeta), \xi=a_1x+b_1y+c_1z, \eta=a_2x+b_2y+c_2z$, $\zeta=a_3x+b_3y+c_3z$,求 d^nu.

解 (1) $du=f'\frac{xdx+ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$,故

$$d^2u=f''\frac{(xdx+ydy)^2}{x^2+y^2}+f'\frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

(2) $du=f'_1(ydx+xdy)+f'_2\frac{ydx-xdy}{y^2}$,故

$$d^2u=f''_{11}(ydx+xdy)^2+f''_{22}\frac{(ydx-xdy)^2}{y^4}$$
$$+2f''_{12}\frac{y^2dx^2-x^2dy^2}{y^2}+2f'_1dxdy-2f'_2\frac{(ydx-xdy)dy}{y^3}.$$

(3) $du=(f'_1+2tf'_2+3t^2f'_3)dt$,故

$$d^2u=(f''_{11}+4t^2f''_{22}+qt^4f''_{33}+4tf''_{12}+6t^2f''_{13}$$
$$+12t^3f''_{23}+2f'_2+6tf'_3)dt.$$

(4) d^nu

$$=\left[(a_1dx+b_1dy+c_1dz)\right]\frac{\partial}{\partial\xi}+(a_2dx+b_2dy+c_2dz)\frac{\partial}{\partial\eta}$$
$$+(a_3dx+b_3dy+c_3dz)\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big]^n\cdot f(\xi,\eta,\zeta)$$
$$=\left[\left(a_1\frac{\partial}{\partial\xi}+a_2\frac{\partial}{\partial\eta}+a_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dx+\left(b_1\frac{\partial}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial}{\partial\eta}+b_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dy\right.$$
$$\left.+\left(c_1\frac{\partial}{\partial\xi}+c_2\frac{\partial}{\partial\eta}+c_3\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)dz\right]^n\cdot f(\xi,\eta,\zeta).$$

二、泰勒公式

函数的泰勒公式可以用求偏导数的方法直接依公式求出,这是比较麻烦的;也可以利用一元函数泰勒公式或幂级数的展开式来求,这比较方便和简捷.更重要的是要学会如何利用泰勒公式解决实际问题.

例 6 在点 $A(1,1,1)$ 的邻域内依泰勒公式将下列函数展开至二次项:

$$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

解 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3yz,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3xz,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}=3z^2-3xy;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6z;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3z,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-3x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-3y.$

求出在点(1,1,1)的值，得

$$f(1,1,1)=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=6,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=-3,$$

故 $f(x,y,z)=3[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-(x-1)(y-1)$
$\qquad -(x-1)(z-1)-(y-1)(z-1)]+o(\rho^2).$

事实上，高于三阶的偏导函数都等于零，故本例中，$o(\rho^2)=0$.

例 7 求下列函数在指定点的二阶泰勒公式：

(1) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$，在点 $P(1,-2)$；

(2) $f(x,y)=\sin x\sin y$，在点 $P(\pi/4,\pi/4)$.

解 (1) $f_x(P)=(4x-y-6)|_P=0,$

$$f_y(P)=(-x-2y-3)\ |_P=0,$$

$$f_{xx}(P)=4,\quad f_{xy}(P)=-1,\quad f_{yy}(P)=-2,$$

而所有三阶偏导数都为零. 所以，所求二阶泰勒公式为

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2.$$

(2) 因为 $f(P)=\dfrac{1}{2},\quad f_x(P)=\cos x\sin y\ |_P=\dfrac{1}{2},$

$f_y(P)=\sin x\cos y\ |_P=\dfrac{1}{2},\quad f_{xx}(P)=-\sin x\sin y\ |_P=-\dfrac{1}{2},$

$f_{xy}(P)=\cos x\cos y\ |_P=\dfrac{1}{2},\quad f_{yy}(P)=-\sin x\sin y\ |_P=-\dfrac{1}{2},$

所以，所求二阶泰勒公式为

$$f(x,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(y-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2+o(\rho^2),$$

其中 $$\rho=\sqrt{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\pi}{4}\right)^2}.$$

例 8 依据麦克劳林公式将下列函数展开至四次项：

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

解 因为$(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$，所以

$$f(x,y)=[1+(-x^2-y^2)]^{1/2}\approx 1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2.$$

例 9 若$|x|\ll 1$，$|y|\ll 1$，求下列函数的近似公式：

(1) $\frac{\cos x}{\cos y}$； (2) $\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}$； (3) $(1+x)^m(1+y)^n$.

解 利用一元函数的麦克劳林公式求解.

(1) $$\frac{\cos x}{\cos y}=\cos x(1-\sin^2 y)^{-1/2}$$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y+\cdots\right)$$

$$\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 y\right)\approx\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(1-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$\approx 1-\frac{1}{2}(x^2-y^2).$$

(2) $$\arctan\frac{1+x+y}{1-x+y}=\arctan\frac{1+x/(1+y)}{1-x/(1+y)}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{x}{1+y}=\frac{\pi}{4}+\left(\frac{x}{1+y}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3+\cdots$$

$$\approx\frac{\pi}{4}+x(1-y+y^2)\approx\frac{\pi}{4}+x-xy.$$

(3) $$(1+x)^m(1+y)^n=(1+mx+\cdots)(1+ny+\cdots)$$

$$\approx 1+mx+ny.$$

例 10 求下列函数的麦克劳林级数：

(1) $f(x,y)=(1+x)^m(1+y)^n$； (2) $f(x,y)=e^x\cos y$；

(3) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$； (4) $f(x,y)=\int_0^1(1+x)^{t^2y}dt$.

解 利用一元函数的麦克劳林级数求解.

(1) $(1+x)^m(1+y)^n$

$$=\left[1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\right]\left[1+ny+\frac{n(n-1)}{2!}y^2+\cdots\right]$$

$$=1+(mx+ny)+\frac{1}{2!}[m(m-1)x^2+2mnxy+n(n-1)y^2]$$

$$+\cdots,\ |x|<1,|y|<1.$$

(2) $$e^x\cos y=\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^m y^{2n}}{m!(2n)!},$$

$$|x|<+\infty,|y|<+\infty.$$

(3) $\sin(x^2+y^2)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2+y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{2n+1}\frac{x^{2k}y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sin\frac{n+m}{2}\pi\right)\frac{x^{2n}y^{2m}}{m!n!},\ x^2+y^2<+\infty.$$

(4) $(1+x)^{t^2y}=e^{t^2y\ln(1+x)}$

$$\approx 1+t^2y\ln(1+x)+[t^2y\ln(1+x)]^2/2!$$

$$\approx 1+t^2y(x-x^2/2)=1+t^2xy-t^2x^2y/2,$$

故 $f(x,y)\approx\int_0^1\left(1+t^2xy-\frac{t^2}{2}x^2y\right)dt=1+\frac{1}{3}y\left(x-\frac{x^2}{2}\right).$

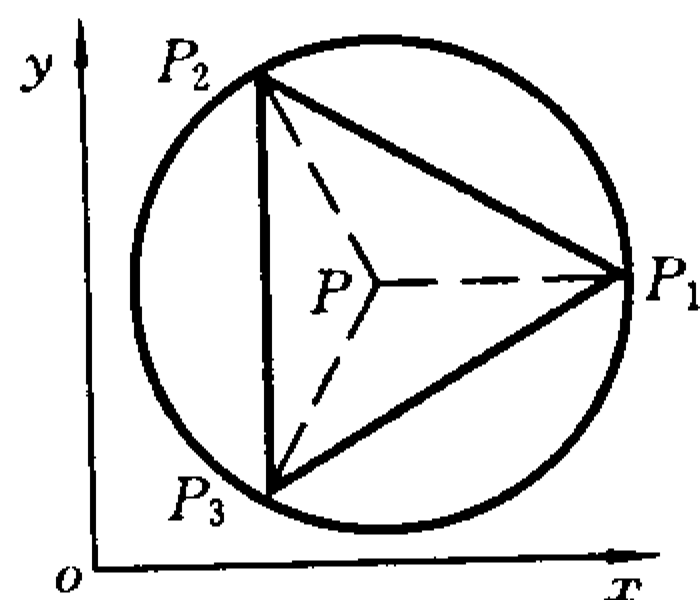


图 10.16

例 11 设圆心为 $P(x,y)$,半径为 ρ, $f(P)=f(x,y)$, $P_i(x_i,y_i)$, $i=1,2,3$ 为圆内接正三角形的三个顶点,且 $x_1=x+\rho$, $y_1=y$. 依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho)=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]$$

展开,准确到 ρ^3.

解 如图 10.16 可知

$$P_1(x+\rho,y),\quad P_2(x-\rho/2,y+\sqrt{3}\rho/2),$$
$$P_3(x-\rho/2,y-\sqrt{3}\rho/2),$$

$$\begin{aligned}F(\rho)&=\frac{1}{3}[f(P_1)+f(P_2)+f(P_3)]\\&\approx\frac{1}{3}\left\{\left[f(P)+\rho\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\rho^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]+\left[f(P)+\left(-\frac{\rho}{2}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right.\right.\\&\quad\left.+\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\\&\quad+\left[f(P)-\frac{\rho}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right.\\&\quad\left.\left.+\frac{3\rho^2}{8}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\sqrt{3}\rho^2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right]\right\}\\&=f(P)+\frac{\rho^2}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).\end{aligned}$$

例 12 求函数 $f(x,y)=x/y$ 在点(1,1)邻域的带皮亚诺余项的泰勒公式.

解 将函数变形后利用一元函数泰勒公式求解.

$$\begin{aligned}\frac{x}{y}&=\frac{1+(x-1)}{1+(y-1)}=[1+(x-1)]\frac{1}{1+(y-1)}\\&=[1+(x-1)]\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^n(y-1)^n+o(y-1)^n)\right]\\&=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)\\&\quad+(y-1)^2+\cdots+(-1)^{n-1}(x-1)(y-1)^{n-1}\\&\quad+(-1)^n(y-1)^n+o(\rho^n),\end{aligned}$$

其中
$$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}.$$

三、无条件极值与最值

无条件极值又称为无约束极值，一般只要求出偏导数，确定稳定点，通过判别黑塞矩阵正定、负定或不定，即可确定函数的极大值、极小值或判定函数有无极值. 最值问题要考虑闭区域和开区域情形. 闭区域情形不仅要求出区域内极值，还要讨论边界上的最

值，通过比较确定闭区域上的最值；开区域情形只要比较区域内极值的大小就行.

例 13 求函数 $f(x,y)=2(y-x^2)^2-x^7/7-y^2$ 的极值，并证明在过点(0,0)的直线上，点(0,0)是直线上函数的极小值点.

解 因为
$$f_x'=-8x(y-x^2)-x^6=0,$$
$$f_y'=4(y-x^2)-2y=0,$$
解得 $x_1=0,y_1=0$ 和 $x_2=-2,y_2=8$.

由 $f_{xx}''=-8y+24x^2-6x^5, f''_{xy}=-8x, f''_{yy}=2$，得
$$H_f(-2,8)=\begin{pmatrix}224 & 16\\ 16 & 2\end{pmatrix}, \Delta_1=224>0, \Delta_2=192>0.$$
所以，点(−2,8)为极小值点，极小值 $f(-2,8)=-352/7$.

对点(0,0)，黑塞矩阵无法判别，与周围点比较知，点(0,0)不是极值点.

在直线 $y=kx$ 上，$f(x,kx)=x^2(k^2-4kx+2x^2-x^5/7)$. 若 $k\neq 0$，则当 x 充分小时，有 $f(x,kx)\geqslant 0$；若 $k=0$，$f(x,0)=x^4(2-x^3/7)$，则当 x 充分小时，也有 $f(x,0)\geqslant 0$. 故得出，在直线 $y=kx$ 上，函数在点(0,0)有极小值.

例 14 求下列函数的极值：

(1) $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$；　　(2) $z=xe^{y+x\sin y}$；

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$,
$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$
令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，求得稳定点为点(0,0)及 $x^2+y^2=1$ 上的点. 因为，在点(0,0)，有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=A=2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=C=2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=B=0,$$
由 $AC-B^2=4>0, A>0$ 知，$z(0,0)=0$ 为极小值.

令 $x^2+y^2=t$，则 $z=te^{-t}$. 由于 $z_t'=e^{-t}(1-t)$，故 $t=x^2+y^2=1$ 为驻点. 又由于 $z_t''=(t-2)e^{-t}$，$z_t''(1)=-e^{-1}<0$，故 $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 在 $x^2+y^2=1$ 取得极大值 e^{-1}.

(2) $\begin{cases} f_x'=e^{y+x\sin y}(1+x\sin y)\xlongequal{令}0, \\ f_y'=e^{y+x\sin y}x(1+x\cos y)\xlongequal{令}0, \end{cases}$ 解得

$x_n=(-1)^{n+1}\sqrt{2}$，　$y_n=n\pi+\pi/4$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

在点 (x_n,y_n)，有

$$A_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2}}e^{y_n+x_n\sin y_n},$$

$$B_n=-e^{y_n+x_n\sin y_n},\quad C_n=(-1)^{n+1}\sqrt{2}e^{y_n+x_n\sin y_n}.$$

而
$$A_nC_n-B_n^2=-2e^{2(y_n+x_n\sin y_n)}<0.$$

故 $f(x,y)$ 无极值.

(3) $\begin{cases} f_x'=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)\xlongequal{令}0, \\ f_y'=e^{2x}(2y+2)\xlongequal{令}0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_0=1/2, \\ y_0=-1. \end{cases}$

在点 $(1/2,-1)$，有

$$A=4e^{2x}(x+y^2+2y+1)|_{(1/2,-1)}=2e>0,$$

$$B=4e^{2x}(y+1)|_{(1/2,-1)}=0,\quad C=2e^{2x}|_{(1/2,-1)}=2e,$$

而
$$AC-B^2=4e^2>0.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(1/2,-1)$ 取得极小值，$f(1/2,-1)=-e/2$.

例 15　求多项式 $P(x)=x^2+ax+b$，使得积分 $\int_{-1}^{1}P^2(x)dx$ 取得最小值.

解　记 $f(a,b)=\int_{-1}^{1}P^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax^2+b)^2dx$，则

$$\frac{\partial f}{\partial a}=2\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)xdx=4\int_0^1 ax^2dx=\frac{4}{3}a,$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}=2\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)dx=4\int_0^1(x^2+b)dx=\frac{4}{3}a+4b.$$

令$\dfrac{\partial f}{\partial a}=0,\dfrac{\partial f}{\partial b}=0$,解得 $a=0,b=-\dfrac{1}{3}$.

又 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2}=\dfrac{4}{3}$, $B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial a\partial b}=0$, $C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2}=4$,而 $AC-B^2=16/3>0$,$A=4/3>0$,故 $f(0,-1/3)$是最小值,$P(x)=x^2-1/3$.

例 16 证明:当任一锐角三角形内一点到三顶点连线成等角时,该点到三顶点距离之和为最小.

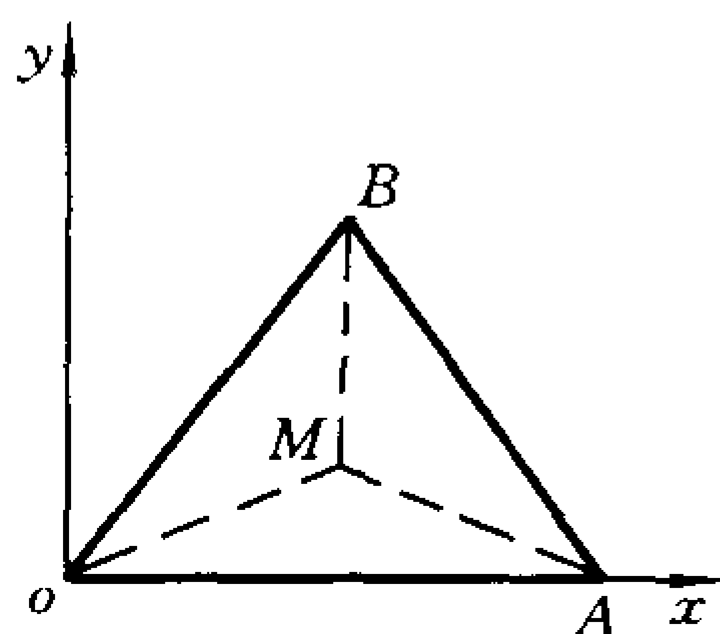


图 10.17

证 如图 10.17 所示,设三角形三顶点为 $o(0,0)$,$A(a,0)$,$B(b,c)$. $M(x,y)$为三角形内任意点,则距离之和可表示为

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-a)^2+y^2}+\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}.$$

设$\overrightarrow{oM},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}$与 x 轴正向夹角分别为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$,则

$$f_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}=\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0,$$

$$f_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{y-c}{\sqrt{(x-b)^2+(y-c)^2}}=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0,$$

故
$$\begin{cases}\cos\theta_1+\cos\theta_2=-\cos\theta_3,\\ \sin\theta_1+\sin\theta_2=\sin\theta_3.\end{cases}$$

将两式平方后相加,得 $\cos(\theta_2-\theta_1)=-1/2$,于是

$$\theta_2-\theta_1=\frac{2\pi}{3}\text{ 或 }\frac{4\pi}{3},\quad \theta_3-\theta_2=\frac{2\pi}{3}\text{ 或}\frac{4\pi}{3}.$$

所以 $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\frac{2\pi}{3}$时，函数 $f(x,y)$取得最小值.

例 17 求函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$上的最大值与最小值.

解 $\begin{cases}f_x'=2x(1+2y)=0,\\ f_y'=2(x^2+y)=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0, & 1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},\\ y=0, & -1/2,-1/2.\end{cases}$

函数在 D 内有三个驻点 $P_1(0,0)$，$P_2\left(1/\sqrt{2},-1/2\right)$，$P_3\left(-1/\sqrt{2},-1/2\right)$，且 $f(P_1)=0,f(P_2)=1/4,f(P_3)=1/4$.

在边界 $x^2+y^2=1$ 上，f 变为一元函数

$$f_1=1+2(1-y^2)y=1+2y-2y^3,\ -1\leqslant y\leqslant 1.$$

由 $f_{1y}'=2-6y^2\overset{令}{=\!=}0$ 解得 $y=\pm 1/\sqrt{3}$. 因此 $f_1(-1)=1,f_1(1)=1,f_1\left(1/\sqrt{3}\right)=1+4\sqrt{3}/9,f_1\left(-1/\sqrt{3}\right)=1-4\sqrt{3}/9$. 从而可知，在 D 的边界上，f 的最大值为 $f_1(1/\sqrt{3})=1+4\sqrt{3}/9$，$f$ 的最小值为 $f_1\left(-1/\sqrt{3}\right)=1-4\sqrt{3}/9$.

再与 D 内的极值比较可知，f 的最小值与最大值分别为

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y)=f(0,0)=0,$$

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y)=f\left(1/\sqrt{3}\right)=1+4\sqrt{3}/9.$$

例 18 设渠道的横截面为等腰梯形，截面积为 A，等腰梯形的底与高各为多少时，渠道的湿周(两腰与底之和)为最小?

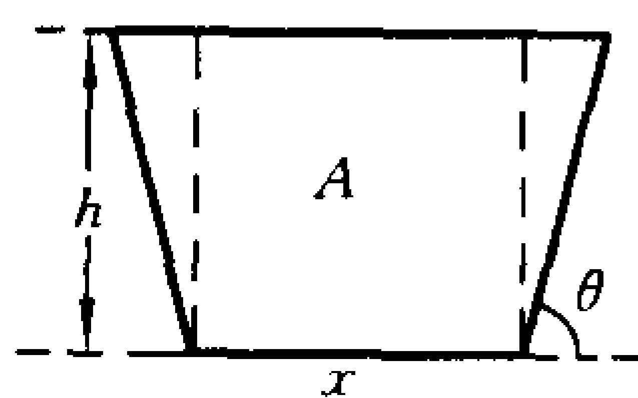


图 10.18

解 如图 10.18 所示，设等腰梯形下底长为 x，高为 h，湿周为 L，腰与底边延长线夹角为 θ $(0<\theta<\pi/2)$，则

$$L=x+2h/\sin\theta,\quad A=(2x+2h\cot\theta)h/2\Rightarrow x=A/h-h\cot\theta,$$

则
$$L(h,\theta)=\frac{A}{h}+\frac{h(2-\cos\theta)}{\sin\theta}.$$

于是
$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial h}=-\dfrac{A}{h^2}+\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\xlongequal{\text{令}}0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial\theta}=\dfrac{h\sin^2\theta-h(2-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\xlongequal{\text{令}}0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h=\sqrt{A/\sqrt{3}},\\ \theta=\pi/3.\end{cases}$$

由此得惟一稳定点$(\sqrt{A/\sqrt{3}},\pi/3)$. 而问题必有最小值,所以$L(h,\theta)$在点$(\sqrt{A/\sqrt{3}},\pi/3)$取得最小值. 从而可知,等腰梯形当底 $x=A/h-h\cot\theta=2\sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$,高 $h=\sqrt{A}/\sqrt[4]{27}$时,渠道的湿周为最小.

例 19 某厂的一种产品同时在两个城市销售,售价分别为 q_1 和 q_2,需求函数分别为

$$q_1=24-0.2p_1,\quad q_2=10-0.05p_2,$$

总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$. 问:厂方如何确定两个市场的售价,才能使其获得的总利润最大? 最大总利润为多少?

解 先建立总收入函数 R 和总利润函数 L.

$$R=p_1q_2+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$

$$L=R-C=32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395,$$

求得
$$\begin{cases}L_{p_1}'=32-0.4p_1\xlongequal{\text{令}}0,\\ L_{p_2}'=12-0.1p_2\xlongequal{\text{令}}0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=80,\\ p_2=120,\end{cases}$$

由此得惟一稳定点(80,120). 而问题必有最大值,所以确定售价分别为 $p_1=80,p_2=120$ 时,获得的总利润最大,最大总利润为 $R=605$.

例 20 证明:若 x,y,z 为实数,且 $e^x+y^2+|z|=3$,则 $e^xy^2|z|\leqslant 1$.

证 设 $f(x,y)=e^xy^2|z|=e^xy^2(3-e^x-y^2)$,$f(x,y)$的定义域以 $e^x+y^2=3$ 为边界. 所以

$$\begin{cases} f_x' = e^x y^2(3-2e^x-y^2) \xlongequal{令} 0, \\ f_y' = 2e^x y^2(3-e^x-2y^2) \xlongequal{令} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=\pm 1, \end{cases}$$

故 $f(x,y)$ 有两个稳定点 $(0,1)$ 与 $(0,-1)$.

又由 $f_{xx}''=e^x y^2(3-4e^x-y^2)$，$f_{xy}''=2e^x y(3-2e^x-2y^2)$，$f_{yy}''=2e^x(3-e^x-6y^2)$，得

$$f_{xx}''(0,\pm 1)=-2, \quad f_{xy}''(0,\pm 1)=\mp 2, \quad f_{yy}''(0,\pm 1)=-8,$$

故 $AC-B^2>0$，而 $A<0$，知 $(0,1)$ 与 $(0,-1)$ 均为极大值点，极大值 $f(0,\pm 1)=1$. 而在边界 $e^x+y^2=3$ 上 $f(0,y)=0$. 从而可知，$f(0,\pm 1)=1$ 为最大值，即 $e^x y^2|z|\leqslant 1$.

例 21 证明：当 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 时，有

$$f(x,y) = yx^y(1-x) < e^{-1}.$$

证 求 $f(x,y)$ 在 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 上的最大值.

在区域边界上，$f(x,y)$ 显然恒等于零，而在区域内，$f(x,y)>0$，故 $f(x,y)$ 的最大值在区域内，最大值即极值.

$$由\begin{cases} f_x' = yx^{y-1}(y-xy-x) \xlongequal{令} 0, \\ f_y' = x^y(1-x)(1+y\ln x) \xlongequal{令} 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x)=x, \\ x^y=e^{-1}, \end{cases}$$

满足上述条件的点为极值点，即最大值点，有

$$f(x,y) = yx^y(1-x) = xe^{-1} < e^{-1}.$$

从而知 $f(x,y)$ 在域 $0<x<1, 0<y<+\infty$ 上的最大值小于 e^{-1}.

例 22 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $U((x_0,y_0),\delta)$ 内二阶偏导数连续，且 $f_x'(x_0,y_0)=0, f_{xx}''(x_0,y_9)>0$. 证明：$\exists\, U(y_0;\delta)$，使得 $\forall\, y\in U(y_0;\delta)$，$\exists\, f(x,y)$ 关于 x 有一个极小值 $g(y)$，且 $g'(y)=f_y'(x_0,y_0)$.

证 由题设条件知，$\exists\, \delta_1>0$，使得在 (x_0,y_0) 的方形 δ_1 邻域内，有 $f_{xx}''(x,y)>0$. 又由题设条件知，$f(x,y_0)$ 在 (x_0,y_0) 取得极小值 $f(x_0,y_0)$，故 $\exists\, \delta_2(\delta_1>\delta_2>0)$，使得在 (x_0,y_0) 的方形 δ_2 邻域内，当 $x<x_0$ 时，$f_x'(x,y_0)<0$；当 $x>x_0$ 时，$f_x'(x,y_0)>0$. 所以 $\exists\, \delta>0, \delta_2>\delta>0$，使得当 $y\in U(y_0,\delta)$ 时，

$$f_x'(x_0+\delta_2,y)>0,\quad f_x'(x_0-\delta_2,y)<0.$$

因为$\forall\ y\in U(y_0,\delta)$，$f(x,y)$关于 x 在$[x_0-\delta_2,x_0+\delta_2]$上连续，且上述不等式成立，从而由连续函数的介值定理知，$\exists\ \xi\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$，使得 $f_x'(\xi,y)=0$.

因为$(\xi,y)\in U((x_0,y_0);\delta_2)$，所以 $f_{xx}''(\xi,y)>0$. 故 $f(x,y)$关于 x 有极小值 $f(\xi,y)=g(y)$.

而 $f(x,y_0)$关于 x 的极小值是 $f(x_0,y_0)=g(y_0)$.

设 $g(y_0+\Delta x)=f(x'',y_0+\Delta y)$ $(|\Delta y|<\delta)$，由题设条件知，$f(x,y)$在点(x_0,y_0)可微，故

$$\begin{aligned}&f(x'',y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=f_x'(x_0,y_0)(x''-x_0)+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\\&=f_y'(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\ (\rho=\sqrt{(x''-x)^2+\Delta y^2}\longrightarrow 0).\end{aligned}$$

从而
$$\begin{aligned}g'(y_0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}\\&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x'',y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\\&=f_y'(x_0,y_0)+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta y}=f_y'(x_0,y_0).\end{aligned}$$

例 23 设 $z=f(x,y)$在有界闭域 D 上有二阶连续偏导数，且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0$，证明：$z$ 的最值只能在 D 的边界上取得.

证 由题设知，$f(x,y)$在 D 上连续，故 $z=f(x,y)$在 D 上必取得最值.

用反证法. 设 $z=f(x,y)$在 D 内点(x_0,y_0)取得最值，由题设条件知，$f(x,y)$在 D 内可微，故(x_0,y_0)必为极值点. 由$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\neq 0\Rightarrow\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\leqslant 0$，于是 $AC-B^2=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0$. 此式在点$(x_0,y_0)$也应成立，从而在点$(x_0,y_0)$无极值，引出矛盾. 这样，$z=f(x,y)$在 D 内无极值点，所以最值只能在 D 的边界取得.

第十一章　隐函数定理及其应用

第一节　隐函数与隐函数组

主要内容

1. 设 $X\subset\mathbf{R}$，$Y\subset\mathbf{R}$，函数 $F:X\times Y\to\mathbf{R}$ 对于方程 $F(x,y)=0$，若 $\exists\ I\subset X$ 与 $J\subset Y$，使得 $\forall\ x\in I$，恒有惟一确定的 $y\in J$，满足 $F(x,y)=0$，则称方程确定了一个定义在 I 上、值域含于 J 的隐函数 $y=f(x)$. 恒等式 $F(x,f(x))\equiv 0$，$x\in I$ 成立.

2. 惟一性定理　若函数 F 满足下列三个条件：

- 在以 $P_0(x_0,y_0)$ 为内点的某一区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，
- $F(x_0,y_0)=0$（通常称为初始条件），
- 在 D 内存在连续偏导数 $F_y(x,y)$，且 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$，

则在 $U(P_0)\subset D$ 内，方程 $F(x,y)=0$ 惟一地确定一个定义在某区域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内的函数 $y=f(x)$，使得

- $f(x_0)=y_0$，$x\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 时，$(x,f(x))\in U(P_0)$ 且 $F(x,f(x))\equiv 0$，
- $f(x)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内连续.

3. 可微性定理　设 $F(x,y)$ 满足惟一性定理中的三个条件，且 $F_x(x,y)$ 在 D 内连续，则由 $F(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)$ 内有连续导函数 $f'(x)=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

4. 若函数 F 满足以下三个条件：

• $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)$在以点 $P_0(x_1^0,x_0^2,\cdots,x_n^0,y^0)$为内点的区域 $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$上连续，

• $F(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_m^0,y^0)=0$,

• 偏导数 $F_{x_1},F_{x_2},\cdots F_{x_m},F_y$ 在 D 内存在并连续，且

$$F_y(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0,$$

则在 $U(P_0)\subset$内，方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$ 惟一确定一个定义在 $Q_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$的某邻域 $U(Q_0)\subset\mathbf{R}^n$ 内的 n 元连续函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得

• 当$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in U(Q_0)$时，

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in U(P_0),$$

且
$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,f(x_1,x_2,\cdots,x_n))=0,$$
$$y^0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0);$$

• $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 $U(Q_0)$内有连续偏导数 $f_{x_1},f_{x_2},\cdots,f_{x_m}$，且

$$f_{x_1}=-\frac{F_{x_1}}{F_y},\quad f_{x_2}=-\frac{F_{x_2}}{F_y},\quad \cdots\quad ,f_{x_n}=-\frac{F_{x_n}}{F_y}.$$

5. 设 $F(x,y,u,v)$与 $G(x,y,u,v)$为定义在区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 上的两个四元函数，若$\exists$ 平面区域 D,$\forall$ $(x,y)\in D$,有区间 J 和 K 上惟一一对值 $u\in J,v\in K$，与 x,y 一起满足方程组

$$F(x,y,u,v)=0,\quad G(x,y,u,v)=0,$$

则称方程组确定了两个定义在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上. 值域分别含于 J 和 K 的隐函数组 $u=f(x,y),v=g(x,y)$，恒等式

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,\quad G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0$$

成立. 行列式$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$称为函数 F,G 关于变量 u,v 的雅可比(Jacobi)行列式.

6. 若函数 F,G 满足以下三个条件：

• $F(x,y,u,v)$与 $G(x,y,u,v)$在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$为内

点的区域 $V\subset\mathbf{R}^4$ 内连续，

- $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0, G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,
- 在 V 内，F,G 有一阶连续偏导数，且 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$ 在点 P_0 不等于零，

则在 $U(P_0)\subset V$ 内，方程组惟一确定定义在 $Q_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(Q_0)$ 内的二元隐函数 $u=f(x,y), v=g(x,y)$，使得

- $u_0=f(x_0,y_0), v_0=g(x_0,y_0)$，且当 $(x,y)\in U(Q_0)$ 时，

$$(x,y,f(x,y),g(x,y))\in U(P_0),$$
$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$
$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$

- $f(x,y), g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内连续，
- $f(x,y), g(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内有一阶连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

7. 函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 及其一阶偏导数在某区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上连续，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，且 $u_0=u(x_0,y_0), v_0=v(x_0,y_0)$，$\left.\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}\neq 0$，则在点 $P_0'(u_0,v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内存在惟一一组反函数 $x=x(u,v), y=y(u,v)$，使得 $x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0)$，且当 $(u,v)\in U(P_0')$ 时，有 $(x(u,v),y(u,v))\in U(P_0)$ 及恒等式

$$u\equiv u(x(u,v),y(u,v)),\quad v\equiv v(x(u,v),y(u,v)).$$

反函数组在 $U(P_0')$ 内存在一阶连续偏导数

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

互为反函数组的函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 与 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 的雅可比行列式互为倒数，即

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$$

疑难解析

1. 怎样理解惟一性定理的条件？

答 (1) 条件是充分的但不是必要的. 例如 $y^3-x^3=0$ 在点 $(0,0)$ 不满足 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$（事实上，$F_y(0,0)=0$），但它惟一确定连续函数 $y=x$.

而 $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-x^2+y^2=0$，满足其它条件，仅因 $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ $(F_y(0,0)=0)$，而在 $P((0,0);\delta)$ 内不存在惟一的隐函数.

(2) 第三个条件是为了保证在 $U(P_0)$ 内 F 关于 y 严格单调而设立的，可减弱为"F 在 $U(P_0)$ 关于 y 严格单调".

(3) 若将第三个条件改为 $F_x(x,y)$ 连续，且 $F_x(x_0,y_0)\neq 0$，则结论为：存在惟一的连续函数 $x=g(y)$.

惟一性定理是一个局部性定理，只在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域内，$F(x,y)=0$ 惟一确定函数 $y=f(x)$. 而在大范围内不一定惟一. 例如，$F(x,y)=x^2-y^2=0$. 在 $-\infty<x<+\infty$ 内，若只要求 $y=f(x)$ 连续，有四个解：$y=x$，$y=-x$，$y=|x|$，$y=-|x|$. 若要求 $y=f(x)$ 可微，则有两个解：$y=x$，$y=-x$. 若要求满足 $f(1)=1$ 且连续，有两个解：$y=x$，$y=|x|$. 若要求满足 $f(0)=0$，则仍有四个解.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数及其偏导数

讨论隐函数的存在主要是验证隐函数存在的条件是否满足，

对于有些问题，则可如疑难解析 1 所述去考虑. 隐函数的导数，可在确定存在连续可微隐函数的前提下，应用复合函数求导法求出；隐函数的高阶导数可用同样方法求得.

例 1 设 $x=x(y,z)$, $y=y(z,x)$, $z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，证明：$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$.

证 依可微性定理，$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，所以

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

例 2 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $y=z+x^2z^3$ 所确定，求 $u=\sin z$ 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 令 $F(x,y,z)=z+x^2z^3-1$，则 $\frac{\partial F}{\partial z}=1+3x^2z^2\neq 0$，故依惟一性定理，对 $y=z+x^2z^3$ 两边微分，有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}z+2xz^3\mathrm{d}x+3x^2z^2\mathrm{d}z,$$

故

$$\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}y-2xz^3\mathrm{d}x}{1+3x^2z^2}.$$

又

$$\mathrm{d}u=\cos z\mathrm{d}z=\frac{\cos z\mathrm{d}y-2xz^3\cos z\mathrm{d}x}{1+3x^2z^2},$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{2xz^3\cos z}{1+3x^2z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\cos z}{1+3x^2z^2}.$$

例 3 证明：设 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x+z/y,y+z/x)=0$ 所确定，且 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，则 $z=xy+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

证 依隐函数求导公式，设 $u=x+z/y$, $v=y+z/x$，则 $F_x=F_u-\frac{z}{x^2}F_v$, $F_y=-\frac{z}{y^2}F_u+F_v$, $F_z=\frac{1}{y}F_u+\frac{1}{x}F_v$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_u-(z/x^2)F_v}{F_u/y+F_v/x}=\frac{zF_v-x^2F_u}{xF_u+yF_v}\cdot\frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-(z/y^2)F_u+F_v}{F_u/y+F_v/x}=\frac{zF_u-y^2F_v}{xF_u+yF_v}\cdot\frac{x}{y},$$

于是

$$xy+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+\frac{yzF_v-x^2yF_u}{xF_u+yF_v}+\frac{xzF_u-xy^2F_v}{xF_u+yF_v}$$

$$=xy+\frac{z(xF_u+yF_v)-xy(xF_u+yF_v)}{xF_u+yF_v}$$

$$=xy+z-xy=z.$$

例 4 在上半椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(z>0)$上，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, F_z=\frac{2z}{c^2}>0$，故隐函数存在. 方程两边分别对 x,y 求导，得

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z}.$$

例 5 设 $u=f(x,z)$，而 $z(x,y)$是由方程 $z=x+y\varphi(z)$所确定的函数，求 $\mathrm{d}u$.

解 先对 $u=f(x,z)$求偏导数$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1+f_2\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=f_2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

再令 $F(x,y,z)=x+y\varphi(z)-z$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$，得

$$F_x=1,\quad F_y=\varphi(z),\quad F_z=y\varphi'(z)-1,$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{y\varphi'(z)-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\varphi(z)}{y\varphi'(z)-1},$$

从而

$$\mathrm{d}u=\left(f_1+f_2\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+f_2\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$=\left(f_1-\frac{f_2}{y\varphi'(z)-1}\right)\mathrm{d}x-\frac{f_2\varphi(z)}{y\varphi'(z)-1}\mathrm{d}y.$$

例 6 证明：由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$所确定函数 $z=z(x,y)$满足方程$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

证 先对方程求一阶偏导数，有

$$\begin{cases} \varphi(z) + x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x} + \psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ x\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y} + \psi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1\ (x\varphi' + \psi' \neq 0). \end{cases}$$

再对上式求偏导，得

$$\begin{cases} 2\varphi'\dfrac{\partial z}{\partial x} + (x\varphi'' + \psi'')\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x\varphi' + \psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, & ① \\ \varphi'\dfrac{\partial z}{\partial y} + (x\varphi'' + \psi'')\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y} + (x\varphi' + \psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0, & ② \\ (x\varphi'' + \psi'')\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + (x\varphi' + \psi')\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, & ③ \end{cases}$$

①$\times\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-$②$\times 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+$③$\times\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2$，得

$$(x\varphi' + \psi')\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right] = 0.$$

因为 $x\varphi'+\psi'\neq 0$，故

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

例 7 设方程 $x^2+y^2+z^2=4z$ 确定 z 为 x,y 的函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 对方程两边关于 x 求偏导，得

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 4\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad ④$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{2-z}. \qquad ⑤$$

对式④两边关于 x 求偏导，得

$$2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1 + (\partial z/\partial x)^2}{2-z}. \qquad ⑥$$

将式⑤代入式⑥，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}.$$

又对题给方程关于 y 求偏导，得

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y}, \tag{7}$$

即

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{2-z}. \tag{8}$$

对式⑦两边关于 y 求偏导，得

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z/\partial x\cdot\partial z/\partial y}{2-z}. \tag{9}$$

将式⑤、式⑧代入式⑨，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x/(2-z)\cdot y(2-z)}{2-z}=\frac{xy}{(2-z)^3}.$$

例 8 设函数 $F(u,v)$ 有二阶连续偏导数，证明：方程 $F\left(\frac{x-x_0}{z-z_0},\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足下列方程：

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

证

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(z-z_0)F_u}{(x-x_0)F_u+(y-y_0)F_v}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(z-z_0)F_v}{(x-x_0)F_u+(y-y_0)F_v}, \tag{11}$$

将 $(x-x_0)\times$⑩$+(y-y_0)\times$⑪，得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}=z-z_0. \tag{12}$$

式⑫两边关于 x 或 y 求导，得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y-y_0}{x-x_0}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x-x_0}{y-y_0}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial z}.$$

将上述两式相乘，即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

例 9 设函数 $\varphi(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，证明：方程 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c.$$

证 设 $u=cx-az,v=cy-bz$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} = -\frac{\varphi_u\cdot c-\varphi_v\cdot 0}{\varphi_u(-a)+\varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = -\frac{\varphi_u\cdot 0+\varphi_v\cdot c}{\varphi_u(-a)+\varphi_v(-b)} = \frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v},$$

故

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c(a\varphi_u+b\varphi_v)}{a\varphi_u+b\varphi_v} = c.$$

二、隐函数组及其偏导数

例 10 讨论方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = u^2+v^2-x^2-y=0, \\ G(x,y,u,v) = u+v-x^2+y=0 \end{cases}$$

确定的隐函数组 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 及其在点 $P(2,1,1,2)$ 的偏导数.

解 因为 $F_u'(P)=2,F_v'(P)=4,G_u'(P)=1,G_v'=1$，所以

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

故方程组确定了一个隐函数组 $u=u(x,y),v=v(x,y)$.

对方程组两边分别关于 x,y 求导，得

$$\begin{cases} 2uu_x' + 2vv_x' - 2x \xlongequal{令} 0, \\ 2uu_y' + 2vv_y' - 1 \xlongequal{令} 0, \\ u_x' + v_x' - 2x \xlongequal{令} 0, \\ u_y' + v_y' + 1 \xlongequal{令} 0, \end{cases}$$

解得
$$u_x' = \frac{x(1-2v)}{u-v}, \quad u_y' = \frac{1+2v}{2(u-v)},$$

$$v_x' = \frac{x(2u-1)}{u-v}, \quad v_y' = \frac{-2u-1}{2(u-v)}.$$

例 11 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，且 x,y,z 又满足

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0. \tag{13}$$

(1) 设 z 是由方程⑬确定的隐函数，求 $f_x(1,1,1)$；

(2) 设 y 是由方程⑬确定的隐函数，求 $f_x(1,1,1)$.

解 (1) 因为 $z=z(x,y)$，所以 $f(x,y,z)=f(x,y,z(x,y))$，依复合函数求导法则，有

$$f_x = y^2z^3 + xy^2 \cdot 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2z^2\left(z + 3x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

又对方程⑬两边关于 x 求偏导，得

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xz\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

从而知
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-2x}{2z-3xy} \Rightarrow f_x = y^2z^2\left(z + 3x\frac{3yz-2x}{2z-3xy}\right),$$

于是
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = -1, \quad f_x(1,1,1) = -2.$$

(2) 此时，$f(x,y,z)=f(x,y(x,z),z)$，有

$$f_x = y^2z^3 + xz^3 \cdot 2y\frac{\partial y}{\partial x} = yz^3\left(y + 2x\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

将方程⑬两边关于 x 求偏导，得

$$2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} - 3yz - 3xz\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

从而知 $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{3yz-2x}{2y-3xz}\Rightarrow f_x=yz^3\left(y+2x\frac{3yz-2x}{2y-3xz}\right)$.

于是 $$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1,\quad f_x(1,1,1)=-1.$$

注意 题(1),(2)条件不同,方程⑬关于 x 的偏导数也不同.

例 12 求下列方程组确定的隐函数组的导数:

(1) $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$;

(2) $\begin{cases}x=e^u+u\sin v,\\ y=e^u-u\cos v,\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$.

(1) 方程两边关于 x 求偏导,得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\left(u+x\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial x}=g_1'\left(\frac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'\frac{\partial v}{\partial x}yv.\end{cases}$$

解得 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

(2) 方程两边求微分,得

$$\begin{cases}e^u du+\sin v du+u\cos v dv=dx,\\ e^u du-\cos v du+u\sin v dv=dy,\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}(e^u+\sin v)du+u\cos v dv=dx,\\ (e^u-\cos v)du+u\sin v dv=dy,\end{cases}$$

解得 $$du=\frac{\sin v dx-\cos v dy}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$dv=\frac{(\cos v-e^u)dx+(\sin v+e^u)dy}{u[e^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

从而 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

注意 因为所求不同，所以题(1)只对 x 求偏导，题(2)是求微分. 两者是有区别的.

例 13 设函数 $u=u(x,y)$ 由方程 $u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 定义，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法 1 先分析函数关系，分清哪个是因变量，哪个是中间变量，哪个是自变量.

由 $g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 解得，t，z 为 y 的函数，代入 $u=f(x,y,z,t)$ 得 $u=u(x,y)$，再分别对 x 和 y 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}.$$

再由 $g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 对 y 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = 0, \\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \dfrac{\partial h}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = 0, \end{cases}$$

解得 $\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = -\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.$

将 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$，$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$ 代入即得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y} = \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,t)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}.$$

解法 2 由方程组 $\begin{cases} f(x,y,z,t)-u=0, \\ g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$ 解得 u，z，t 为 x，y 的函数，利用隐函数求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}+0\,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{\partial h}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}+0\,\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.\end{cases}$$

把$\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial t}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}$当做未知数，利用克拉默法则可解出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

例 14 设 $y=f(x,t)$，t 是方程 $F(x,y,t)=0$ 确定的 x,y 的函数，f,F 都有一阶连续偏导数，证明：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

证 方程组$\begin{cases}y=f(x,t),\\F(x,y,t)=0\end{cases}$确定隐函数组

$$\begin{cases}y=y(x),\\t=t(x).\end{cases}$$

方程两边关于 x 求导，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x},\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}.\end{cases}$$

解方程组，在条件

$$D=\begin{vmatrix}1 & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}\neq 0$$

下，得
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t}\\ -\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t}\end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

例 15 验证方程组

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2, \\ xy - \sin u\cos v + z = 0 \end{cases}$$

在 $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (1, 1, 0, \pi/2, 0)$

的邻域满足隐函数组惟一性定理条件，在点$(\pi/2, 0)$的邻域存在惟一一组有连续偏导数的函数组

$$x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v),$$

并求$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$在点 P 的值.

证 设$\begin{cases} F_1(x,y,z,u,v) = x^2 - y\cos(uv) + z^2, \\ F_2(x,y,z,u,v) = x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 - 2, \\ F_3(x,y,z,u,v) = xy - \sin u\cos v + z, \end{cases}$可知：

(1) F_1, F_2, F_3 的所有偏导数在点 P_0 的邻域连续；

(2) $F_1(P_0) = F_2(P_0) = F_3(P_0) = 0$；

(3) $J = \left.\frac{\partial(F_1, F_2, F_3)}{\partial(x, y, z)}\right|_{P_0} = \left|\begin{matrix} 2x & -\cos(uv) & 2z \\ 2x & 2y & 4z \\ y & x & 1 \end{matrix}\right|_{P_0} = 6 \neq 0.$

故由定理知，方程组确定惟一的有连续偏导数的隐函数组

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v).$$

对原方程组中每个方程分别关于 u, v 求偏导数，则(对 u 的)

$$\begin{cases} 2x\frac{\partial x}{\partial u} - \cos(uv)\frac{\partial y}{\partial u} + yv\sin(uv) + 2z\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ 2x\frac{\partial x}{\partial u} + 2y\frac{\partial y}{\partial u} - v\cos uv + 4z\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \\ y\frac{\partial x}{\partial u} + x\frac{\partial y}{\partial u} - \cos u\cos v + \frac{\partial z}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

将$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$当未知数，用克拉默法则求得

$$\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{P_0}=\frac{\left|\begin{matrix}-yv\sin(uv) & -\cos(uv) & 2z\\ v\cos(uv) & 2y & 4z\\ \cos u\cos v & x & 1\end{matrix}\right|_{P_0}}{\left|\begin{matrix}2x & -\cos(uv) & 2z\\ 2x & 2y & 4z\\ y & x & 1\end{matrix}\right|_{P_0}}=0.$$

类似可求得
$$\left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{P_0}=\frac{\pi}{12}.$$

例 16 设 $x=e^v+u^3, y=e^u-v^3$，求反函数的偏导数 $\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 本题可看做对方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=x-e^v-u^3=0,\\ F_2(x,y,u,v)=y-e^u-v^3=0\end{cases}$$

所确定的隐函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 求偏导数. 由于 $J=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}$ 处处不为零，故对方程组两边关于 x 求偏导数，有

$$\begin{cases}1=e^v v_x'+3u^2u_x',\\ 0=e^u u_x'-3v^2v_x',\end{cases}$$

解方程组，得

$$e^u=(e^{u+v}+9u^2v^2)v_x',$$

故
$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{e^u}{e^{u+v}+9u^2v^2}.$$

例 17 设 $x=u\cos\frac{v}{u}, y=u\sin\frac{v}{u}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 方程组 $x=u\cos\frac{v}{u}, y=u\sin\frac{v}{u}$ 确定隐函数组 $u=u(x,y), v=v(x,y)$. 对方程两边关于 x 求导，得

$$\begin{cases}1=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{v}{u}+u\left(-\sin\frac{v}{u}\right)\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/u^2\right],\\ 0=\frac{\partial u}{\partial x}\sin\frac{v}{u}+u\cos\frac{v}{u}\left[\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/u^2\right],\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=1,\\\left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0.\end{cases}$$

因为
$$D=\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & -\sin\dfrac{v}{u}\\\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u} & \cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=1,$$

用克拉默法则解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}1 & -\sin\dfrac{v}{u}\\0 & \cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=\cos\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{D}\begin{vmatrix}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & 1\\\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}.$$

类似地，方程两边关于 y 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}+\cos\frac{v}{u}.$$

例 18 设 $z=f(x,y)$，作变量代换 $x=uv$，$y=(u^2-v^2)/2$，将方程 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1$ 用 z 关于新变量的导数表示.

解 设变换公式的逆变换 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 存在，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

对逆变换组分别关于 x 和 y 求导，得

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}v+\dfrac{\partial v}{\partial x}u,\\0=\dfrac{\partial u}{\partial x}u-\dfrac{\partial v}{\partial x}v,\end{cases}\quad \begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial y}u-\dfrac{\partial v}{\partial y}v,\\0=\dfrac{\partial u}{\partial y}v+\dfrac{\partial v}{\partial y}u,\end{cases}$$

由克拉默法则解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{v}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{u}{u^2+v^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{u^2+v^2},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-v}{u^2+v^2},$$

代入得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(v\frac{\partial z}{\partial u}+u\frac{\partial z}{\partial v}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{u^2+v^2}\left(u\frac{\partial z}{\partial u}-v\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

从而原方程变换为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2.$$

第二节　几何应用与条件极值

主要内容

一、几何应用

1. 平面曲线方程 $F(x,y)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域内满足隐函数定理条件，在 P_0 附近确定隐函数 $y=f(x)$，则曲线在点 P_0 有

切线方程：　$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0,$

法线方程：　$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)-F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$

2. 空间曲线方程 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域满足隐函数组定理的条件，则在点 P_0 附近确定隐函数组 $x=\varphi(z),y=\psi(z)$，于是曲线在点 P_0 有

切线方程：
$$\frac{x-x_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}}=\frac{y-y_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}}=\frac{z-z_0}{\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}},$$

法平面方程： $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)$

$$+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0.$$

3. 曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的邻域满足隐函数定理条件，在 P_0 附近确定隐函数 $z=f(x,y)$，使得当 $z_0=f(x_0,y_0)$ 时，曲面在点 P_0 有

切平面方程： $F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)$

$$+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程： $\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$

二、条件极值

1. 附有约束条件的极值问题称为条件极值问题，其一般形式是：在条件组

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ k=1,2,\cdots,m\ (m<n)$$

的限制下，求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值.

2. 一般条件的拉格朗日函数是

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_m;\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_m),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 称为拉格朗日乘数.

3. 求以上第 1 点所述的条件极值问题.

若 f 和 $\varphi_k(k=1,2,\cdots,m)$ 在域 D 内有一阶连续偏导数，$P_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 是上述问题的极值点，雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

的秩为 m，则存在 m 个常数 $\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)}$，使得$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)};\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为拉格朗日函数的稳定点，即$(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)};\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\cdots,\lambda_m^{(0)})$为下面 $n+m$ 个方程的解：

$$\begin{cases} L_{x_1}=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}=0, \\ \cdots\cdots \\ L_{x_n}=\dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}=0, \\ L_{\lambda_1}=\varphi_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots \\ L_{\lambda_m}=\varphi_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0. \end{cases}$$

疑难解析

1. 拉格朗日乘数法在求条件极值时有什么意义？

答 过去，我们都是用消元(减元)的方式来求解问题的，即把约束条件中的变量解出代入目标函数，减少目标函数中变量的个数，然后用求偏导数的办法来确定函数的稳定点. 但是，从条件组中解出 n 个变量非常麻烦，而且不总能实现. 所以，用消元法解条件极值问题不一定能成功.

拉格朗日乘数法是一种升元法. 在拉格朗日函数中变量增加了 m 个(即 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$). 这是一种求解条件极值的有效方法. 拉格朗日乘数法只给出了取条件极值的必要条件，因此，满足条件的点只是稳定点，不一定是条件极值点或最值点. 导数不存在的点也可能是极值点.

条件极值通常都用来解决最大值和最小值问题，所以在用拉格朗日乘数法求得稳定点后，一般只需通过比较函数值，即可确定是最大值还是最小值. 当稳定点惟一时，可以根据问题的实际意义

来确定它是最大值点还是最小值点.

方法、技巧与典型例题分析

一、隐函数的几何应用问题

当所给曲线和曲面的方程是以隐函数或隐函数组形式出现时,求它们的切线或切平面时就要用隐函数或隐函数组的微分法.因此,要求我们首先审视它是否满足惟一性定理条件,是否存在隐函数或隐函数组;再看是否满足可微分定理,并求出偏导数;最后依公式求出方程.

例 1 已知曲线$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}=1,\\ x-2y+z=0,\end{cases}$求其在点 $P(1,1,1)$ 的切线方程与法平面方程.

解 设$\begin{cases}F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{2}-1,\\ G(x,y,z)=x-2y+z,\end{cases}$求偏导数,得

$$F_x = 2x,\quad F_y = 2y,\quad F_z = z;$$

$$G_x = 1,\quad G_y = -2,\quad G_z = 1.$$

则曲线在点 P 的切线的方向向量

$$s=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)\Bigg|_P$$

$$=\left(\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & \dfrac{1}{2}\\ 1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ 1 & -2\end{vmatrix}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),$$

故 切线方程: $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-3}$,

法平面方程: $5(x-1)+(y-1)-3(z-1)=0$,

即 $$5x+y-3z-3=0.$$

例 2 求笛卡儿叶形线 $2(x^3+y^3)-9xy=0$ 在点$(2,1)$的切线

方程与法线方程.

解 设 $F(x,y)=2(x^3+y^3)-9xy$,则 $F_x=6x^2-9y$,$F_y=6y^2-9x$ 在全平面连续,且 $F_x(2,1)=15$,$F_y(x,1)=-12\neq0$. 故依公式知

切线方程:$15(x-2)-12(y-1)=0$,即 $5x-4y-6=0$,

法线方程:$-12(x-2)-15(y-1)=0$,即 $4x+5y-13=0$.

例 3 求曲线 Γ:$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2y=4,\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点$(1,1,-2)$的切线方程与法平面方程.

解 用推导公式的方法求解. 方程两边对 x 求导,得

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,\\1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0.\end{cases}$$

解方程组,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{z-x}{y-z-1},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1-y+x}{y-z-1},$$

于是
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=-\frac{3}{2},\quad \left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,-2)}=\frac{1}{2}.$$

即切线在点$(1,1,-2)$的切向量 $\boldsymbol{s}=(1,-3/2,1/2)$. 故

切线方程: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{1}$,

法平面方程: $2x-3y+z+3=0$.

例 4 求球面 $x^2+y^2+z^2=6$ 与抛物面 $z=x^2+y^2$ 的交线在点$(1,1,2)$的切线方程.

解 设$\begin{cases}F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=6,\\G(x,y,z)=x^2+y^2-z,\end{cases}$求偏导数,得

$$F_x=2x,\quad F_y=2y,\quad F_z=2z;$$
$$G_x=2x,\quad G_y=2y,\quad G_z=-1.$$

则求得切线在点$(1,1,2)$的方向向量

$$s=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right)=(-10,10,0).$$

故切线在点(1,1,2)的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{0}.$$

例 5 已知曲面 $F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$,求:

(1)此两方程能确定一条过点 $P(x_0,y_0,z_0)$的曲线的条件;

(2)上述曲线在点 P 有切线的条件;

(3)上述切线平行于 z 轴的条件.

解 (1) 当函数 F 和 G 在点 P 邻域内有连续偏导数,且 $(F_x,F_y,F_z)\cdot(G_x,G_y,G_z)\neq 0$ 时,两方程能确定一条过点 P 的曲线. 因此,此时

$$\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\right)$$

的三个分量中至少有一个不为零,隐函数存在.

(2) 在题(1)的条件下,切向量 s 存在,故曲线在点 P 有切线.

(3) 当 $\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\neq 0$ 时,切线向量为$(0,0,a)$,切线平行于 z 轴.

例 6 求曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 过直线 l 的切平面方程.

$$l:\begin{cases}4x+2y+3z=6,\\2x+y=0.\end{cases}$$

解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,曲面在点 P_0 的法向量

$$\boldsymbol{n}=(2x_0,2y_0,2z_0),$$

而过直线 l 的平面束方程为

$$4x+2y+3z-6+\lambda(2x+y)=0,$$

即

$$(4+2\lambda)x+(2+\lambda)y+3z-6=0,$$

依题意,得联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{4+2\lambda}{2x_0}=\dfrac{2+\lambda}{2y_0}=\dfrac{3}{2z_0}=t,\\(4+2\lambda)x_0+(2+\lambda)y_0+3z_0-6=0,\\x_0^2+y_0^2+z_0^2=4.\end{cases}$$

解得 $\quad 2t(x_0^2+y_0^2+z_0^2)=6,\quad t=3/4,\quad \lambda=-2.$

于是，切点为 $P_0(0,0,2)$，切平面方程为 $z=2$.

例 7 在椭球面 $x^2+2y^2+z^2-1$ 上求一点，使得过该点的切平面与平面 $x-y+2z=0$ 平行.

解 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+z^2=1$，则 $F_x=2x,F_y=4y,F_z=2z$，则在点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_0,2y_0,z_0)$.

又已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$，由平行关系，得

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{-1}=\frac{z_0}{2}=\lambda\Rightarrow x_0=\lambda,\ y_0=-\frac{\lambda}{2},\ z_0=2\lambda.$$

于是，由 $\lambda^2+2(-\lambda/2)^2+(2\lambda)^2=1$ 得 $\lambda^2=2/11$，即 $\lambda=\pm\sqrt{2/11}$. 故所求点为 $\left(\pm\sqrt{2/11},\quad \mp\sqrt{2/11}/2,\quad \pm2\sqrt{2/11}\right)$.

例 8 证明：所有与曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 相切的平面都相交于一点.

证 设 $F(x,y,z)=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)-z$，则 $F_x=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$F_y=f'\left(\dfrac{y}{x}\right)$，$F_z=-1$. 所以，在曲面上任一点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)$$
$$-(z-z_0)=0.$$

即
$$\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y-z$$
$$=-x_0f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-y_0f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+z_0$$
$$=-z_0+z_0=0.$$

显然，点(0,0,0)满足上述平面. 所以曲面在任一点的切平面都相交于一点(例如原点).

例 9 证明：曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ $(a>0)$上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于常数 a.

证 设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则

$$F_x=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad F_y=\frac{1}{2\sqrt{y}},\quad F_z=\frac{1}{2\sqrt{z}},$$

故在曲面上任一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(1/\sqrt{x_0},1/\sqrt{y_0},1/\sqrt{z_0}).$$

从而过点 P_0 的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即 $$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

化简，得 $$\frac{x}{\sqrt{ax_0}}+\frac{y}{\sqrt{ay_0}}+\frac{z}{\sqrt{az_0}}=1.$$

所以，截距之和为

$$d=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=a.$$

例 10 设 $F(u,v)$具有一阶连续偏导数，a,b,c 为非零常数. 证明：曲面 $F(ax+bz,by+cz)=0$ 的任一切平面都平行于某定直线 l.

证 只需证切平面的法向量与一常向量正交. 令 $u=ax+bz$，$v=by+cz$，则曲面 F 在任一点 $P(x,y)$的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(aF_u,bF_y,bF_u+cF_v)|_P,$$

显然 $$\boldsymbol{n}\cdot(b/a,c/b,-1)=0.$$

即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s}=(b/a,c/b,-1)$ 正交. 也就是过曲面 F 上任一点的切平面与方向向量为 $\boldsymbol{s}$ 的直线平行.

$$l: \frac{x}{b/a} = \frac{y}{c/b} = \frac{z}{-1}.$$

二、条件极值问题

条件极值的求解问题一般是求函数的最大值与最小值问题，所以，我们通常只需求出稳定点，然后由实际问题来确定它所对应的函数值是否最值，是最大值还是最小值. 为了易于求解，目标函数要取得尽量简单. 例如，目标函数 $f=xyz$ 可取作 $g=\ln x+\ln y+\ln z$，$f=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 可取作 $g=(x-a)^2+(y-b)^2$. 详见例题.

例 11 将正数 a 分解为三个正数，使其的倒数之和为最小.

解 设三个正数为 x,y,z，则问题即为求目标函数

$$f(x,y,z) = 1/x + 1/y + 1/z \ (x,y,z \in (0,a))$$

在约束条件 $x+y+z=a$ 下的最小值.

建立拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda) = 1/x + 1/y + 1/z + \lambda(x + y + z - a),$$

对各变量求偏导数，得

$$\begin{cases} L_x = -1/x^2 + \lambda = 0, \\ L_y = -1/y^2 + \lambda = 0, \\ L_z = -1/z^2 + \lambda = 0, \\ L_\lambda = xyz - a = 0. \end{cases}$$

显然 $x=y=z$，解方程组，得

$$x = y = z = \sqrt[3]{a}, \quad \lambda = a^{-2/3}.$$

因稳定点惟一，而实际问题必有最小值，故点$(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$为最小值点，最小值 $f(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})=3/\sqrt[3]{a}$.

例 12 在过点(2,1,1/3)的所有平面中，求出与三坐标面围成立体体积最小的平面.

解 设所求平面方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，则必有$\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=$

1 为约束条件. 故问题即为函数 $V=abc/6$ 在条件 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}=1$ 下的条件极值. 因为 $V=abc/6$ 与 $f=\ln a+\ln b+\ln c$ 有相同的极值点，故取拉格朗日函数为

$$L(a,b,c;\lambda)=\ln a+\ln b+\ln c+\lambda\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{3c}-1\right).$$

求偏导数，得方程组

$$\begin{cases} L_a=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2\lambda}{a^2}=0, \\ L_b=\dfrac{1}{b}-\dfrac{\lambda}{b^2}=0, \\ L_c=\dfrac{1}{c}-\dfrac{\lambda}{3c^2}=0, \\ L_\lambda=\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{3c}-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2\lambda, \\ b=\lambda, \\ c=\lambda/3. \end{cases}$$

将 a,b,c 代入第四式，得 $\lambda=3$，故 $a=6,b=3,c=1$，所求平面方程为 $\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1$. 最小值 $V(6,3,1)=(6\times3\times1)/6=3$.

例 13 有一座小山，设其底面为 xoy 平面，底部所占区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(1) 设 $P_0(x_0,y_0)$ 为 D 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大，写出最大方向导数 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

(2) 在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy\leqslant75$ 上找出使 $g(x,y)$ 达到最大值的点，作为攀登该山的起点.

解 (1) 因为，沿梯度

$$\mathbf{grad}\,h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大，最大值为梯度的模，故

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$$
$$=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$，约束条件为 $x^2+y^2-xy=75$，建立拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=10x-8y+\lambda(y-2x)=0,\\L_y=10y-8x+\lambda(x-2y)=0,\\L_\lambda=x^2+y^2-xy-75=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=\pm\sqrt{75},\\x=-y=\pm 5.\\\lambda=2.\end{cases}$$

得到四个稳定点 $P_1(5,-5)$，$P_2(-5,5)$，$P_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3})$，$P_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3})$. 求得

$$f(P_1)=f(P_2)=450,\quad f(P_3)=f(P_4)=150,$$

故选择点 $P_1(5,-5)$ 或 $P_2(-5,5)$ 为攀登的起点.

例 14 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三坐标面所围四面体体积为最小，求切点坐标.

解 设切点为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1\Rightarrow\frac{x}{a^2/x_0}+\frac{y}{b^2/y_0}+\frac{z}{c^2/z_0}=1,$$

则目标函数为 $V=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$，约束条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 建立拉格朗日函数

$$L(x,,z;\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

注意 这里化为求最大值问题了. 求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0,\\L_y=xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0,\\L_z=xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0,\\L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

将第一、第二、第三式分别乘以 x,y,z，可解得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{-3xyz}{2\lambda},$$

代入第四式，解得 $xyz=-\frac{2}{3}\lambda$，从而解得 $x=\frac{a}{\sqrt{3}},y=\frac{b}{\sqrt{3}},z=\frac{c}{\sqrt{3}}$. 由于稳定点惟一，实际问题又必有最小值，故所求点为 $P_0\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

例 15 证明不等式 $\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\frac{(x+y)^n}{2}$，其中 $n\geqslant1,x\geqslant0,y\geqslant0$.

证 将不等式证明化为求最值问题.

设目标函数 $f(x,y)=(x^n+y^n)/2$，约束条件为：$x+y=c\ (c>0,x\geqslant0,y\geqslant0)$，则拉格朗日函数为

$$L(x,y;\lambda)=(x^n+y^n)/2+\lambda(x+y-c).$$

求偏导数，得

$$\begin{cases}L_x=nx^{n-1}/2+\lambda=0,\\L_y=ny^{n-1}/2+\lambda=0,\\L_\lambda=x+y-c=0.\end{cases}\Rightarrow x=y=c/2.$$

因为 $f(x,y)$ 在第一象限内有界闭线段 $x+y=c,x\geqslant0,y\geqslant0$ 上连续，故问题必有最大值和最小值. 比较点 $(c/2,c/2)$ 和两端点 $(0,c),(c,0)$ 上函数值，有

$$f(c,0)=f(0,c)=c^n/2\geqslant f(c/2,c/2)=(c/2)^n,$$

所以，函数 $f(x,y)$ 在点 $(c/2,c/2)$ 取得最小值，即

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{c}{2}\right)^n=\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

例 16 求二次型 $f(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值.

解 球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点可表示为

$$x=\cos\theta\sin\varphi,\quad y=\sin\theta\sin\varphi,\quad z=\cos\varphi,$$

其中 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，则 $F(x,y,z)$ 化为 $g(\theta,\varphi)$，且 $g(\theta,\varphi)$ 在 $D=\{(\theta,\varphi)\mid 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}$ 上连续，故 $g(\theta,\varphi)$ 存在最大值与最小值. 建立拉格朗日函数

$$L(x,y,z;\lambda)=F(x,y,z)+\lambda(1-x^2+y^2+z^2).$$

对 L 求偏导数，得方程组

$$\begin{cases} L_x=2(ax+fy+ez)-2\lambda x=0, \\ L_y=2(fx+by+dz)-2\lambda y=0, \\ L_z=2(ex+dy+cz)-2\lambda z=0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (a-\lambda)x+fy+ez=0, \\ fx+(b-\lambda)y+dz=0, \\ ex+dy+(c-\lambda)z=0. \end{cases}$$

线性方程组有非零解的条件是方程的系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & f & e \\ f & b-\lambda & d \\ e & d & c-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad 或 \quad A=\begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$$

有特征值 λ.

将 $x=x_0, y=y_0, z=z_0$ 代入线性方程组，并以 x_0, y_0, z_0 分别乘以方程组第一、第二、第三式后相加，得

$$\begin{aligned} & ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+2dy_0z_0+2ex_0z_0+2fx_0y_0 \\ = & \lambda(x_0^2+y_0^2+z_0^2). \end{aligned}$$

因为 $x_0^2+y_0^2+z_0^2=1$，即得 $\lambda=F(x_0,y_0,z_0)$，函数值恰为 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大(小)值. 即证明二次型 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大(小)值正好是其矩阵的特征值.

反之，设 $\bar{\lambda}$ 为矩阵 A 的一个特征值，设其对应特征向量 $\alpha=(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，则

$$\begin{cases} (a-\bar{\lambda})x+f\bar{y}+e\bar{z}=0, \\ f\bar{x}+(b-\bar{\lambda})\bar{y}+d\bar{z}=0, \\ e\bar{x}+d\bar{y}+(c-\bar{\lambda})\bar{z}=0. \end{cases}$$

以 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ 分别乘以第一、第二、第三式后相加，得

$$f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \bar{\lambda}.$$

证明 A 的任一特征值等于 $f(x,y,z)$ 在单位球面某点处的值.

从而知,二次型 $f(x,y,z)$ 在单位球面上的最大值与最小值确实存在,分别是其矩阵的最大特征值与最小特征值.

例 17 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 间的最小距离.

解 设 (x,y) 是 $y=x^2$ 上任意点,(u,v) 为 $u-v-2=0$ 上任意点,则两点间距离 $d=\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$.

因为 d 与 d^2 有相同的最值点,故拉格朗日函数为

$$\begin{aligned}&L(x,y,u,v;\lambda_1,\lambda_2)\\&=(x-u)^2+(y-v)^2+\lambda_1(y-x^2)+\lambda_2(u-v-2).\end{aligned}$$

对 L 求偏导数,得

$$\begin{cases}L_x = 2(x-u)-2\lambda_1 x = 0,\\ L_y = 2(y-v)-\lambda_1 = 0,\\ L_u = -2(x-u)+\lambda_2 = 0,\\ L_v = -2(y-v)-\lambda_2 = 0,\\ L_{\lambda_1} = y-x^2 = 0,\\ L_{\lambda_2} = u-v-2 = 0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 1/2,\\ y = 1/4,\\ u = 11/8,\\ v = -5/8.\end{cases}$$

由于稳定点惟一,而问题必有最小值.故点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$ 即为最小值点,最小值 $d=\frac{7}{4\sqrt{2}}$.

例 18 求原点到曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=z,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 的最大距离和最小距离.

解 设 $P(x,y,z)$ 为曲线上任意点,则目标函数 $d(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,约束条件为 $x^2+y^2=z$ 和 $x+y+z=1$.建立拉格朗日函数

$$\begin{aligned}&L(x,y,z;\lambda,\mu)\\&=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1).\end{aligned}$$

对 L 求偏导数,得

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x + \mu = 0, \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, \\ L_z = 2z - \lambda + \mu = 0, \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0, \\ L_\mu = x + y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或} (-1 + \sqrt{3})/2, \\ y = (-1 - \sqrt{3})/2 \text{ 或} (-1 + \sqrt{3})/2, \\ z = 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } 2 - \sqrt{3}, \\ \lambda = -3 - 5\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -3 + 5\sqrt{3}/3, \\ \mu = -7 - 11\sqrt{3}/3 \text{ 或 } -7 + 11\sqrt{3}/3. \end{cases}$$

得两个稳定点.而问题必有最大值与最小值,经比较,得最大距离

$$d\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, 2+\sqrt{3}\right) = \sqrt{9 + 5\sqrt{3}},$$

最小距离

$$d\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 2-\sqrt{3}\right) = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}}.$$

第十二章　向量函数微分学

第一节　n 维欧几里德空间与向量函数

主 要 内 容

一、n 维欧几里德空间

1. 一个 n $(n\geqslant 2)$ 个有序实数组 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为一个 n 维实向量(点)，全体 n 维实向量的集合称为 n 维实向量空间，记作

$$\mathbf{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}\,|\,x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}.$$

2. 在实向量空间上定义了加法、数乘和内积运算.

对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，两向量之和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$.

数 α 与向量 $\boldsymbol{x}$ 的数乘为 $\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)$.

向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积定义为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$.

内积有以下性质：

(1) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\geqslant 0$，当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$；　　(2) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$；

(3) $\alpha(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})=(\alpha\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\alpha\boldsymbol{y})$，$\alpha$ 为实数；

(4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$.

3. 向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的长度(范数，模)定义为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

向量的长度有以下性质：

(1) $\|x\| \geqslant 0$，仅当 $x=\mathbf{0}$ 时，$\|x\|=0$；

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，$\alpha$ 为实数；

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$（三角不等式）；

(4) $\|x^{\mathrm{T}}y\| \leqslant \|x\| \|y\|$（柯西-施瓦兹不等式）.

4. $\mathbf{R}^n$ 中任意两点 x 与 y 的距离定义为

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}.$$

有
$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

5. $U(\alpha;\delta)$ 表示点 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的邻域，其中 $\{x \mid \|x-\alpha\|<\delta\} \subset \mathbf{R}^n$ 表示以 α 为中心、δ 为半径的 n 维球形邻域，$\{x=(x_1,x_2\cdots,x_n) \| x_i-\alpha_i|<\delta, i=1,2,\cdots,n\}$ 表示 n 维方形邻域.

6. $\mathbf{R}^n$ 中有类似平面点集中内点、界点、聚点、开集、闭集、凸集、区域、直径等概念.

7. 设点列 $\{P_k\} \subset \mathbf{R}^n$，则 $\{P_k\}$ 为收敛点列的充要条件是：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ K>0$，当 $k>K$ 时，$\forall\ q \in \mathbf{N}$，有 $\rho(P_k, P_{k+\varepsilon})<\varepsilon$.

二、向量函数、极限与连续性

1. 设 $X \subset \mathbf{R}^n$，$Y \subset \mathbf{R}^n$，f 是 $X \times Y$ 的一个子集，对每一个 $x \in X$，都有惟一的 $y \in Y$，使得 $(x,y) \in f$，则称 f 是 X 到 Y 的向量函数，记作 $f: X \to Y$，　$x \mapsto y$.

2. 两个向量函数 f 与 g 的复合函数是

$$g \circ f: x \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \ (X \subset \mathbf{R}^n, f(x) \subset Y \subset \mathbf{R}^m, Z \subset \mathbf{R}^r).$$

3. 设 $D \subset X \subset \mathbf{R}^n$，$\alpha$ 是 D 的聚点，$f: X \to \mathbf{R}^m$. 若 $\exists\ l \in \mathbf{R}^m$，$\forall$ 任意小 $U(l,\varepsilon) \subset \mathbf{R}^m$，总有 $U^\circ(\alpha;\delta) \in \mathbf{R}^n$，使得 $f(U^\circ(\alpha;\delta) \cap D) \subset U(l;\varepsilon)$，则称在集合 D 上，当 $x \to \alpha$ 时，f 以 l 为极限，记作

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \in D}} f(x) = \alpha.$$

4. 设 $D \subset X \subset \mathbf{R}^n$，$\alpha \in D$，$f: X \to \mathbf{R}^m$. 若 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得 $f(U(\alpha;\delta) \cap D) \subset U(f(\alpha),\varepsilon)$，则称 f 在点 α（关于集合 D）连续.

如果 f 在 D 上每一点连续，则称 f 为 D 上的连续函数.

5. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}:X\to Y(X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m)$；$\boldsymbol{h}:Y\to Z\subset\mathbf{R}^r$；$\alpha:X\to\mathbf{R}$；$\boldsymbol{a}\in X,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\in Y$. 若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g},\alpha$ 在点 $\boldsymbol{a}$ 连续，$\boldsymbol{h}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 连续，则向量函数 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g},\alpha\boldsymbol{f}$ 及 $\boldsymbol{h}\circ\boldsymbol{g}$ 均在点 $\boldsymbol{a}$ 连续.

6. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是有界闭集.

7. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)$的直径是可达的，即$\exists\ \boldsymbol{P}',\boldsymbol{P}''\in D$，使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}'')\|=\max_{\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D}\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|.$$

8. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集，$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上一致连续. 即$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta(\varepsilon)>0$，只要 $\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$，且 $\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''\|<\delta$，就有 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}')-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'')\|<\varepsilon$.

9. 若 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是道路连通集，$\boldsymbol{f}$ 是 D 上的连续函数，则 $\boldsymbol{f}(D)\subset\mathbf{R}^m$ 也是道路连通集.

方法、技巧与典型例题分析

本节的问题是辨析概念，如何将一维区域中的概念拓广到 n 维空间. 这需要认真分析，回顾、利用单变量函数中的结论和证明.

例 1 设 $A\subset\mathbf{R}^m,B\subset\mathbf{R}^m$，证明：

(1) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$； (2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

这里 A°是 A 的内点集，B°是 B 的内点集.

证 (1) 因为 $A^\circ\subset A,B^\circ\subset B$，所以 $A^\circ\cap B^\circ\subset A\cap B$，而 $A^\circ\cap B^\circ$为开集，故 $A^\circ\cap B^\circ=(A^\circ\cap B^\circ)^\circ=(A\cap B)^\circ$.

反之，由 $A\cap B\subset A,A\cap B\subset B$，故$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ,(A\cap B)^\circ\subset B^\circ$，得出$(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$.

综上所述，得 $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

(2) 由于 $\overline{E}=((E^C)^\circ)^C$，故

$$\overline{A}\cup\overline{B}=((A^C)^\circ)^C\cup((B^C)^\circ)^C=((A^C)^\circ\cap(B^C)^\circ)^C$$

$$= ((A^{C} \cap B^{C})^{\circ})^{C} = (((A \cup B)^{C})^{\circ})^{C} = \overline{A \cup B}.$$

例 2 设 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，$\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$，$\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{a}$，证明：$\lim\limits_{k\to\infty} \| \boldsymbol{P}_k \| = \| \boldsymbol{a} \|$.

证 由 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{a}$ 知，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ N \in \mathbf{N}$，使得 $\forall\ k > N$，恒有 $\| \boldsymbol{P}_k - \boldsymbol{a} \| < \varepsilon$. 又由三角不等式 $\| \boldsymbol{P}_k - \boldsymbol{a} \| \geqslant \| \boldsymbol{P}_k \| - \| \boldsymbol{a} \|$，所以

$$| \| \boldsymbol{P}_k \| - \| \boldsymbol{a} \| | < \varepsilon, \quad 即 \quad \lim_{k\to\infty} \| \boldsymbol{P}_k \| = \| \boldsymbol{a} \|.$$

例 3 设 F_1, F_2 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭集，且 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. 证明：存在开集 G_1 和 G_2，使得 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$，而 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

证 由题设，对 $\boldsymbol{x} \in F_1$，有 $\rho(\boldsymbol{x}, F_2) > 0$；对 $\boldsymbol{y} \in F_2$，有 $\rho(\boldsymbol{y}, F_1) > 0$. 作邻域 $U(\boldsymbol{x}, \delta_1)$ 与 $U(\boldsymbol{y}, \delta_2)$，其中 $\delta_1 = \dfrac{1}{2}\rho(\boldsymbol{x}, F_2)$，$\delta_2 = \dfrac{1}{2}\rho(\boldsymbol{y}, F_1)$，再令 $G_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} U(\boldsymbol{x}, \delta_1)$，$G_2 = \bigcup\limits_{y \in F_2} U(\boldsymbol{y}, \delta_2)$. 可知，$G_1, G_2$ 是开集，且 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2$.

用反证法. 设 $G_1 \cap G_2 \neq \varnothing$，则有 $\alpha \in G_1 \cap G_2$，使得 $\boldsymbol{x}_0 \in F_1$，$\boldsymbol{y}_0 \in F_2$，且 $\alpha \in U(\boldsymbol{x}_0, \delta_1)$，$\alpha \in U(\boldsymbol{y}_0, \delta_2)$. 不妨设 $\delta_1 \geqslant \delta_2$，则

$$\begin{aligned} \rho(\boldsymbol{x}_0, F_2) &\leqslant \rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}) \leqslant \rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\alpha}) + \rho(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{y}_0) \\ &< \delta_1 + \delta_1 \leqslant 2\delta_1 = 2\rho(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{F}_2). \end{aligned}$$

引出矛盾，故 $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

例 4 设 $E \subset \mathbf{R}^m$ 是闭集，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^m$，证明：

(1) $\exists\ \boldsymbol{y} \in E$，使得 $\rho(\boldsymbol{x}, E) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$；

(2) 若 $\boldsymbol{x} \overline{\in} E$，则 $\rho(\boldsymbol{x}, E) > 0$.

证 (1) 由距离的定义，$\exists\ \boldsymbol{y}_n \in E\ (n = 1, 2, \cdots)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n) = \rho(\boldsymbol{x}, E)$.

又 $|\boldsymbol{y}_n| \leqslant |\boldsymbol{y}_n - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}| = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n) + |\boldsymbol{x}|$，所以数列 $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_n)$ 有界，从而 $|\boldsymbol{y}_n|$ 有界. 于是存在子列 $\{\boldsymbol{y}_{n_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{y}_{n_k} = \boldsymbol{y}$. 由于 E 是闭集，所以 $\boldsymbol{y} \in E$，则由 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_{n_k}) = 0$ 及 $|\rho(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}_{n_k}) - \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant \rho(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_{n_k})$，得 $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_{n_k}) = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) \Rightarrow \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \rho(\boldsymbol{x}, E)$.

(2) 因 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$，由题(1)得 $\rho(\boldsymbol{x},E)=\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})>0$.

例 5 设集列$\{A_n\}$为一非空闭集套，即 $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$，且满足 $\rho(A_n)\triangleq\sup\limits_{x,y\in A_n}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\to 0\ (n\to\infty)$. 证明：交集$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 非空且仅含惟一点 $\boldsymbol{x}$.

证 因为 A_n 非空，故可取 $\boldsymbol{x}_n\in A_n, n=1,2,\cdots$. 则$\{\boldsymbol{x}_n\}$为柯西基本收敛点列. 事实上，因为 $A_n\supset A_{n+1}$，所以 $\boldsymbol{x}_{n+m}\in A_{n+m}\subset A_m$，$m=0,1,\cdots$，于是

$$|\boldsymbol{x}_{n+m}-\boldsymbol{x}_n|\leqslant\sup_{x,y\in A_n}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=\rho(A_n)\to 0\ (n\to\infty).$$

由柯西审敛原理知，存在惟一的 $\boldsymbol{x}$，使得当 $n\to\infty$时，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$. 而 A_n 为闭集，故 $\boldsymbol{x}\in A_n$，即 $\boldsymbol{x}\in\bigcap\limits_{x=1}^{\infty}A_n$，非空.

若另有一 $\boldsymbol{y}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，则 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in A_n$，$n=1,2,\cdots$，且 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\leqslant\rho(A_n)\to 0\ (n\to\infty)$，即 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{x}$ 惟一.

例 6 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 为一点集，$\boldsymbol{f}:A\to\mathbf{R}^m$ 为 n 元向量函数. 证明：$\boldsymbol{f}$ 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

证 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，$\forall\ \boldsymbol{x}_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})\in A$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)$，而$\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$等价于$\lim\limits_{x\to x_0}f_k(\boldsymbol{x})=f_k(\boldsymbol{x}_0)$，即每个 $f_k(x)$在 $x_{0,k}$连续 $(k=1,2,\cdots,m)$. 故 $\boldsymbol{f}$ 在 A 上连续等价于它的每个分量在 A 上连续.

例 7 设 $\boldsymbol{f}$ 是集合 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的 n 元向量函数，证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in A$ 连续$\Leftrightarrow$对 A 中任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，都有

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0).$$

证 设 $\boldsymbol{f}=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，$\forall\ \boldsymbol{x}_0\in A\subseteq\mathbf{R}^n$，则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续$\Leftrightarrow$$\lim\limits_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f_l(\boldsymbol{x})=f_l(\boldsymbol{x}_0)$ $(\boldsymbol{x}_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n}),l=1,2,\cdots,m)$.

由海涅(Heine)定理知，$\forall$ 任何收敛于 $\boldsymbol{x}_0$ 的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$都有

$$\lim_{k\to\infty} f_l(\boldsymbol{x}_k)=f_l(\boldsymbol{x}_0)\ (l=1,2,\cdots,m).$$

故命题得证.

例 8 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\mathbf{R}^m$ 上连续,并满足:

(1)$\boldsymbol{x}\neq\theta$ 时,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})>0$; (2) $\forall\ \boldsymbol{x}$ 和 $c>0$,$\boldsymbol{f}(c\boldsymbol{x})=c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

证明:$\exists\ a>0,b>0$,使得 $a|\boldsymbol{x}|\leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|$.

证 设有有界闭集 $A=\{\boldsymbol{x}\,\big|\,|\boldsymbol{x}|=1\}$. 由于 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 A 上连续,则在 S 上点 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$,$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$有最大值 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)>0$ 和最小值 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)>0$. 记 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=b,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2)=a$. 于是,$\forall\ x\in\mathbf{R}^m\backslash\theta,\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|\in S$,有

$$a\leqslant \boldsymbol{f}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\leqslant b,\quad 即\quad a|\boldsymbol{x}|\leqslant \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|.$$

例 9 设非空子集 $A\subset\mathbf{R}^n$,定义 $\boldsymbol{x}$ 到 A 的距离

$$\boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{x})=\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{x},A),$$

证明:$\boldsymbol{f}_A(\boldsymbol{x})$是 $\mathbf{R}^n$ 上的一致连续函数.

证 $\forall\ \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathbf{R}^n,\forall\ \boldsymbol{y}\in A$,有

$$\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}).$$

故 $$\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\ (\forall\ \boldsymbol{y}\in A),$$

从而 $$\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)+\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}),$$

即 $$\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})-\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2).$$

类似地,有

$$\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1)=\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2),$$

因此 $$\left|\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\right|\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2).$$

所以,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta=\varepsilon$,当 $\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|\rho(\boldsymbol{x}_2,A)-\rho(\boldsymbol{x}_1,A)|&=\left|\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})-\inf_{\boldsymbol{y}\in A}\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})\right|\\&\leqslant\rho(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2)<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $\rho(\boldsymbol{x},A)$在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续.

例 10 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $D\subset\mathbf{R}^n$ 内连续. 证明:$f(x)$在 D 内一致连续$\Leftrightarrow\forall\ \boldsymbol{x}_0\in\partial D,\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$存在. 这里 ∂D 表示 D 的全体边界点组成

的集合.

证　必要性　因为$f(x)$在D上一致连续,则$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,当$x,y\in D,\rho(x,y)<\delta$时,有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

设$x_0\in\partial D$,而D为开区域,故x_0为D的聚点,设$x_n\in D,x_n\to x_0$(当$n\to\infty$)为任一趋向于x_0的序列,则对上述$\delta>0,\exists\ N>0$,当$n,m>N$时,有$\rho(x_n,x_m)<\delta$,从而$|f(x_n-f(x_n)|<\varepsilon$.依柯西收敛原理,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在,由$x_n$的任意性,依海涅定理,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$存在.

充分性　设$\forall\ x_0\in\partial D,\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$存在.定义$f(x_0)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x\in D}}f(x)$.

于是,$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,当$x\in D,\rho(x,y)<\delta$时,有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.又对于$x_1\in\partial D$,若$\rho(x_1,x_0)<\delta$,则对前式取$x\to x_1$的极限,得到$|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$.

故$\forall\ x\in\overline{D}=D\cup\partial D$,当$\rho(x,x_0)<\delta$时,恒有$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$.因为$f$在$D$内连续,则$f$在$\overline{D}$连续.从而$f$在$\overline{D}$上也就是在$D$上一致连续.

例 11　设点集$A\subseteq\mathbf{R}^n,f:A\to\mathbf{R}^n$是$n$元向量值函数,证明下列命题等价:

(1) f在A上连续;

(2) 开集$B\subseteq\mathbf{R}^m$,则B关于f的原像$f^{(-1)}(B)=\{x|x\in A,f(x)=B\}$是$\mathbf{R}^n$中的开集.

证　设f在A上连续,则f是A上的连续函数.又$B\subseteq\mathbf{R}^m$是开集,当$f^{-1}(B)\neq\varnothing$时,$\forall\ x_0\in f^{(-1)}(B)$,因为$B$是开集,所以$\exists\ \varepsilon>0$,使得$U(f(x_0);\varepsilon)\subset B$.同时,由$f$的连续性,$\exists\ \delta>0$,使得$f(U(x_0,\delta))\subset U(f(x)_0;\delta)$.此时,$x\in U(x,\delta);f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)\subset B$,从而$U(x_0,\delta)\subset f^{(-1)}(B)$.即$f^{-1}(B)$中每一点都是内点,故$f^{-1}(B)$是开集.

反之,设f是$\mathbf{R}^n$到$\mathbf{R}^n$的映射,且对$\mathbf{R}^n$中任何开集,$f^{-1}(B)$是开集.$\forall\ x_0\in\mathbf{R}^n,\varepsilon>0$,取$\mathbf{R}^m$中开集$B=U(f(x_0),\varepsilon)$,其原像

$f^{-1}(B)$必为开集. 因为 $x_0 \in f^{(-1)}(B)$,故 x_0 是 $f^{-1}(B)$的内点,从而存在 $\delta>0$,使得 $U(x_0,\delta)\subset f^{-1}(B)$. 这等价于 $f(U(x_0);\delta)\subset B$. 故$f(U(x_0;\delta))\subset U(f(x_0);\varepsilon)$.

第二节　向量函数的微分

主要内容

1. 设 $D\subset \mathbf{R}^n$ 为开集,$x_0\in D$,$f:D\to\mathbf{R}^m$. 如果存在某个线性变换 A(只依赖于 x_0),使得 $x\in U(x_0)\subset D$ 时,有

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$$

或
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)}{\|x-x_0\|}=0,$$

则称向量函数 f 在点 x_0 可微(或可导). 若线性变换 A 相联系的矩阵为 $A(m\times n)$,则称 $A\cdot(x-x_0)=A(x-x_0)$为 f 在点 x_0 的微分,并称 A 为 f 在点 x_0 的导数,记作 $Df(x_0)$或 $f'(x_0)$.

如果 f 在 D 中任何点可微,则称 f 是 D 上的可微函数.

2. 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 在 x_0 连续.

3. 若向量函数 f 在 x_0 可微,则 f 的所有 m 个坐标函数 f_i $(i=1,2,\cdots,m)$在 x_0 关于每个自变量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$的一阶偏导数$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=x_0}$都存在. 由这些偏导数组成的矩阵便是 f 在 x_0 的导数.

4. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开集,$x\in D$,$f:D\to\mathbf{R}^m$,则 f 在 x_0 可微的充要条件是:存在一个(m 行 n 列的)矩阵函数 $F:D\to\mathbf{R}^{mn}$,它在 x_0 连续(相当于它的 n 个列向量函数都在 x_0 连续),并使得

$$f(x)-f(x_0)=F(x)(x-x_0),\ x\in D.$$

以下所设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 均为开集.

5. 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}: D \to \mathbf{R}^m$ 是在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 可微的函数,c 为任意实数,则 $c\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 也可微,且有

$$(c\boldsymbol{f})'(\boldsymbol{x}_0) = c\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0), \quad (\boldsymbol{f} \pm \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) \pm \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}_0).$$

6. 设 $\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 可微;$D' \subset \mathbf{R}^m$ 也是开集,$\boldsymbol{f}(D) \subset D'$;$\boldsymbol{g}: D' \to \mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 可微. 则复合函数 $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h}: D \to \mathbf{R}^r$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微,且 $\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{x}_0) = (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{h})'(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.

7. 微分中值不等式　设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 是凸开集,$\boldsymbol{f}: D \to \mathbf{R}^m$. 若 $\boldsymbol{f}$ 在 D 可微,则对任何两点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in D$,必存在点 $\xi = \boldsymbol{a} + \theta(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$,$0 < \theta < 1$,使得 $\| \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \| \leqslant \| \boldsymbol{f}'(\xi) \| \, \| \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \|$.

8. 对于 n 元实值函数 $f: D \to \mathbf{R}$,$D \subset \mathbf{R}^n$ 为开集,如果 f 在 D 可导,则由 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$确定 f 的导函数 $\boldsymbol{f}': D \to \mathbf{R}^n$ 是一个向量函数. 若 $\boldsymbol{f}'$ 还在 D(或 D 上某点)可微,则称 f 在 D 上二阶可微. 定义$(\boldsymbol{f}')^{\mathrm{T}}$ 的导数为 f 的二阶导数,记作 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})$.

$$\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x})(= D^2 f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

矩阵称为函数 f 的黑塞矩阵.

9. 极值必要条件　设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为开集,实值函数 $f: D \to \mathbf{R}$ 在 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ 可微,且取极值,则

(1) $\boldsymbol{x}_0$ 必为 $\boldsymbol{f}$ 的稳定点,即有 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{0}$.

(2) 若 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域存在二阶偏导数,则当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 为极小值时,黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定或正半定;当 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$ 为极大值时,黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为负定或负半定.

若 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的黑塞矩阵 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 是不定的,则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 无极值.

10. 极值充分条件　实值函数 $f:D\to\mathbf{R}$ 若在 $U(\boldsymbol{x}_0)\subset D$ 存在二阶连续偏导数，且 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$，则当 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正定（或负定）时，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取严格极小值（或极大值）；当 $\boldsymbol{f}''(\boldsymbol{x}_0)$ 为正半定（或负半定）时，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 取极小值（或极大值）.

疑 难 解 析

1. 数量函数的导数与向量函数的导数有何不同？

答　数量函数的导函数是一个数量函数，数量函数在某一点的导数是一个数值. 但是向量函数的导数仍是一个向量函数，向量函数在某一点的导数是一个数量矩阵. 例如

若向量函数 $\boldsymbol{f}:X\to\mathbf{R}^4$ $(X=\{(x_1,x_2)\mid-\infty<x<+\infty,x_2>0\}\subset\mathbf{R}^2)$ 为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2)=(x_1^2x_2^3,\mathrm{e}^{x_1+x_2},x_2,x_1\ln x_2)^{\mathrm{T}}$，则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix}2x_1x_2^3 & 3x_1^2x_2^2\\ \mathrm{e}^{x_1+x_2} & \mathrm{e}^{x_1+x_2}\\ 0 & 1\\ \ln x_2 & x_1/x_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}'(1,1)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

方法、技巧与典型例题分析

向量函数与数量函数的导数与微分虽然在形式上有较大的差异，但其概念本质上是一致的. 所以，我们仍然可以利用数量函数导数与微分的方法与技巧来解向量函数的题目.

例 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij}$ 为常数，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 为常向量，求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$.

解　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\alpha}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x}+\mathbf{0}$.
故依定义，有

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}.$$

例 2　求下列向量函数的雅可比矩阵：

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2+\sin y,2xy)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2,xy,y^2)^{\mathrm{T}}$;

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x\cos y, ye^x, \sin(xz))^{\mathrm{T}}$.

解 求雅可比矩阵,即求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$(或 $\boldsymbol{A}$).

(1) $D\boldsymbol{f}(x,y)$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+\sin y) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+\sin y)\\ \frac{\partial}{\partial x}(2xy) & \frac{\partial}{\partial y}(2xy)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & \cos y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}.$$

(2) $$D\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2)\\ \frac{\partial}{\partial x}(xy) & \frac{\partial}{\partial y}(xy)\\ \frac{\partial}{\partial x}(y^2) & \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ y & x\\ 0 & 2y\end{bmatrix}.$$

(3) $$D\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y) & \frac{\partial}{\partial y}(x\cos y) & \frac{\partial}{\partial z}(x\cos y)\\ \frac{\partial}{\partial x}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial y}(ye^x) & \frac{\partial}{\partial z}(ye^x)\\ \frac{\partial}{\partial x}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xz)) & \frac{\partial}{\partial z}(\sin(xz))\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos y & -x\sin y & 0\\ ye^x & e^x & 0\\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz)\end{bmatrix}.$$

例 3 求下列函数的导数和微分:

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2-y^2,2xy)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(1,1)$,$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,1)$;

(2) $\boldsymbol{f}(x,y)=(x\sin y,(x-y)^2,2y^2)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(x,y)$,$\boldsymbol{f}(0,\pi/2)$;

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x^2+y,ye^{x+z})^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{f}'(1,0,1)$和 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,0,1)$.

解 (1) $\boldsymbol{f}'(x,y)=\begin{bmatrix}2x & -2y\\ 2y & 2x\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{f}'(1,1)=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(1,1)=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\Delta x-\Delta y\\ \Delta x+\Delta y\end{bmatrix}.$$

(2) $f'(x,y)=\begin{bmatrix}\sin y & x\cos y\\ 2(x-y) & -2(x-y)\\ 0 & 4y\end{bmatrix}$,

$$f'\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\pi & \pi\\ 0 & 2\pi\end{bmatrix}.$$

(3) $f'(x,y,z)=\begin{bmatrix}2x & 1 & 0\\ ye^{x+z} & e^{x+z} & ye^{x+z}\end{bmatrix}$,

$$f'(1,0,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & e^2 & 0\end{bmatrix}=A,$$

$$df(1,0,1)=A\begin{bmatrix}\Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\Delta x+\Delta y\\ e^2\Delta y\end{bmatrix}.$$

例 4 $w=f(u)=\begin{bmatrix}u_1^2-u_2u_3\\ u_1u_3-u_2^2\end{bmatrix}$, $u=g(x)=\begin{bmatrix}x_1\cos x_2\\ x_2\sin x_1\\ x_1^2e^{x_2}\end{bmatrix}$,

其中 $x=(x_1,x_2)^T, u=(u_1,u_2,u_3)^T, w=(w_1,w_2)^T$,

求 $D(f\circ g)\Big|_{(1,0)^T}$, $\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}\Big|_{(1,0)^T}$, $\dfrac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big|_{(1,0)^T}$.

解 由复合函数导数公式,得

$$D(f\circ g)(x)=\begin{bmatrix}2u_1 & -u_3 & -u_2\\ u_3 & -2u_2 & u_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x_2 & -x_1\sin x_2\\ x_2\cos x_1 & \sin x_1\\ 2x_1e^{x_2} & x_1^2e^{x_2}\end{bmatrix},$$

而当 $(x_1,x_2)^T=(1,0)^T$ 时,$(u_1,u_2,u_3)^T=(1,0,1)^T$,故

$$D(f\circ g)\Big|_{(1,0)^T}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -\sin 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\Big|_{(1,0)^T}=2,\quad \frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}\Big|_{(1,0)^T}=\begin{vmatrix}2 & -\sin 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+3\sin 1.$$

例 5 求下列向量函数在指定点的导数:

(1) $\boldsymbol{f}(x,y)=(\arctan x,\mathrm{e}^{xy})^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,0)$；

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(x^2y,y^2+z^2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,1,1)$；

(3) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(\sin(x^2-y^2),\ln(x^2+y^2),1/\sqrt{x^2+y^2})^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{f}'(1,1,1)$.

解 先求 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$，再求具体值.

(1) $$D\boldsymbol{f}(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & 0\\ y\mathrm{e}^{xy} & x\mathrm{e}^{xy}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}'(1,0)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}\end{bmatrix}.$$

(2) $$D\boldsymbol{f}(x,y,z)=\begin{bmatrix}2xy & x^2 & 0\\ 0 & \dfrac{-2y}{(y^2+z^2)^2} & \dfrac{-2z}{(y^2+z^2)^2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}'(1,1,1)=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

(3) $D\boldsymbol{f}(x,y,z)$

$$=\begin{bmatrix}2x\cos(x^2-y^2) & -2y\cos(x^2-y^2) & 0\\ \dfrac{2x}{x^2+y^2} & 0 & \dfrac{2z}{x^2+z^2}\\ 0 & -\dfrac{y}{(y^2+z^2)^{3/2}} & -\dfrac{z}{(y^2+z^2)^{3/2}}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}'(1,1,1)=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\end{bmatrix}.$$

例 6 设向量函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数

$$\begin{cases}x=\cos u\sin v,\\ y=\sin u\cos v,\end{cases}$$

向量函数 $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数 $u=s+t,v=s-t$. 求 $D(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})$.

解 $$\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}=\begin{bmatrix}\cos(s+t)\sin(s-t)\\ \sin(s+t)\cos(s-t)\end{bmatrix},$$

$$D(f\circ y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t}\\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t}\\ \dfrac{\partial v}{\partial s} & \dfrac{\partial v}{\partial t}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\sin u\sin v & \cos u\cos v\\ \cos u\cos v & -\sin u\sin v\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos(u+v) & -\cos(u-v)\\ \cos(u+v) & \cos(u-v)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\cos 2s & \cos 2t\\ \cos 2s & \cos 2t\end{bmatrix}.$$

例 7 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为开域，$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$ 为可微函数，证明：

(1) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ 恒为零矩阵，则 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量函数；

(2) 若在 D 上 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{c}$（常数阵），则 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{e},\boldsymbol{x}\in D,\boldsymbol{e}\in\mathbf{R}^m$.

证 当 D 为凸开集，$\boldsymbol{f}$ 在 D 可微时，$\forall\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in D$，$\exists\ \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{a}+\theta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$，$0<\theta<1$，使得

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})\|\ \|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|.$$

(1) 若 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{0}$，则 $\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})\|=0$，由上式得 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|=0$，即 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})$. 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的任意性，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为常向量函数.

(2) 若 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\equiv\boldsymbol{c}$，则 $\|\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi})\|=d$（$d$ 为常数）. 于是

$$\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\|\leqslant d\,\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\|,$$

显然 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的线性函数. 设 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{e}$，则由本节例 1 知

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{cx}+\boldsymbol{e})$$
$$=\boldsymbol{c}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{c}.$$

例 8 设 $f(x_1,x_2)=x_1-x_2$，$\boldsymbol{g}(x)=(\sin x,\cos x)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{s}(x_1,x_2)=(x_1^2,2x_2,x_2+4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{t}(x_1,x_2,x_3)=(x_1x_2x_3,x_1+x_2+x_3)$. 求 (1) $(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'$；(2) $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'$；(3) $(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t})'$；(4) $(\boldsymbol{t}\circ\boldsymbol{s})'$.

解 (1) $(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})=\sin x-\cos x$，$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'=\cos x+\sin x$.

(2) $(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})=(\sin(x_1-x_2),\ \cos(x_1-x_2))^{\mathrm{T}}$，

$$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})'=\begin{bmatrix}\cos(x_1-x_2) & -\cos(x_1-x_2)\\ -\sin(x_1-x_2) & \sin(x_1-x_2)\end{bmatrix}.$$

(3) $(\boldsymbol{s}\circ\boldsymbol{t})=(x_1^2x_2^2x_3^2,\ 2(x_1+x_2+x_3),\ x_1+x_2+x_3+x_4)^{\mathrm{T}}$，

$$(s\circ t)'=\begin{bmatrix}2x_1x_2^2x_3^2 & 2x_1^2x_2x_3^2 & 2x_1^2x_2^2x_3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(4) $(t\circ s)=(2x_1^2x_2(x_2+4),\quad x_1^2+3x_2+4)^{\mathrm{T}}$,

$$(t\circ s)'=\begin{bmatrix}4x_1x_2(x_2+4) & 4x_1^2x_2+8x_1^2\\ 2x_1 & 3\end{bmatrix}.$$

例 9 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 为凸有界闭域，$f(x)$在 D 上有一阶连续偏导数. 证明：$f(x)$在 D 上满足李卜希兹条件. 即$\exists\ L>0,\forall\ x_1,x_0\in D$，有$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|$.

证 由条件知，$\exists\ M>0$，使得

$$|f'_{x_i}(x)|\leqslant M,\quad \forall\ x\in D,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

因为 D 是凸区域，依泰勒公式，$\forall\ x,x_0\in D$，$\exists\ x^*\in\overline{xx_0}\subset D$，使得

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)(x_i-x_{0,i})\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*)\right||x_i-x_{0,i}|\leqslant Mn\rho(x,x_0).$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})$. 令 $L=Mn$，则

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant L|x-x_0|.$$

例 10 设 $f,g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ 是可微函数，用复合函数求导法则证明向量内积的求导公式：

$$D(f(x)\cdot g(x))=f^{\mathrm{T}}(x)Dg(x)+g^{\mathrm{T}}(x)Df(x)$$

证 设 $\quad F:\mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}$，

$$F(u)=F(u_1,\cdots,u_n,u_{n+1},\cdots,u_{2n})=\sum_{i=1}^{n}u_iu_{n+i},$$

$$G:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^{2n},$$

$$u=G(x)=(f_1(x),\cdots f_n(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)),$$

则$(F\circ G)(x)=f(x)\cdot g(x)$. 因为 F 的 $2n$ 个偏导数连续，所以 F 可微. 又 G 的每个分量可微，所以 G 也可微. 从而由复合函数求导

法则与分块矩阵乘法法则，得

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) &= D(F\circ G)(\boldsymbol{x}) = DF(\boldsymbol{u})DG(\boldsymbol{x}) \\
&= (u_{n+1},\cdots,u_{2n},u_1,\cdots,u_n)\begin{pmatrix} D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} \\
&= (u_{n+1},\cdots,u_{2n})D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + (u_1,\cdots,u_n)D\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x)D\boldsymbol{g}(x).
\end{aligned}
$$

例 11 设 $\boldsymbol{f}$ 是定义在区域 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的向量值函数，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 可微，证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的向量导数存在，且

$$D_l\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_l)\ (\boldsymbol{e}_l \text{ 为向量 } \boldsymbol{l} \text{ 的单位向量}).$$

证 因为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微，所以 $\boldsymbol{f}$ 的分量 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 故 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且 $\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial \boldsymbol{l}}=\mathbf{grad}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{e}_l$.

由此知，$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且 $D_l\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{e}_l)$.

例 12 $\boldsymbol{f}$ 是定义在 $D\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的向量值函数，$\boldsymbol{x}_0\in D$，若 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}_j}$ $(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的某邻域存在，且在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 证明：$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

证 因为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的每个分量 $f_i(\boldsymbol{x})$ 都是数量值函数，由于数量值函数 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微的充要条件是 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域内存在偏导数 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ $(j=1,2,\cdots,n)$，且所有偏导数都在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续. 所以由题设知，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 的所有分量 $f_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 都在 $\boldsymbol{x}_0$ 可微. 从而，由向量值函数可微的充要条件知，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 可微.

例 13 设 $D\subset\mathbf{R}^m$ 是凸域，$f(\boldsymbol{x})\in C^2(D,\mathbf{R})$，且满足 $f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{x}_0)+Df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ $(\forall\ \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0\in D)$. 证明：$f(\boldsymbol{x})$ 的黑塞矩阵 $H_f(\boldsymbol{x})$ 是正半定的.

证 $\forall\ \boldsymbol{x}_0\in D$，$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$ 为任一向量，当 t 充分小时，点 $\boldsymbol{x}_0+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\in D$. 由泰勒公式，得

$$f(\boldsymbol{x}_0)+t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

$$= f(x_0) + Df(x_0)t(x - x_0)$$

$$+ \frac{t^2}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(t^2|x - x_0|^2).$$

由题设条件可以得出

$$\frac{t^2}{2}(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) + o(t^2|x - x_0|^2) \geqslant 0,$$

消去 t^2，令 $t \to 0$，得

$$(x - x_0)^T H_f(x_0)(x - x_0) \geqslant 0.$$

即知 $H_f(x_0)$ 是正半定的. 由于 x_0 的任意性，所以 $f(x)$ 的黑塞矩阵在 D 上是正半定的.

例 14 证明：设 $x_0, y_0 \in \mathbf{R}^n$，$S$ 是连接 x_0, y_0 的线段，D 是包含 S 的区域，$f: D \to \mathbf{R}^m$ 连续，在 S（x_0, y_0 可除外）上可微，则存在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n \in S$，使得

$$f(y_0) - f(x_0) = \left[\frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right]_{m \times n}(y_0 - x_0)$$

成立. 该式称为向量值函数的拉格朗日公式.

证　设 $f(x) = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$，$f_i(x) = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数量值函数. 在 $f_i(x)$ 中，固定 $x_2, x_3, \cdots, x_n$，则

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f_i(x_{0,1}, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial f_i(\xi_{i,1})}{\partial x_1}(x_1 - x_{0,1}).$$

事实上，此时 f_i 为一元函数，由一元函数的拉格朗日公式即可得到结果. 同样可以得到 $f_i(x)$ 关于各个变量 x_i 的拉格朗日公式. 令

$$\xi_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,n}),\ (x_{0,1}, x_{0,2}, \cdots, x_{0,n}) = y_0,$$

取 $i = 1, 2, \cdots, m$；$j = 1, 2, \cdots, n$，即得 n 元向量值函数的拉格朗日公式

$$f(y_0) - f(x_0) = \left[\frac{\partial f_i(\xi_i)}{\partial x_j}\right]_{m \times n}(y_0 - x_0).$$

例 15 讨论二次函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^T A x + b^T x + c$ 的极值. 其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 为变量，A 为 $n \times n$ 矩阵，b 为 $n \times 1$ 向量，c 为实数.

解 因为 $f'(x)=x^{T}A+b^{T}\xlongequal{令}0$,故 $f(x)$ 的稳定点为 $x_0=-A^{-1}b$(设 A 可逆).再求得 f 的黑塞矩阵 $f'(x)=A$.所以

当 A 为正定时,$f(x_0)$为极小值.

当 A 为负定时,$f(x_0)$为极大值.

由极值点的惟一性知,$f(x_0)$为 f 的最大值或最小值,有

$$f(x_0)=\frac{1}{2}(A^{-1}b)^{T}A(A^{-1}b)-b^{T}(A^{-1}b)+c$$

$$=\frac{1}{2}b^{T}A^{-1}b-b^{T}A^{-1}b+c=-\frac{1}{2}b^{T}Ab+c.$$

例 16 求下列函数的黑塞矩阵,依例 15 求该函数的极值点.

(1) $f(x)=x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_1+3x_2-x_3$;

(2) $f(x)=-x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3+6x_1x_3$.

解 先写成 $f(x)=\frac{1}{2}x^{T}Ax+bx+c$ 形式,再求出稳定点,然后讨论 A,确定其是否极值点.

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^{T}Ax+bx$,其中

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&0\\-2&4&-1\\0&-1&2\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}7&4&2\\4&4&2\\2&2&4\end{bmatrix},$$

$$x_0=-A^{-1}b=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}7&4&2\\4&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}$$

$$=\left(-\frac{17}{6},-\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)^{T}.$$

因为 $|2|=2>0,\begin{vmatrix}2&-2\\-2&4\end{vmatrix}=4>0,\begin{vmatrix}2&-2&0\\-2&4&-1\\0&-1&2\end{vmatrix}=6>0$,

所以 A 正定,$x_0=(-17/6,-7/3,-2/3)^{T}$ 是极小值点.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}x^{T}Ax+bx$,其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & -6\\ 6 & -6 & 8\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

显然 $$x_0=(0,0,0)^{\mathrm{T}}.$$

因为 $$|-2|=-2<0,\quad \begin{vmatrix}-2 & 4\\ 4 & -4\end{vmatrix}=-8<0,$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 4 & 6\\ 4 & -4 & -6\\ 6 & -6 & 8\end{vmatrix}=-136<0,$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 负定，$\boldsymbol{x}_0$ 是极小值点.

第三节　隐函数定理与反函数定理

主要内容

1. 设 $X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m,\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{n+m},\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 对向量函数方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\in Y$，如果存在向量函数 $\boldsymbol{f}:U\to Y(U\subset X)$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\equiv\mathbf{0},\boldsymbol{x}\in U$，则称函数 $\boldsymbol{f}$ 是由 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 所确定的 U 上的隐函数.

$\boldsymbol{F}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 的偏导数记作 $\boldsymbol{F}_x'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，为 $m\times n$ 矩阵；关于 $\boldsymbol{y}$ 的偏导数记作 $\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，为 $m\times m$ 矩阵.

2. 隐函数定理　设 $X\subset\mathbf{R}^n,Y\subset\mathbf{R}^m$ 都是开集，$\Omega=X\times Y\subset\mathbf{R}^{m+n}$（开集），$\boldsymbol{F}:\Omega\to\mathbf{R}^m$. 如果 $\boldsymbol{F}$ 满足以下条件：

- $\exists\ \boldsymbol{x}_0\in X,\boldsymbol{y}_0\in Y$，使得 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\mathbf{0}$，
- $\boldsymbol{F}$ 在 Ω 上可微，且 $\boldsymbol{F}'$ 连续，
- $\det\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$，

则存在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的 n 维邻域 $U=U(\boldsymbol{x}_0)\subset X$ 和点 $\boldsymbol{y}_0$ 的 m 维邻域 $V=U(\boldsymbol{y}_0)\subset Y$，使得在点 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 的 $n+m$ 维邻域 $W=U\times V\subset\Omega$ 内，由

$F(x,y)=\mathbf{0}$ 惟一确定隐函数 $f:U\to V$,满足

- $y_0=f(x_0)$;
- 当 $x\subset U$ 时,$(x,f(x))\in W$,且有 $F(x,f(x))\equiv\mathbf{0}$;
- f 在 U 内存在连续导数,且

$$f'(x)=-[F_y'(x,y)]^{-1}F_x'(x,y),\ (x,y)\in W.$$

3. 若在开集 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上定义了向量函数 $f:D\to\mathbf{R}^n$,如果 f 是一一对应的映射,则 $f(x)=y$ 能确定一个定义在 $f(D)$上的函数 $f^{-1}:f(D)\to D$,称为函数 f 的反函数. f 与 f^{-1}有以下关系:

$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,\ x\in D;\quad (f\circ f^{-1})(y)=y,\ y\in f(D).$$

4. 反函数定理　设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是开集,函数 $f:D\to\mathbf{R}^n$ 满足以下条件:

- f 在 D 上可微,且 f'连续,
- 存在 $x_0\in D$,使得 $\det f'(x_0)\neq 0$,

则存在邻域 $U=U(x_0)\subset D$,使得

- f 在 U 是一一对应的映射,存在 $f^{-1}:V\to U$,其中 $V=f(U)$;
- f^{-1}在 V 存在连续导数$(f^{-1})'$,且

$$(f^{-1})'(y)=[f'(x)]^{-1},\ x=f^{-1}(y),\ y\in V.$$

推论　若 f 在 D 上处处满足反函数定理条件,则 $f(D)$是一开集.

方法、技巧与典型例题分析

求向量函数的隐函数,首先是验证向量函数是否满足隐函数定理条件,然后利用定理中的公式计算隐函数确定函数的导数.

例 1　设 $\Omega\subset\mathbf{R}^4$,$F,G:\Omega\to\mathbf{R}$. 若向量函数 $H=(F,G)^{\mathrm{T}}$ 在点 $(z_0,w_0)^{\mathrm{T}}\in\Omega$(其中 $z_0=(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$,$w_0=(u_0,v_0)^{\mathrm{T}}$)的邻域内满足隐函数定理条件,且 $\det H_w'(z_0,w_0)\neq 0$,求方程 $H(x,y,u,v)=\mathbf{0}$ 在 z_0 某邻域内确定的隐函数 $w=f(z)$的导数.

解 $f'(z)=-[\boldsymbol{H}_w'(z,w)]^{-1}\boldsymbol{H}_z'(z,w)$.

即

$$f'(z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial G}{\partial v} & -\frac{\partial F}{\partial v}\\ -\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial u}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{J}\begin{bmatrix}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\\ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} & \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $u=u(x,y)$ 由方程组 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t),\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 确定，其中 f,g,h 都是 $C^{(1)}$ 类函数，且 $J=\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$，求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将方程组写成

$$\begin{cases}F(x,y,z,t,u)\equiv f(x,y,z,t)-u=0,\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0,\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial u}\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & \frac{\partial g}{\partial u}\\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & \frac{\partial h}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial t} & 0\\ \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial t} & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}=-J\neq 0,$$

故由隐函数定理、方程组确定 z,t,u 是 x,y 隐函数.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,y)}}{\dfrac{\partial(F,g,h)}{\partial(z,t,u)}}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix} f_3' & f_4' & f_2' \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial g}{\partial t} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} & \dfrac{\partial h}{\partial t} & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{J}\left(-f_3\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial t}+f_4\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}+Jf_2\right).$$

例 3 设由方程组

$$\begin{cases} u+v+w+x+y=a, \\ u^2+v^2+w^2+x^2+y^2=b^2, \\ u^3+v^3+w^3+x^3+y^3=c^3 \end{cases}$$

确定 u,v,w 为 x,y 的隐函数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial x}$.

解 方程组化为

$$\begin{cases} F(u,v,w,x,y)=u+v+w+x+y-a=0, \\ G(u,v,w,x,y)=u^2+v^2+w^2+x^2+y^2-b^2=0, \\ H(u,v,w,x,y)=u^3+v^3+w^3+x^3+y^3-c^3=0, \end{cases}$$

则在

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix}$$

$$=6(v-u)(w-v)(w-u)\neq 0$$

时，依隐函数定理确定(u,v,w)为(x,y)的向量函数. 对方程组关于 x 求偏导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}+1=0, \\ 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}+2w\dfrac{\partial w}{\partial x}+2x=0, \\ 3u^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x}+3w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}+3x^2=0, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{(v-x)(w-x)}{(v-u)(w-u)},\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{(u-x)(w-x)}{(u-v)(w-v)},\\[2ex]\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{(u-x)(v-x)}{(w-u)(w-v)}.\end{cases}$$

例 4 求下列方程组所确定隐函数的导数：

(1) $\begin{cases}yu+xv=1,\\ xu+yv=0,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$；

(2) $\begin{cases}u+v+w=x,\\ uv+vw+wu=y,\\ uvw=z,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 (1) 方程组关于 x 求偏导数，得
$$\begin{cases}y\dfrac{\partial u}{\partial x}+v+x\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2ex] u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{yv-xu}{x^2-y^2}.$$

方程组关于 y 求偏导数，得
$$\begin{cases}u+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+x\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2ex] x\dfrac{\partial u}{\partial y}+v+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{yv-xu}{x^2-y^2}.$$

(2) 方程组每个方程关于 x 求偏导数，得
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}=1,\\[2ex] v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial v}{\partial x}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+w\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\[2ex] vw\dfrac{\partial u}{\partial x}+uw\dfrac{\partial v}{\partial x}+uv\dfrac{\partial w}{\partial x}=0,\end{cases}$$

用克拉默法则解方程组，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & u+w & v+u\\ 0 & uw & uv\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & u+w & v+u\\ vw & uw & uv\end{vmatrix}}=\frac{u^2}{(u-v)(u-w)}.$$

类似可得 $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{(u-v)(w-u)},\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{(u-v)(u-w)}.$

例 5 设在直角坐标系下，函数 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，并满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

作变量代换 $u=x+y, v=x-y$，因变量也换作 $w=xy-z$，试导出 w 关于 u,v 的偏导数所满足的方程.

解 由变量代换得 $x=\dfrac{u+v}{2}, y=\dfrac{u-v}{2}$，故确定 w 也是 u,v 的函数. 对 $z=xy-w$ 关于 x 和 y 求一阶和二阶偏导数，得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y-\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)=y-\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{\partial w}{\partial v},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)=x-\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial v^2},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2},\end{cases}$$

将上述结果代入题给方程即得 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}.$

例 6 设 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x}_0=(3,2,7)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}_0=(0,1)^{\mathrm{T}}$,

$$f_1(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=2\mathrm{e}^{y_1}+x_1y_2-4x_2+3,$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2)=y_2\cos y_1-6y_1+2x_1-x_3.$$

求由向量方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$ 确定隐函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 的导数.

解 对 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$关于 x_1 求偏导数,得

$$\begin{cases}2\mathrm{e}^{y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+y_2+x_1\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}=0,\\[2ex] -y_2\sin y_1\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+\cos y_1\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}-6\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}+2=0,\end{cases}$$

解得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}\\[2ex]\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\frac{\begin{bmatrix}2x_1-y_2\cos y_1\\ -y_2(\sin y_1+6)-4\mathrm{e}^{y_1}\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2\mathrm{e}^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4}\\[2ex]-\dfrac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

类似可得

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}\\[2ex]\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\frac{\begin{bmatrix}4\cos y_1\\ 4(y_2\sin y_1+6)\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2\mathrm{e}^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{5}\\[2ex]\dfrac{6}{5}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_3}\\[2ex]\dfrac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}=\frac{\begin{bmatrix}-x_1\\ 2\mathrm{e}^{y_1}\end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}}{\begin{vmatrix}2\mathrm{e}^{y_1} & x_1\\ -(y_2\sin y_1+6) & \cos y_1\end{vmatrix}}=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{20}\\[2ex]\dfrac{1}{10}\end{bmatrix}.$$

例 7 设 $\boldsymbol{w}=(x,y,z)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}=(r,\theta,\varphi)^{\mathrm{T}}$,求函数

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

的反函数的导数.

解 依反函数定理知反函数存在,由公式

$$(\boldsymbol{f}^{-1})'(\boldsymbol{w})=[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{p})]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix}$$

$$
=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{bmatrix} r^2\sin^2\theta\cos\varphi & r^2\sin\theta\sin\varphi & \frac{r^2}{2}\sin2\theta \\ \frac{r}{2}\sin2\theta\cos\varphi & \frac{r}{2}\sin2\theta\cos\varphi & -r\sin^2\theta \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{r} & \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{r} & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta} & \dfrac{\cos\theta}{r\sin\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad (r^2\sin\theta\neq 0).
$$

例 8 设 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$在点(u,v)的邻域内有连续偏导数，且$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$.

(1) 证明：方程组 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$在点(x,y)某邻域内惟一确定反函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$；

(2) 求 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$关于 x,y 的偏导数；

(3) 证明：$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$.

解 (1) 将方程组写成

$$
\begin{cases} F(x,y,u,v)=x-x(u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=y-y(u,v)=0, \end{cases}
$$

由 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，依反函数存在定理知，存在惟一的反函数组 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$.

(2) 对下列恒等式两边对 x 求偏导数，即

$$
\begin{cases} x=x[u(x,y),v(x,y)], \\ y=y[u(x,y),v(x,y)], \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0=\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}
$$

解得
$$
\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}.
$$

类似可得 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

(3) 利用向量值函数的复合函数求导的矩阵形式，取 $n=2$，有

$$\frac{\partial(w_1,w_2)}{\partial(x_1,x_2)}=\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u_1,u_2)}\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x_1,x_2)}$$

由于 $u_i=g_i(x_1,x_2)$ $(i=1,2)$，从而得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1.$$

第十三章　重　积　分

第一节　二重积分的概念

主 要 内 容

1. 设 f 为定义在矩形域 $D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$上的函数，$J$ 是一个确定的数. 若$\forall\ \varepsilon>0$，总$\exists\ \delta>0$，使得对 D 上任何分割 T，只要 $\|T\|<\delta$，对属于分割 T 的所有积分和，都有

$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j - J\right| < \varepsilon,$$

则称 f 在 D 上可积，数 J 称为 f 在 D 上的二重积分，记作

$$J = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad \int_D f.$$

2. 设 f 为矩边域 D 上的有界函数，$T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$为 D 上一个矩形网分割，记 $M_i=\sup\limits_{\sigma_i}\{f(x,y)\}$，　$m_i=\inf\limits_{\sigma_i}\{f(x,y)\}$，分别称

$$S(T) = \sum_i M_i\Delta\sigma_i \quad 和 \quad s(T) = \sum_i m_i\Delta\sigma_i$$

为 f 关于分割 T 的上和与下和. 具有性质：

(1) $\forall\ T$，总有 $s(T)\leqslant\sum\limits_i(T)\leqslant S(T)$；

(2) $\forall\ T,T'$，都有 $s(T)\leqslant S(T')$；

(3) 对 T 加密后的分割 T'，有 $s(T)\leqslant s(T')$，$S(T)\geqslant S(T')$；

(4) 分别称 $s=\sup\limits_{T}\{s(T)\}$和 $S=\inf\limits_{T}\{S(T)\}$为 f 在 D 上的下

积分与上积分，有 $s \leqslant S$，$\lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)=S$，$\lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)=s$.

3. 有界函数 f 在矩形域 D 上可积 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上的上积分等于下积分，且 $s = S = \int_D f$.

4. 有界函数 f 在矩形域 D 上可积 $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists$ 某 $T \in D$，使得 $S(T) = s(T) = \sum\limits_i \omega_i \Delta\sigma_i < \varepsilon$.

$\omega_i = M_i - m_i$ 称为 f 在 σ_i 上的振幅.

5. 若 f 在矩形域 D 上连续，则 f 在 D 上可积.

6. 设 $\varphi:[c,d]\to\mathbf{R}$ 为可积函数，$E=\{(x,y)\mid y=\varphi(x), x\in[c,d]\}\subset D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ $([c,d]\subset[a_1,b_1])$. 若 f 为 D 上有界函数，且在 $D\backslash E$ 上连续，则 f 在 D 上可积.

7. 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭域，f 在 D 上有界函数，矩形域 $\hat{D}\subset D$，则称

$$\hat{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in \hat{D}\backslash D \end{cases}$$

为 f 在 $\hat{D}$ 上的延拓函数.

8. 若 f 在延拓函数 $\hat{f}$ 在 $\hat{D}$ 上可积，则 f 在 D 上可积，且

$$\int_D f = \int_{\hat{D}} \hat{f}.$$

9. 设 D 是平面有界点集（平面图形），函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则称 D 是可求面积的，且 D 的面积 $\Delta D = \int_D 1$.

10. 二重积分有与定积分类似的七条性质.

疑难解析

1. 二重积分与定积分有哪些异同？

答 二重积分与定积分都是以积分和式的极限来定义的，要求区域（区间）是有界的，函数 f 在区域上有界. 它们有相同的积

分性质.

不同的是,定积分中积分区域是数轴上的区间,被积函数是一元函数;二重积分中积分区域是平面区域,被积函数是二元函数.

2. 若 f 在 D 内除有限条面积为零的曲线外连续,f 是否在 D 上可积?

答 f 在 D 上可积. 利用积分的区域可加性,将 D 分割为有限个小区域. 因为这些曲线面积为零,不影响小区域上的积分值,所以 $\int_D f = \sum_{i=1}^{k}\int_{D_i} f$,且 f 在 D 上可积.

方法、技巧与典型例题分析

理解二重积分作为积分和的极限并认识 σ_i 的意义,掌握在二重积分存在的条件下,利用对区域的特殊分法和点的特殊取法来计算积分值,是我们全面理解二重积分概念的必要条件,希望读者通过例题切实掌握.

例 1 证明:若函数 $f(x,y)$ 在有界的区域 D 上连续,且 $f(x,y)>0$,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$.

证 由题设条件知,$0 < m \leqslant f(x,y) \leqslant M$,所以,$f(x,y)$ 在 D 上的积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m\Delta\sigma_i = m\sum_{i=1}^{m}\Delta\sigma_i = mD_S,$$

其中 D_S 是 D 的面积. 而 $D_S > 0$,故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \geqslant mD_S > 0.$$

例 2 证明:若函数 f 在矩形域 D 上可积,则 f 在 D 上有界.

证 由定义,若 $f(x,y)$ 在矩形域上可积,则 $\forall\ \varepsilon > 0$,$\exists\ \sigma > 0$,$\forall\ T \in D$,当 $\|T\| < \delta$ 时,有

$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_i - J\right| < \varepsilon,$$

所以
$$|f(x,y)| \leqslant M.$$

若 $f(x,y)$ 无界，则对 $T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$，至少在某 σ_i 上，有

$$f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j = f(\xi_i,\eta_j)\Delta\sigma_i \to \infty.$$

从而
$$\left|\sum_{i,j} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_i - J\right| \to \infty,$$

引出矛盾.

例 3 把积分 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当做积分和的极限，用直线网 $x=i/n, y=j/n$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 分割 $D: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$，并取被积函数在小正方形之右上顶点的值为 $f(\xi_i,\eta_j)$，计算积分值.

解 此时，积分和式为

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{i}{n}\cdot\frac{j}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot = \frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j$$

$$= \frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{4},$$

所以
$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i\Delta y_j = \frac{1}{4}.$$

例 4 用直线 $x=1+i/n, y=1+2j/n$ $(i,j=0,1,\cdots,n)$ 将域 $1\leqslant x\leqslant 2, 1\leqslant y\leqslant 3$ 分为小矩形. 作出函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在域上的积分上和 S 与积分下和 s，当 $n\to\infty$ 时，求上和与下和的极限.

解 求上和时，取 $f(\xi_i,\eta_j)$ 为小矩形右上顶点的值；求下和时，取 $f(\xi_i,\eta_j)$ 为小矩形左下顶点的值. 故

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\,\frac{2}{n} = \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},$$

$$s = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2 + \left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\,\frac{2}{n} = \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，
$$\lim_{n\to\infty} S = \lim_{n\to\infty} s = \frac{40}{3} = 13\,\frac{1}{3}.$$

例 5 设 $f(x,y)$ 为连续函数，证明：

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(0,0).$$

证 由二重积分中值定理，有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2\cdot f(\xi,\eta).$$

因为(ξ,η)是域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 内一点，当 $r\to 0$ 时，$f(\xi,\eta)\to f(0,0)$. 由连续性，得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{r\to 0} f(\xi,\eta) = f(0,0).$$

一般地，若 $f(x,y)$ 在方形域 D 可积，在 (x_0,y_0) 连续，对 $(x_0,y_0)\in G\subset D$，有

$$\lim_{d(G)\to 0}\frac{1}{G}\iint\limits_{G} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(x_0,y_0).$$

其中 $d(G)$为 G 的直径，$\overline{G}$ 为 G 的面积.

例 6 证明：若函数 $f(x,y)$，$g(x,y)$在有界闭区域 D 上连续，且 $g(x,y)\geqslant 0$，则$\exists\ (\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证 由 $f(x,y)$ 在 D 上连续，必有 $m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，故 $\forall\ (x,y)\in D$，有

$$mg(x,y)\leqslant f(x,y)g(x,y)\leqslant Mg(x,y),$$

从而，有

$$m\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $g(x,y)\geqslant 0$，设$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

若 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$，则

$$m \leqslant \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \leqslant M.$$

由连续函数的介值定理,$\exists\ (\xi,\eta)\in D$,使得

$$\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} = f(\xi,\eta),$$

从而 $$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例 7 若函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,且对任何 $D'\subset D$,都有 $\iint\limits_{D'} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$,证明:$\forall\ (x,y)\in D, f(x,y)=0$.

证 用反证法. 设在某 $P_0(x_0,y_0)\in D, f(x_0,y_0)\neq 0$,不妨设 $f(x_0,y_0)>0$,则依连续函数的局部保号性,存在 $U(P_0;r)$,使得 $\forall\ (x,y)\in U(P_0;r)\cap D$, 有 $f(x,y)>\frac{f(x_0,y_0)}{2}>0$,于是

$$\iint\limits_G f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \frac{f(x_0,y_0)}{2}\iint\limits_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{f(x_0,y_0)}{2}D_G > 0,$$

其中 $G=U(P_0;r)$,D_G 是 G 的面积. 上式与题设矛盾,故 $\forall\ (x,y)\in D$,必有 $f(x,y)=0$.

例 8 函数 $$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为有理点},\\ -1, & (x,y)\text{为无理点}\end{cases}$$
在 $D[0,1;0,1]$上是否可积?

解 不可积. 因为对区域的任一分割,若在每一小区域 $\Delta\sigma_i$ 上总取有理点(ξ_i,η_i),则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = D_S = 1.$$

若在每一小区域 $\Delta\sigma_i$ 上总取无理点(ξ_i,η_i),则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = -\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i = -D_S = -1.$$

从而知 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 不存在.

例 9 估计 $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\dfrac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

解 因为 $0\leqslant\cos^2 x\leqslant 1, 0\leqslant\cos^2 y\leqslant 1, D_S=200$，故

$$\frac{1}{102}\leqslant f(x,y)=\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant\frac{1}{100}.$$

于是
$$\frac{100}{51}\leqslant\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 10}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leqslant 2.$$

例 10 计算 $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$，这里$[x]$是不超过 x 的最大整数.

解 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{2n}\dfrac{2}{n^2}\left[\dfrac{2i+j}{n}\right]$是函数 $f(x,y)=[x,y]$ 在方形域 $D=[0,2;0,2]$ 上的一个积分和. 将 x 轴上区间 n 等分，y 轴上区间 $2n$ 等分，故 $\Delta\sigma_i=\dfrac{2}{n^2}$；取小区间 $\Delta\sigma_i$ 右上顶点$\left(\dfrac{2i}{n},\dfrac{j}{n}\right)$的函数值，即构造出下列和式. 函数 $f(x,y)=[x+y]$.

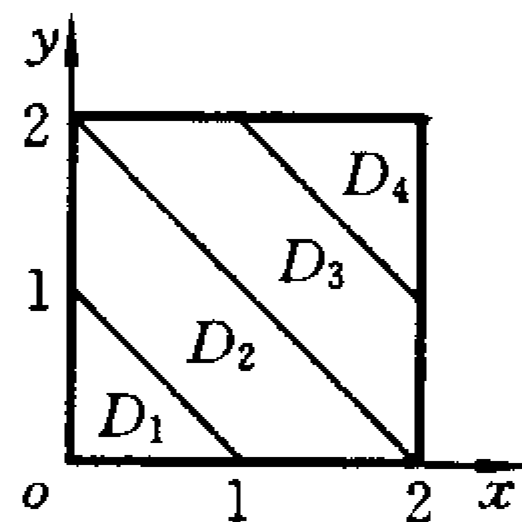


图 13.1

将 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4，其面积分别为 1/2,3/2,3/2,1/2，各小区域内函数值分别为 0,1,2,3. 于是

$$\begin{aligned}
&\lim\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{2}{n^2}\left[\frac{2i+j}{n}\right]\\
&=\iint\limits_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_4}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=0+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+3\iint\limits_{D_4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=1\cdot\frac{3}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+3\cdot\frac{1}{2}=6.
\end{aligned}$$

第二节　二重积分的计算

主要内容

1. 设 f 定义在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上，当 x 取 $[a,b]$ 上某定值时，$f(x,y)$ 是 $[c,d]$ 上的一元函数，则积分(若存在)

$$I(x)=\int_c^b f(x,y)\mathrm{d}y,\ x\in[a,b]$$

是定义在 $[a,b]$ 上的函数，称为含参变量 x 的积分.

2. 若 f 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则函数 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上连续.

3. 设 f 在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积，若 $\forall x\in[a,b]$，$f(x,y)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则含参变量积分 $I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y.$$

4. 若 f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x,$$

即累次积分与顺序无关.

5. 平面点集 $D=\{(x,y)\mid y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为 x-型区域，$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\leqslant x\leqslant x_2(y),c\leqslant y\leqslant d\}$ 称为 y-型区域.

6. 设 f 在 x-型区域上连续，$y_1(x)$，$y_2(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$G(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上连续，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

7. 用极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r,$$

其中 $D'=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$，

或 $\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{r_1}^{r_2} r\mathrm{d}r\int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$

其中 $D'=\{(r,\theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),r_1\leqslant r\leqslant r_2\}.$

8. 对一般的变量代换 $u=u(x,y),v=v(x,y)$，若$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$，则有逆变换 $x=x(u,v),y=y(u,v)$，且有$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$. 那么有换元公式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),$$

$$y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 D' 为 D 变换后对应的区域.

9. 设函数 f 及 f_x 都在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则 $I(x)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上可微，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

10. 设函数 f 及 f_x 都在矩形域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续，y_1,y_2 为定义在$[a,b]$上，其值域含于$[c,d]$的两个可微函数，则函数 $F(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上可微，且

$$F'(x)=\int_{y_2(x)}^{y_1(x)} f_x'(x,y)\mathrm{d}y + f(x,y_2(x))y_2'(x) - f(x,y_1(x))y_1'(x).$$

疑难解析

1. 用累次积分来计算二重积分应注意什么问题？怎样解决这些问题？

答 解题的关键是画出积分区域的草图，确定是 x-型区域还是 y-型区域.

(1) 若积分区域既是 x-型区域又是 y-型区域，则两种积分顺序都可以. 但一般选择里层积分限简单的或积分区域分块少的一种，以减少计算工作量.

(2) 被积函数含有绝对值符号、最值符号或"[]"符号时，要将积分区域适当分块，以去掉这些符号，直接进行累次积分.

(3) 被积函数是分片函数时，要分片求解.

(4) 有些累次积分要化为重积分来求解.

(5) 若被积函数是抽象函数，要依函数的特点来处理积分.

2. 怎样选择是用直角坐标系还是用极坐标系计算二重积分？

答 主要从被积函数与积分区域来考虑.

(1) 当积分区域为圆域、环形域、扇形域及极坐标曲线包围区域时，可选择极坐标系.

当积分区域为多边形或直线与一般曲线围成图形时，可选择直角坐标系.

有些图形分块后可能要用不同的坐标系.

(2) 当被积函数形如 $f(x^2+y^2)$ 或 $f(y/x)$ 时，可选择极坐标系.

(3) 当积分区域为椭圆或被积函数形如 $f\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 时，可选

择广义极坐标系，$x=ra\cos\theta, y=rb\sin\theta$. 此时，$|J|=rab$.

方法、技巧与典型例题分析

除疑难解析中所讲的问题外，我们还知道累次积分可看做两次定积分，因此，定积分中的方法和技巧在二重积分中仍可使用. 但是被积函数的奇偶性与积分区域的对称性表现得可能比定积分复杂些. 读者应很好地加以辨析，应用得当可以简化积分计算.

一、二重积分的计算

例 1 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=1$ 与 $x=\sqrt{y}$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $xy=1, y=x$ 与 $x=2$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D (x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $|x|+|y|=1$ 所围成；

(4) $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $x=0, y=x$ 与 $y=1$ 所围成.

解 先画草图，用不等式组确定区域(包括确定积分顺序)；然后配置积分限，逐层积分.

(1) 如图 13.2 所示，D 表示为：$x^2\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1$，故

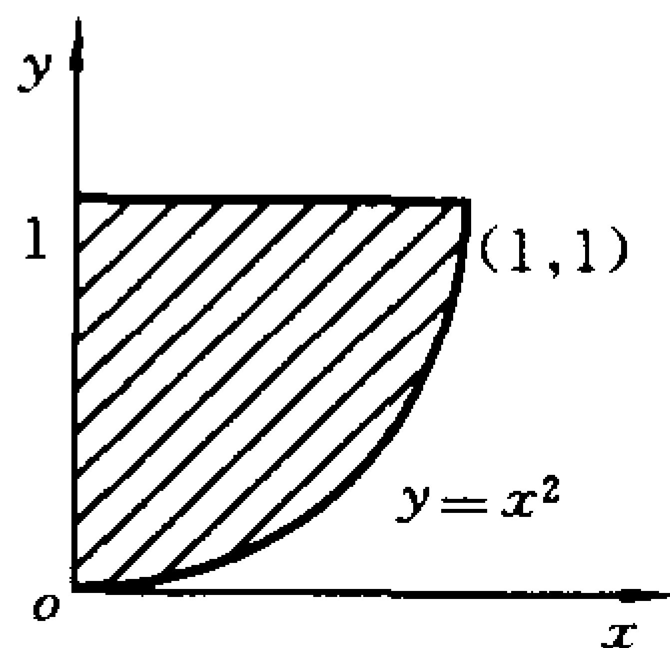


图 13.2

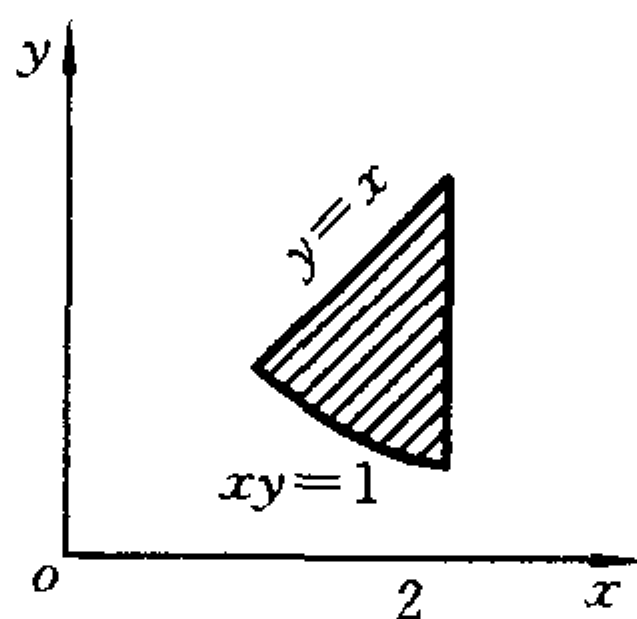


图 13.3

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 x^2 y\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\frac{1-x^4}{2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7\right)\Big|_0^1=\frac{2}{21}.$$

（2）如图 13.3 所示，D 表示为：$1/x\leqslant y\leqslant x,1\leqslant x\leqslant 2$，故

$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{1/x}^x \frac{\mathrm{d}y}{x^2y^2}=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{9}{4}.$$

（3）如图 13.4 所示，D_1 表示为：$0\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1-x$；$D_2$ 表示为：$-1\leqslant x\leqslant 0,-1-x\leqslant y\leqslant 1+x$. 故

$$I=\iint_{D_1}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}(x+y)^2\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}(x+y)^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1[1-(2x-1)^3]\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\int_{-1}^0[(2x+1)^3+1]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

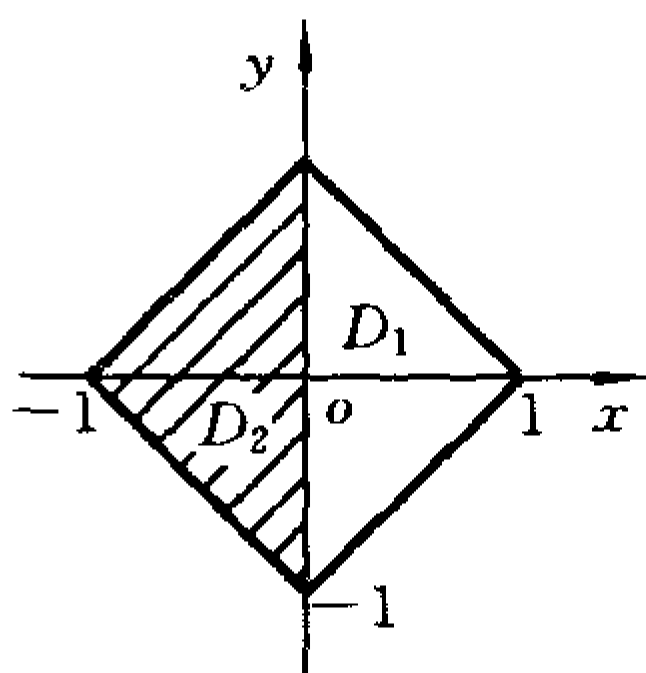


图 13.4

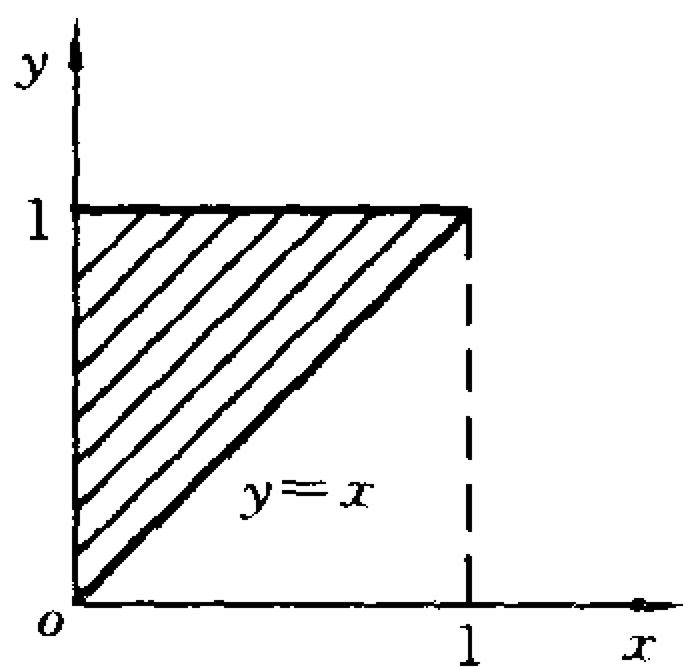


图 13.5

（4）如图 13.5 所示，D 表示为：$0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant y$，故

$$I=\int_0^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{y^3}{3}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$$
$$=-\frac{1}{6}\left(y^2\mathrm{e}^{-y^2}-2\int_0^1 y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right).$$

本题若先对 y 积分，则 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 不能用有限形式积出. 积分中还使

用了分部积分法.

例 2 改变下列积分中累次积分的顺序：

(1) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y) dy$； (2) $\int_0^2 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy$；

(3) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{(3-x)/2} f(x,y) dy$；

(4) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x,y) dy$.

解 先依据原积分限画出积分区域的草图，然后按新次序写出区域的不等式组表示(包括区域分块)，配置积分限.

(1) 如图 13.6 所示，积分区域分为 D_1 和 D_2，D_1 表示为：$0 \leqslant y \leqslant 2, y/2 \leqslant x \leqslant y$；$D_2$ 表示为：$2 \leqslant y \leqslant 4, y/2 \leqslant x \leqslant 2$. 故

$$I = \int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y) dx.$$

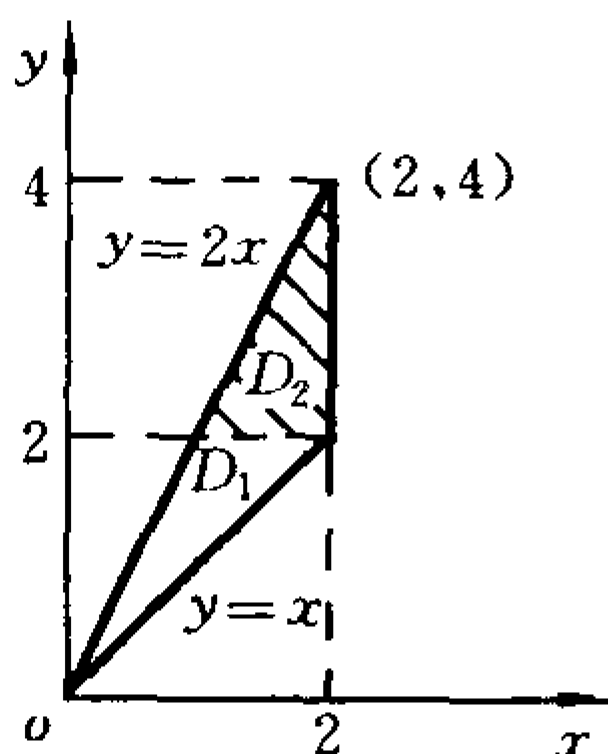


图 13.6

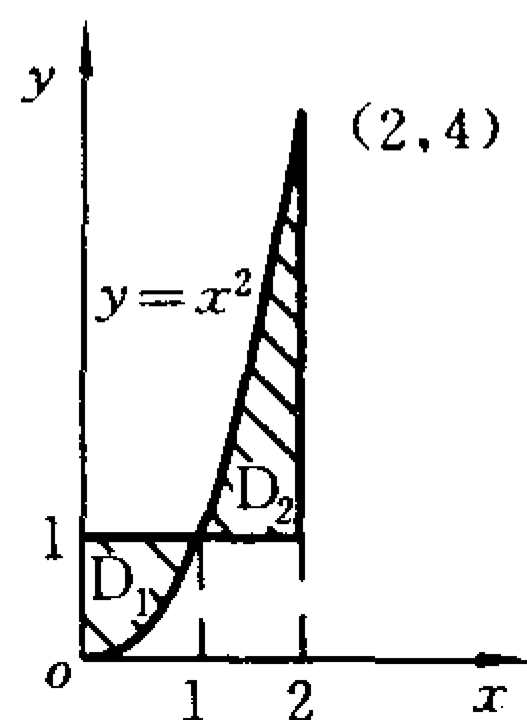


图 13.7

(2) 如图 13.7 所示，积分区域分为 D_1 和 D_2，D_1 表示为：$0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}$；$D_2$ 表示为：$1 \leqslant y \leqslant 4, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2$. 故

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy + \int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x,y) dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y) dx + \int_1^4 dx \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y) dx.$$

(3) 如图 13.8 所示，D 表示为：$0 \leqslant y \leqslant 1, \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 3-2y$，故

$$I = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y) dx.$$

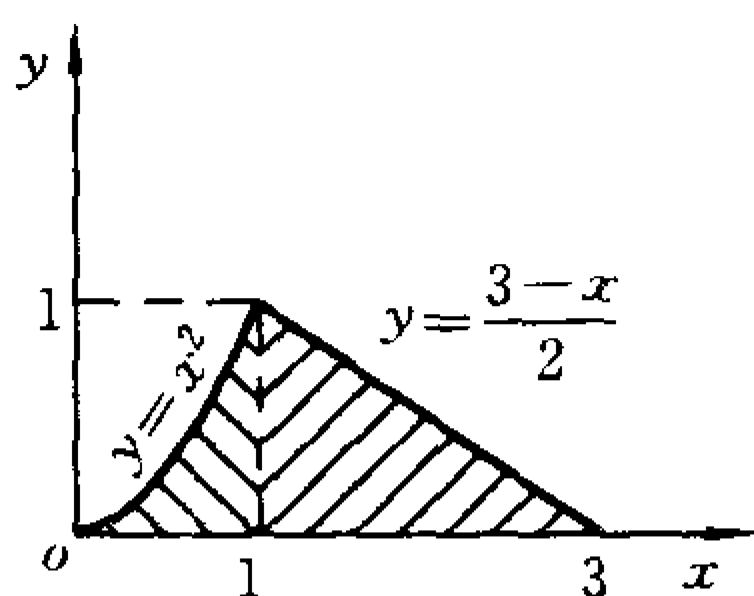


图 13.8

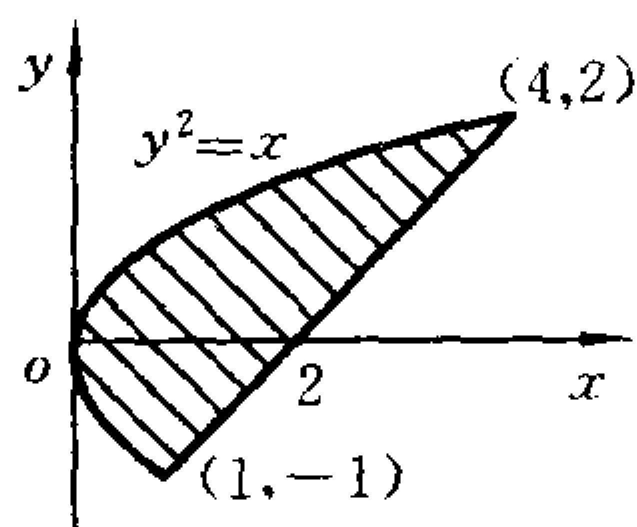


图 13.9

（4）如图 13.9 所示，D 表示为：$-1\leqslant y\leqslant 2$，$y^2\leqslant x\leqslant y+2$，故

$$I=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 3 计算下列积分：

（1）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y$；

（2）$\iint\limits_D\sin x\sin y\cdot\max(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,D:0\leqslant x,y\leqslant\pi$；

（3）$\iint\limits_D|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,D:x^2+y^2\leqslant a^2$.

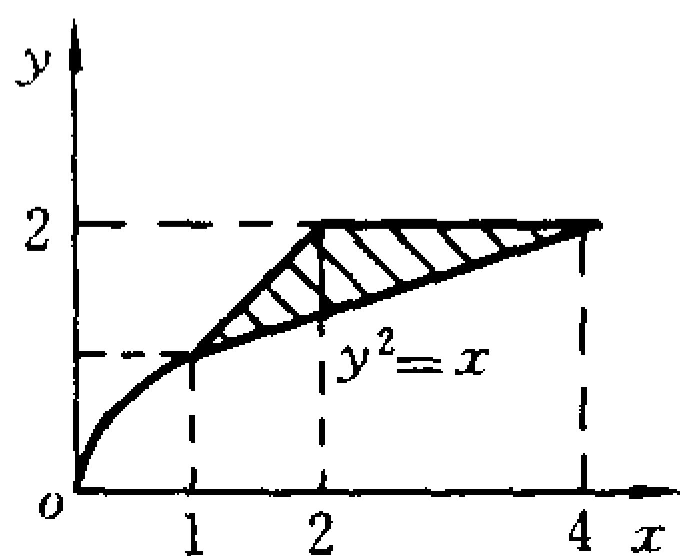


图 13.10

解 （1）D 如图 13.10 所示，显然先对 y 求积较困难，需改变积分次序. 因此

$$I=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x=-\frac{2}{\pi}\int_1^2 y\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}\left(y\sin\frac{\pi y}{2}-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\right)\Big|_1^2$$

$$=4(2+\pi)/\pi^3.$$

（2）被积函数含 $\max(x,y)$，需利用直线 $y=x$ 将 D 分为 D_1 和 D_2. D_1 表示为：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$x\leqslant y\leqslant\pi$；D_2 表示为：$0\leqslant x\leqslant\pi$，$0\leqslant y\leqslant x$. 故

$$I=\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\sin x\sin y\cdot y\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin x\sin y\cdot x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x(-\cos y\cdot y+\sin y)\Big|_x^{\pi}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi}x\sin x(-\cos y)\Big|_0^{x}\mathrm{d}x$$

$$= 5\pi/2.$$

(3) 用直线 $x=0$ 与 $y=0$ 将 D 分为四块，得

$$I=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\mathrm{d}y-\int_0^a \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^0 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\mathrm{d}y+\int_{-a}^0 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^0 xy\mathrm{d}y$$

$$=\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}+\frac{a^4}{8}=\frac{a^4}{2}.$$

对含绝对值符号的积分，要根据函数的特点，将区域分块，去掉绝对值符号.

例 4 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (x^2-2x+3y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，　$D: x^2+y^2\leqslant a^2$；

(2) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 由 $y=x^2, y=4x^2, y=1$ 所围成.

解 考虑积分区域的对称性，化简积分.

(1) 区域 D 关于 x 轴，y 轴与原点对称，故

$$\iint\limits_D -2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint\limits_D 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad \iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$I=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

则
$$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{4}a^4,$$

$$\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2.$$

从而
$$I=\pi a^4/4+2\pi a^2.$$

(2) 积分区域关于 y 轴对称，故 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

$$I=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1 y\left(\sqrt{y}-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)\mathrm{d}y = 2\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{2}y\mathrm{d}y=\frac{2}{5}.$$

例 5 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2\leqslant a^2$；

(2) $\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$.

解 本例用直角坐标系计算是困难的，要变换为极坐标系来计算，并注意区域的封闭性.

(1) D 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant a$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}\cdot r\mathrm{d}r\quad(\text{令 } r^2=t)$$

$$=\pi\int_0^{a^2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{a^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}-\pi\int_0^{a^2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\arcsin t\Big|_0^{a^2}+\pi\sqrt{1-t^2}\Big|_0^{a^2}$$

$$=\pi(\arcsin a+\sqrt{1-a^2}-1).$$

(2) D 应添加条件 $0\leqslant x\leqslant 2$，则变换后区域可表示为：$2\cos\theta\leqslant r\leqslant 2$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r=4\int_0^{\pi/2}(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{4}\pi\ (\text{瓦里士公式}).$$

例 6 计算 $\iint_D(|x-y|+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$：$x^2+y^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$.

解 为了将绝对值符号去掉，用直线 $y=x$ 将 D 分为 D_1：$y\leqslant$

x 和 $D_2:y>x$，再化为极坐标计算. 故

$$I=\iint_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r$$

$$+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}r+2\iint_{D}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$+\frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin\theta-\cos\theta)\mathrm{d}\theta+2\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

例 7 计算

$$\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:x^2+y^2\leqslant 2(x+y).$$

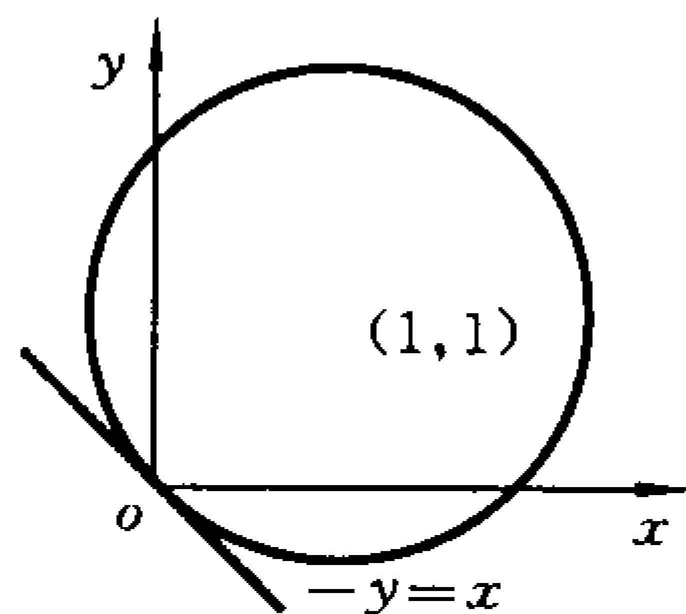


图 13.11

解 $x^2+y^2\leqslant 2x+2y$

$\Rightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2.$

(1) 如图 13.11 所示，D 表示为：$0\leqslant r\leqslant 2(\cos\theta+\sin\theta)$，$-\pi/4\leqslant\theta\leqslant 3\pi/4$.

$$I=\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\cos\theta+\sin\theta)}r(\cos\theta+\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(\cos\theta+\sin\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left(\frac{3}{2}+2\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left[\frac{3}{2}\theta-\cos 2\theta-\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{3\pi/2}=4\pi.$$

(2) 作坐标代换 $x=1+r\cos\theta, y=1+r\sin\theta$，则 D 表示为：$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2}$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(2+r\cos\theta+r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\left[2+\frac{8}{3}\cos\theta+\frac{8}{3}\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta=4\pi.$$

注意 许多题是可以一题多解的，为了节省篇幅，本书每题只给出一种解法.

下面给出一个非连续函数的积分. 求非连续函数的积分，要依连续性划分积分区域，分析其间断线与曲线交点.

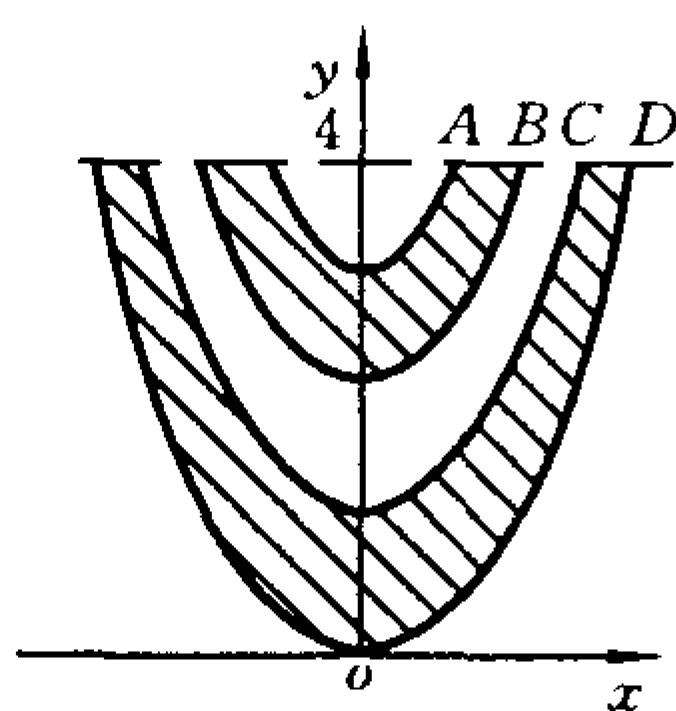


图 13.12

例 8 计算 $\iint\limits_D\sqrt{[y-x^2]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $x^2\leqslant y\leqslant 4$.

解 如图 13.12 所示，按连续性划分积分区域为：

当 $x^2\leqslant y\leqslant x^2+1$ 时，$[y-x^2]=0$；

当 $x^2+1\leqslant y\leqslant x^2+2$ 时，$[y-x^2]=1$；

当 $x^2+2\leqslant y\leqslant x^2+3$ 时，$[y-x^2]=2$；

当 $x^2+3\leqslant y\leqslant x^2+4$ 时，$[y-x^2]=3$.

抛物线与直线 $y=4$ 的交点为 $A(1,4)$，$B(\sqrt{2},4)$，$C(\sqrt{3},4)$，$D(2,4)$，积分区域关于 y 轴对称. 于是

$$I=2\left[\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{x^2+2}\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{4}\mathrm{d}y\right]$$
$$+2\sqrt{2}\left[\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{x^2+3}\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{4}\mathrm{d}y\right]$$
$$+2\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2+3}^{4}\mathrm{d}y$$
$$=2\left[\sqrt{2}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}(3-x^2)\mathrm{d}x\right]$$
$$+2\sqrt{2}\left[1+\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\mathrm{d}x\right]+2\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}(4+4\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

例 9 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y}\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $\frac{\pi y}{2} \leqslant x \leqslant \pi y, x \leqslant y^2 \leqslant 2x, y > 0, x > 0$ 所围成；

(2) $\iint\limits_D \frac{(x+y)\ln(1+x/y)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成；

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y-x}{y+x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成.

解 本例要依据函数特点，进行适当的变量代换后再计算.

(1) 作代换 $u=\frac{x^2}{y}, v=\frac{y^2}{x}$，则 $J=\frac{1}{3}$，D 化为 D'：$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x^2}{y}\leqslant\pi, 1\leqslant\frac{y^2}{x}\leqslant 2, x>0, y>0$. 于是

$$I=\iint\limits_{D'} u\sin(uv)\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}u\int_1^2 u\sin(uv)\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}[-\cos(uv)]\Big|_1^2\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}.$$

(2) 作代换 $x+y=u, \frac{y}{x}=v$，则 $x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v}, |J|=\frac{|u|}{(1+v)^2}$，$D$ 代为 D'：$0\leqslant u\leqslant 1, 0\leqslant v\leqslant +\infty$，于是

$$I=\iint\limits_{D'}\frac{u\sin(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{|u|}{(1+v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v\int_0^1\frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u.$$

其中

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\mathrm{d}v=\left[-\frac{\ln(1+v)}{1+v}\right]\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{1+v}\right]\Big|_0^{+\infty} = 1,$$

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u \xlongequal{1-u=t} -\int_1^0 \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{16}{15},$$

故
$$I = 1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15}.$$

(3) 作代换 $u=y-x, v=y+x$，则 $x=\dfrac{v-u}{2}, y=\dfrac{v+u}{2}, |J|=1/2$，$D$ 化为 D'，D' 由 $v=1, u=v, u=-v$ 所围成.

$$I = \iint_{D'} \mathrm{e}^{u/v} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} \mathrm{e}^{u/v}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1})v\mathrm{d}v = \frac{1}{4}(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}).$$

二、二重积分证明题

二重积分证明题的求证，常利用对积分区域的分块和区域的对称性或对被积函数的变量改变记号、利用被积函数的奇偶性以及改变积分顺序等方法进行. 在证题前，对命题要有深刻的思考.

例 10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，证明：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$$

证 用改变积分顺序与改变记号的方法，即

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{改变顺序}} \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{改变记号}} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故
$$2I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2 = A^2,$$

于是
$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}A^2.$$

例 11 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,试用二重积分证明:

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为

$$0\leqslant \int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b [f(x)-f(y)]^2\mathrm{d}y$$

$$=(b-a)\left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y\right]-2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2,$$

所以

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)=c$(常数)时等号成立.

例 12 若 $f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续,证明:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为$[f(x)g(x)-f(y)g(y)]^2\geqslant 0$,所以在方形域 $D:a\leqslant x\leqslant b,a\leqslant y\leqslant b$ 上,有

$$0\leqslant \iint_D [f(x)g(x)-f(y)g(y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\int_a^b f^2(x)g^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_a^b\int_a^b f^2(y)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-2\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)f(y)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_a^b\int_a^b f^2(x)f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

故

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b f^2(y)\mathrm{d}y.$$

当 $f(x)=\sqrt{h(x)},g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{h(x)}}$时,由上式得

$$\int_a^b h(x)\mathrm{d}x\int_a^b \frac{1}{h(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2 \quad (h(x)>0).$$

例 13 证明:$\forall\, n\in\mathbf{N},n>1$,有

$$\int_a^b\int_a^x (x-y)^{n-2}f(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

证 $I = \int_a^b \mathrm{d}y \int_y^b (x-y)^{n-2} f(y)\mathrm{d}x$

$$\xlongequal{\text{改变顺序}} \int_a^b f(y)\left[\frac{1}{n-1}(x-y)^{n-1}\right]\Bigg|_y^b \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{n-1}\int_a^b (b-y)^{n-1}f(y)\mathrm{d}y.$$

例 14 设 $p(x)$是$[a,b]$上的可积函数,而 $f(x)$与 $g(x)$在$[a,b]$上有相同的单调性,证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证 设 $I = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$$- \int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \text{ ,}$$

则 $I = \int_a^b p(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$

$$- \int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ①$$

类似地,有

$$I = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\int_a^b p(y)f(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$- \int_a^b p(y)f(y)\mathrm{d}y\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b\int_a^b p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ②$$

①+②,得

$$I = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $p(x)>0$,$f(x)$,$g(y)$单调,故 $I>0$,即命题成立.

例 15 证明：$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$. D 由 $xy=1,xy=2,y=x,y=4x$ 所围成.

证 因为函数和积分区域的特点，设 $u=xy,v=y/x$，则 D 化为 D'：$1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4,|J|=1/2v$.

$$I=\iint\limits_{D'} f(u)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

三、其它二重积分问题

例 16 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{x/2}\mathrm{d}t\int_{x/2}^t\dfrac{\mathrm{e}^{-(t-u)^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}\mathrm{d}u$.

解
$$I=\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x/2}\mathrm{d}t\int_t^{x/2}\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}$$
$$\xlongequal{\text{改变顺序}}\lim_{x\to 0}\frac{-\int_0^{x/2}\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{-(t-u)^2}\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{-x^2/4}}$$
$$\xlongequal{\mathrm{L}'}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\int_0^{x/2}\mathrm{e}^{-(t-x/2)^2}\mathrm{d}t\right)\Big/\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2/4}\right)$$
$$\xlongequal{y=t-x/2}\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}\int_{-x/2}^0\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\Big/\left(\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2/4}\right)$$
$$\xlongequal{\mathrm{L}'}\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^2/4}\right]\Big/\left[\mathrm{e}^{-x^2/4}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{4}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

例 17 设 $I(r)=\int_{-r}^r\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$，求 $I(r)$.

解 不能直接计算. 设 D：$[-r,r;-r,r]$，则

$$I^2(r)=[I(r)]^2=\int_{-r}^r\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-r}^r\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

分别作 D 的外切圆域 D_2 与内接圆域 D_1，因为 $D_1\subset D_2$，$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}>0$，故

$$\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant I^2(r)\leqslant\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$，则 $|J|=\rho$，于是

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^r e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-r^2}),$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}r} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \pi(1-e^{-2r^2}).$$

由夹逼性知，$\lim\limits_{r\to\infty}I^2(r)=\pi$，$\lim\limits_{r\to\infty}I(r)=\sqrt{\pi}$，即

$$\int_{-r}^{r} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \quad 或 \quad \int_0^{r} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例 18 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$；　　(2) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx$；

(3) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$.

解 (1) 因为$\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$，α，$1+\alpha$都是连续函数，故$F(\alpha)=\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，所以

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1+\alpha}\frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0)$$

$$= \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $F(\alpha)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0) = 2\int_0^1 xdx = 1.$$

(3) $F(\alpha)=\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx$也是$\alpha\in\mathbf{R}$的连续函数，故

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^2 x^2\cos\alpha x dx = \lim_{\alpha\to 0}F(\alpha) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}.$$

例 19 求下列函数$F(\alpha)$的导数：

(1) $\int_{\alpha}^{\alpha^2} e^{-\alpha y^2}dy$；　　(2) $\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$；

(3) $\int_0^{\alpha}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}dx$；　　(4) $\int_0^{\alpha}f(x+\alpha, x-\alpha)dx$.

解　可直接套用公式求解.

(1) $F'(\alpha)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha^2)\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\Big|_{y=\alpha^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\Big|_{y=\alpha}$

$$+\int_{\alpha}^{\alpha^2}(\mathrm{e}^{-\alpha y^2})_{\alpha}'\mathrm{d}y$$

$$=2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha^5}-\mathrm{e}^{-\alpha^3}-\int_{\alpha}^{\alpha^2}\mathrm{e}^{-\alpha y^2}y^2\mathrm{d}y.$$

(2) $F'(\alpha)=-\sin\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha|\sin\alpha|}-\cos\alpha\cdot\mathrm{e}^{\alpha|\cos\alpha|}$

$$+\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\mathrm{e}^{\alpha\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$$

(3) $F'(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)+\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2).$

(4) 设 $u=x+\alpha,v=x-\alpha$,则 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha}f(u,v)\mathrm{d}x$.

$$F'(\alpha)=f(2\alpha,0)+\int_0^{\alpha}[f_u'(u,v)-f_v'(u,v)]\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)$$

$$-\int_0^{\alpha}[f_u'(u,v)+f_v'(u,v)]\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u,v)\mathrm{d}x$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-f(x+\alpha,x-\alpha)\Big|_0^{\alpha}$$

$$=f(2\alpha,0)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x-f(2\alpha,0)+f(\alpha,-\alpha)$$

$$=f(\alpha,-\alpha)+2\int_0^{\alpha}f_u'(u,v)\mathrm{d}x.$$

例 20　求下列函数 $F(x)$的二阶导数:

(1) $\int_0^x(x+y)f(y)\mathrm{d}x$, $f(x)$ 可微;

(2) $\int_a^b f(y)|x-y|\mathrm{d}y$, $a<b$, $f(y)$ 可微.

解　按公式求导,视 $F''(x)=[F'(x)]'$.

(1) $F'(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)\mathrm{d}y$,

$F''(x) = 2f(x) + 2xf'(x) + f(x) = 3f(x) + 2xf'(x)$.

(2) 当 $x \in (a,b)$ 时，有

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y + \int_x^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y,$$

故 $$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x (x-y)f(y)\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x (y-x)f(y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-y)f(y)]\mathrm{d}y - \int_b^x \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^x f(y)\mathrm{d}y + \int_b^x f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

当 $x \notin (a,b), x \leqslant a$ 时，有 $F(x) = \int_a^b (y-x)f(y)\mathrm{d}y$，故

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}[(y-x)f(y)]\mathrm{d}y = -\int_a^b f(y)\mathrm{d}y,$$

$$F''(x) = 0.$$

类似地，当 $x > b$ 时，$F''(x) = 0$. 因此

$$F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b). \end{cases}$$

例 21 利用对参数的微分法计算下列积分：

(1) $\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $|a| = |b|$ 时，有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln a^2 = \pi\ln\frac{|a| + |b|}{2}.$$

当 $|a| \neq |b|$ 时，有

$$\int_0^{\pi/2} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi/2} \ln\left[\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a^2 - b^2)\cos 2x}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2} + \int_0^{\pi/2}\ln(1-c\cos 2x)\mathrm{d}x,$$

其中 $c=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$,故 $0<|c|<1$. 从而

$$\text{原式} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos u)\mathrm{d}u.$$

设 $I(c)=\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos u)\mathrm{d}u$, 则

$$I'(c) = \int_0^{\pi}\frac{-\cos u}{1-c\cos u}\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\int_0^{\pi}\left[1-\frac{1}{1-c\cos u}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{c} - \frac{1}{c}\left[\frac{2}{\sqrt{1-c^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+c}{1-c}}\tan\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\right), \quad 0<|c|<1.$$

故

$$I(c) = \int_0^c \frac{\pi}{v}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\mathrm{d}v$$

$$= \pi\left[\ln|v| + \ln\frac{1+\sqrt{1-v^2}}{|v|}\right]\Bigg|_0^c$$

$$= \pi[\ln(1+\sqrt{v^2})]\Big|_0^c = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2}.$$

得 $I\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right) = \pi\ln\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2|ab|}{a^2+b^2}\right) = \pi\ln\dfrac{(|a|+|b|)^2}{2(a^2+b^2)}.$

从而 $\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{\pi}{2}\ln\frac{(|a|+|b|)^2}{2(a^2+b^2)} = \pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}.$$

可见,不论 $|a|=|b|$ 还是 $|a|\neq|b|$,结果都是相同的.

(2) 利用上例结论

$$\int_0^{\pi}\ln(1-c\cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{2},$$

有 原式 $= \pi\ln(1+a^2) + \int_0^{\pi}\ln\left(1-\dfrac{2a}{1+a^2}\cos x\right)\mathrm{d}x$

$$= \pi \ln(1+a^2) + \pi \ln \frac{1}{2}\left[1+\sqrt{1-\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^2}\right]$$

$$= \pi\left[\ln(1+a^2) + \ln \frac{1+a^2+|1-a^2|}{2(1+a^2)}\right]$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } |a| \leqslant 1, \\ \pi \ln a^2, & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}$$

例 22 应用积分号下微分法或积分法计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx \ (|a| < 1)$；

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \ (b > a > 0)$.

解 (1) 设 $I(a) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx$，则

$$I'(c) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+a^2\tan^2 x} \xlongequal{u=\tan x} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+a^2u^2)(1+u^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{u^2+1/a^2} - \frac{1}{u^2+1}\right]du$$

$$= \frac{1}{a^2-1}[|a|\arctan|a|u - \arctan u]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^2-1}(|a|-1) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{1+a}, & a \geqslant 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{1-a}, & a < 0. \end{cases}$$

当 $a=0$ 时，$I(a)=0$；

当 $a>0$ 时，$I(a) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^a \frac{dv}{1+v} = \frac{\pi}{2}\ln(1+a)$；

当 $a<0$ 时，$I(a) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^a \frac{dv}{1-v} = -\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$.

综上所述，得

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x} dx = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} a)\ln(1+|a|).$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

$$= \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\int_a^b x^y\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x.$$

当 $x=0$ 时，$\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y$ 理解为零，则 $\sin\left(\ln\frac{1}{2}\right)x^y$ 在域：$0\leqslant x\leqslant 1, a\leqslant y\leqslant b$ 上连续，故可交换积分次序.

作代换 $x=\mathrm{e}^{-1}$，得

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(y+1)t}\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}[-(y+1)\sin t - \cos t]\mathrm{e}^{-(y+1)t}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{1+(1+y)^2} = \arctan(1+y)\Big|_a^b$$

$$= \arctan(1+b) - \arctan(1+a)$$

$$= \arctan\frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}.$$

类似可得

$$\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\ln[1+(1+y^2)]\Big|_a^b = \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

第三节 三重积分

主要内容

1. 设 f 是定义在长方体 $V\subset\mathbf{R}^3$ 上的函数，J 是一个确定的

数. 若$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,$\forall\ T\in V$,只要$\|T\|<\delta$,属于分割 T 的所有积分和都有

$$\left|\sum f(\xi_i,\eta_i,\zeta_k)\Delta V_{ijk}-J\right|<\varepsilon,$$

则称 f 在 V 上可积,J 为 f 在 V 上的三重积分,记作

$$J=\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad 或\quad \int_V f.$$

2. 称函数

$$\hat{f}(x,y,z)=\begin{cases}f(x,y,z), & (x,y,z)\in V,\\ 0, & (x,y,z)\in\hat{V}\setminus V\end{cases}$$

为 f 在 $\hat{V}$ 上的延拓函数.

3. 若 $f(x,y,z)$ 在 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ 上的三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 存在,且对任何 $x\in[a,b]$,二重积分 $I(x)=\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 存在($D=[c,d]\times[e,f]$),则

$$\int_a^b\mathrm{d}x\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

存在,且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\iint\limits_D f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d\mathrm{d}y\int_e^f f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

4. 设 $V=\{(x,y,z)\,|\,z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$,$V$ 在 xoy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\,|\,y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),a\leqslant x\leqslant b\}$是 x-型区域,它对于平行 z 轴且通过 D 内点的直线与 V 的边界至多交于两点.

设 f 在 V 上连续,$z_1(x,y)$,$z_2(x,y)$在 D 上连续,$y_1(x)$,$y_2(x)$在$[a,b]$上连续,则有

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

5. 设 f 在有界闭区域 V 上连续，则

$$I = \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{V'} f[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)]|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$.

(1) 若 $\begin{cases} x=r\cos\theta, & 0\leqslant r\leqslant+\infty, \\ y=r\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ z=z, & -\infty<z<+\infty, \end{cases}$ $\quad J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=r$，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

称为柱坐标下的三重积分.

(2) 若 $\begin{cases} x=r\cos\theta\sin\theta, & 0\leqslant r\leqslant+\infty, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi, \\ z=r\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \end{cases}$ $\quad J=r^2\sin\varphi$，则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

称为球坐标下的三重积分.

疑难解析

1. 怎样理解三重积分的累次积分公式？

答 主要内容 4 所给出的累次积分公式，只是一种积分顺序

的体现，实际上，三个自变量可以有六种不同的积分顺序. 要根据具体情形（包括积分域的考虑和积分函数的考虑）和个人的习惯来选择. 在选择时，要考虑区域少分块，因为分块越多积分次数越多（当平行坐标轴的直线与区域边界交点多于两个时就要分块，所以要选择好顺序，避免出现多于两个交点的情形）. 同时，更要考虑内层积分限函数简化，以便使后面的积分计算较为容易.

三重积分除了化为三次积分外，还可以化为先二重积分后一次积分或者先一次积分后二重积分的形式，这主要由被积函数的因素并结合积分区域来考虑. 详见后面的例题.

2. 怎样选择三重积分的坐标系？

答 如同二重积分，选择坐标系的出发点是积分区域的形状与被积函数的形式. 当积分区域为正方体、长方体及一般的多面体，或一般形式的函数时，通常选择直角坐标系，因此选择直角坐标系的时候最多. 当 V 为柱形区域，其投影域适用极坐标表示，或被积函数含投影域坐标的二次式（如 $x^2+y^2, y/x$）时，一般选择柱坐标系. 当 V 为球形区域及其部分，或被积函数含 $x^2+y^2+z^2$ 因式时，一般选择球坐标系. 有时还因某些特殊函数或特定区域选择特定的代换.

方法、技巧与典型例题分析

计算三重积分，首先要对空间解析几何概念，特别是空间的平面、二次曲面的特点和形状有一个正确的认识. 一般要先作出空间立体（积分区域）的草图，确定选择哪种坐标系和什么样的积分顺序；然后再按照确定的坐标系与积分顺序写出积分区域的不等式组表示；再配置积分限，进行逐次积分. 逐次积分时，可以运用定积分的所有技巧与方法.

例 1 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$，$x^2+z^2=1$，$y=1$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V y\cos(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$z=0$，及 $x+z=\pi/2$ 所围成；

(4) $\iiint\limits_V xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 所围成.

解 (1) 如图 13.13 所示，V 用直角坐标系可表示为

$$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2},\\ -\sqrt{1-x^2-z^2}\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$$

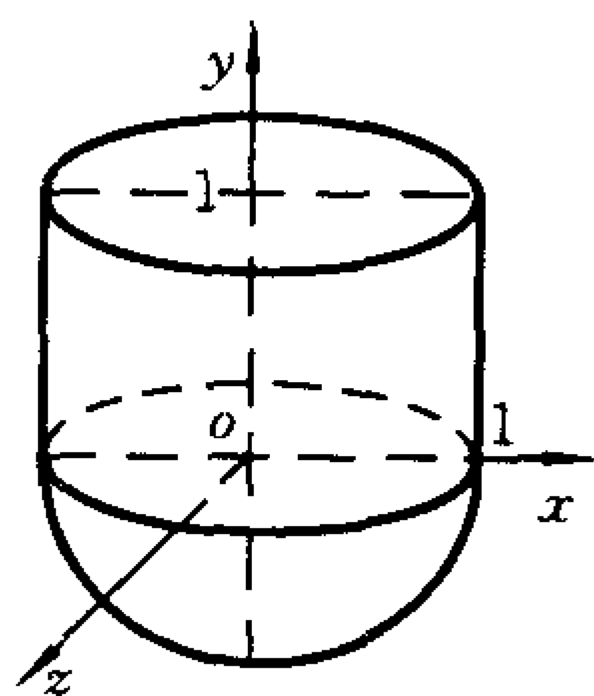


图 13.13

则

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-z^2-x^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}(x^2+z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\left[x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{45}.$$

(2) 如图 13.14 所示，V 表示为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant x,\\ 0\leqslant z\leqslant xy,\end{cases}$ 则

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}\mathrm{d}x=\frac{1}{364}.$$

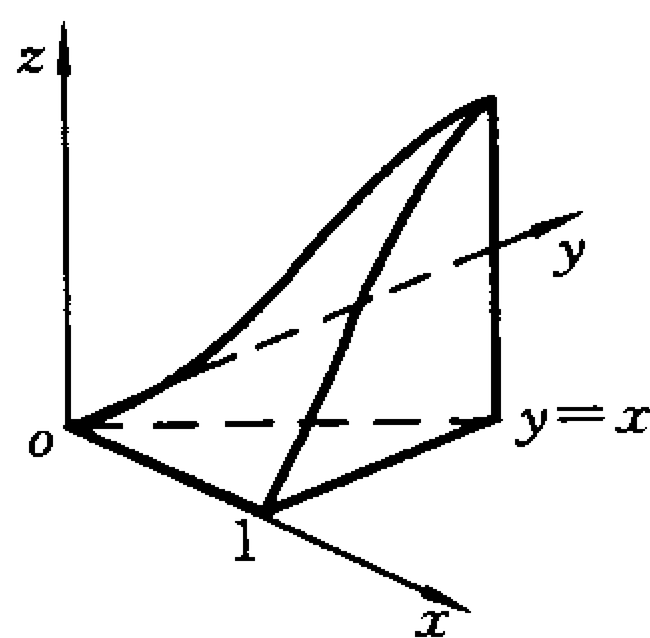


图 13.14

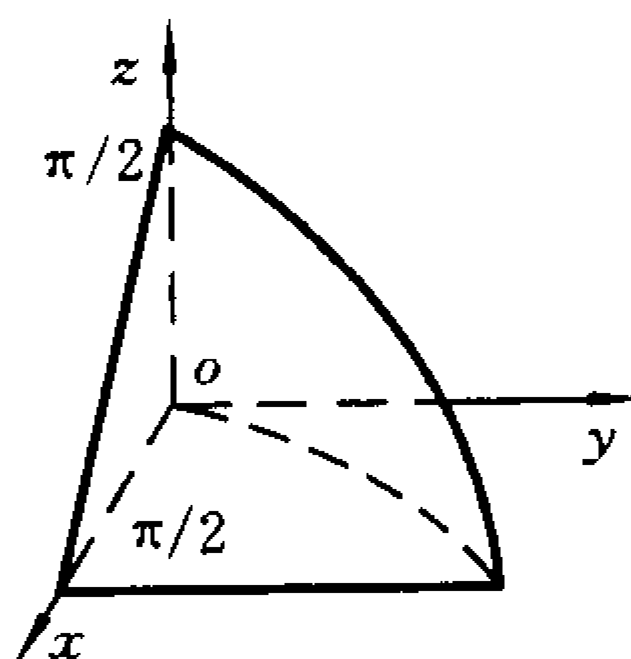


图 13.15

(3) 如图 13.15 所示，V 表示为$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant \pi/2,\\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{x},\\ 0\leqslant z\leqslant \pi/2-x,\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/2-x}y\cos(x+z)\mathrm{d}z\\&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\mathrm{d}y=\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,\frac{x}{2}\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}(-x\cos x+\sin x)\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(4) V 表示为$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{1-x^2},\\ 0\leqslant z\leqslant \sqrt{1-x^2-y^2},\end{cases}$ 则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}z\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y(1-x^2-y^2)\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

在以下例题中，除非必要，我们不再写出 V 的不等式组，请读者自己通过作草图得出.

例 2 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V \frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$z=1$，$z=2$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2=4$，$z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成.

解 (1) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\mathrm{d}r\int_1^2\frac{e^z}{r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2(e^2-e)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi(e^2-e)\cdot 2=4\pi(e^2-e).$$

(2) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1\frac{1}{1+r^2}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\frac{r}{1+r^2}(1-r)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{r-(1+r)^2+1}{1+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)-r+\arctan r\right]\Bigg|_0^1$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2}\ln 2-1+\frac{\pi}{4}\right]=\pi\left[\ln 2-2+\frac{\pi}{2}\right].$$

(3) V 是柱形区域，适合柱坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}r\mathrm{d}r\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}r\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)\mathrm{d}r=\frac{13}{4}\pi.$$

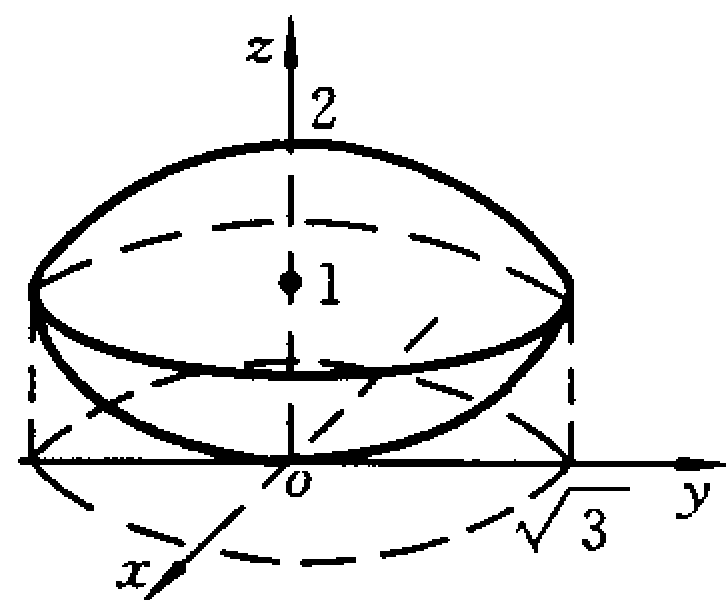


图 13.16

也可以用先重后单的累次积分计算，因为被积函数是一个变量 z 的函数，而投影区域又可表示为 z 的函数，故

$$I=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 3z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^2 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z(3\pi z)\mathrm{d}z+\int_1^2 z[\pi(4-z^2)]\mathrm{d}z$$

$$=3\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z+\pi\int_1^2(4z-z^3)\mathrm{d}z$$

$$=\pi+9\pi/4=13\pi/4.$$

例 3 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$，$z=0$ $(b>a>0)$ 所围成；

(2) $\iiint\limits_V z(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$，$1\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z^2=x^2+y^2$，$z^2=3x^2+y^2$，$z=1$ 所围成.

解 (1) V 是球形域，适合球坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_a^b r^2\sin^2\varphi\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\pi/2}\frac{b^5-a^5}{5}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\ (\text{瓦里士公式})$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^5-a^5}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}\pi(b^5-a^5).$$

(2) V 是部分球形域，适合球坐标系，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2\sin\varphi\, r\cos\varphi\, r^2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{63}{6}\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=21\pi\int_0^{\pi/4}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}(\sin\varphi)$$

$$=\frac{21}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{21}{16}\pi.$$

(3) V 表示 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\pi/6\leqslant\varphi\leqslant\pi/4,0\leqslant r\leqslant1/\cos\varphi$,故

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{1/\cos\theta}\left(r+\frac{1}{r^2}\right)r^2\mathrm{d}r\\
&=2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\frac{1}{4\cos^4\varphi}+\frac{1}{\cos^4\varphi}\right)\mathrm{d}(-\cos\varphi)\\
&=2\pi\left[\frac{1}{12}\cos^{-3}\varphi-\ln(\cos\theta)\right]\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}\\
&=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{27}-\ln\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

例 4 用不同顺序配置下列三重积分的积分限:

(1) $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 (1) 如图 13.17 所示,V 由 $x=0,y=0,z=0,x+y=1,x+y=z$ 所围成. 若先对 y 积分,则 $D_{xz}:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant z\leqslant1$,$V$ 可用平面 $z=x$ 分为 V_1 和 V_2. 故

$$
\begin{aligned}
I&=\iiint_{V_1}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{V_2}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^z\mathrm{d}z\int_0^{1-z}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_z^1\mathrm{d}z\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

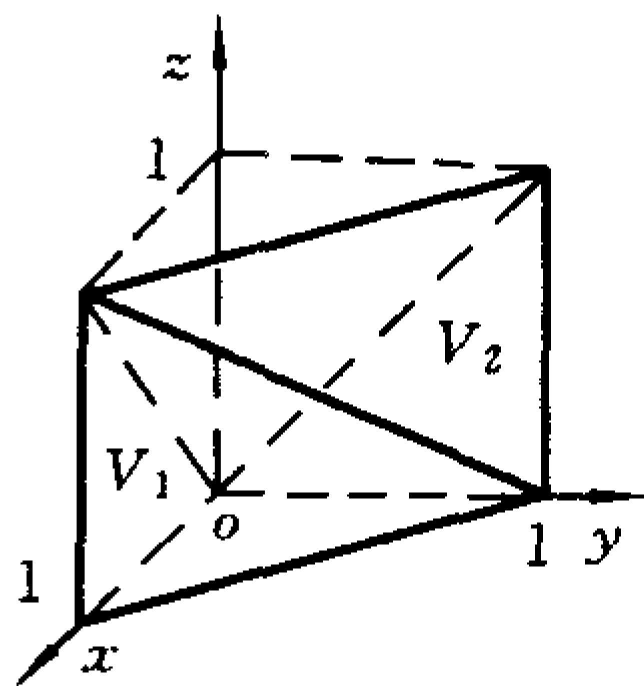


图 13.17

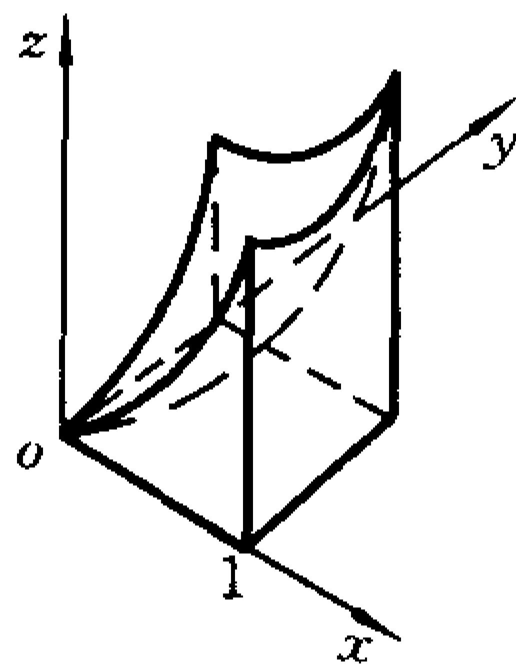


图 13.18

若先对 x 积分,则 $D_{yz}:0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant z\leqslant1$,用平面 $z=y$ 将 V 分为 V_1 与 V_2,故

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_z^1 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z \mathrm{d}y\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

(2) V 如图 13.18 所示，则

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\left[\int_0^{\sqrt{z}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{z}}^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]$$

$$+\int_1^2 \mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-1}}^1 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{z-y^2}} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\int_0^{x^2} \mathrm{d}z\int_0^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_{x^2}^{x^2+1} \mathrm{d}z\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}y\right]$$

例 5 选择坐标系计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$，$V:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,h>R$；

(2) $\iiint\limits_V \left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$ 所围成；

(3) $\iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在第一卦限的部分．

解 (1) 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$，则

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-R}^R \mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=\pi\int_{-R}^R \mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$=2\pi\int_{-R}^R\left[\sqrt{R^2+h^2-2zh}-(h-z)\right]\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{3h}(r^2+h^2-2hz)^{3/2}+\frac{1}{2}(h-z)^2\right]\Bigg|_{-R}^R=\frac{4\pi R^3}{3h}.$$

此题也可用球坐标系代换来求解．

(2) 如图 13.19 所示，球面将 V 分为 V_1 和 V_2，故用球坐标

系，得

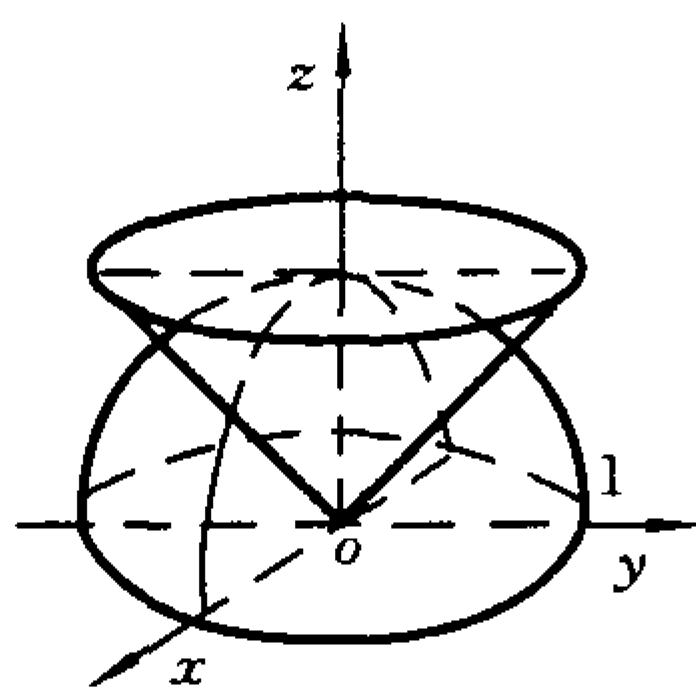


图 13.19

$$I=\iiint\limits_{V_1}(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iiint\limits_{V_2}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\left[\int_0^1(1-r)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\right.$$

$$\left.+\int_1^{1/\cos\theta}(r-1)r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=2\pi\left[\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cdot\frac{1}{12}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{4\cos^4\theta}-\frac{1}{3\cos^3\theta}\right)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\frac{\pi}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4}+2\pi\left(\frac{1}{12\cos^3\theta}-\frac{1}{6\cos^2\theta}\right)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$=\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1).$$

(3) 作广义球坐标代换：$x=ra\sin\varphi\cos\theta,y=rb\sin\varphi\sin\theta,z=rc\cos\varphi,|J|=abcr^2\sin\varphi$，故

$$I=8\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 abcr^2\sin\varphi\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$=4\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r$$

$$\xlongequal{r=\sin t}4\pi abc\int_0^{\pi/2}\sin^2 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\pi^2 abc.$$

例 6 计算三重积分 $\iiint\limits_V(x^3y-3xy^2+3xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由球面 $(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=1$ 所围成．

解 V 关于平面 $y=x$ 对称，故

$$\iiint\limits_V xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

于是 $$I=\iiint\limits_V[y(x-1)^3+(y-1)+1]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_V y(x-1)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V (y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由被积函数对积分区域的奇偶性，得

$$I=0+0+4\pi/3=4\pi/3.$$

例 7 用轮换对称性计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V (3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 由 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 及 $z\geqslant 0$ 所围成；

(2) $\iiint (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，考虑 V 为正方体，$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$；或 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

解 (1) 被积函数是关于 V_1：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 的偶函数，具有轮换对称性，于是

$$I=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V_1}(3x^2+5y^2+7z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{5}{2}\iiint\limits_{V_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{5}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=2\pi R^5.$$

(2) 利用轮换对称性化简被积函数，于是

$$I=\iiint\limits_V(3x^2+6xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(3x^2+6xy)\mathrm{d}y\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 3(x^2+x)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}.$$

当 V 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，还可利用奇偶性. 于是

$$I=3\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+6\iiint\limits_V xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=24\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin^3\varphi\cos\theta\mathrm{d}r+0$$

$$=24\cdot\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{5}\pi R^5.$$

例 8 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 与 $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ 的公共部分；

(2) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

解 由于被积函数是一个变量的函数，而平行该变量的平面与 V 的截面积又是该变量的函数，故三重积分可以化为“先重后单”的形式.

(1) 平面 $z=R/2$ 上、下截面积表示式不同，应分区域积分.

$$I=\int_0^{R/2} z^2\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2Rz-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{R/2}^{R} z^2\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{R/2} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{R/2}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\pi\left(\frac{R}{2}z^4-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{R/2}+\pi\left(\frac{R}{3}z^3-\frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_{R/2}^{R}=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

(2) 注意到 $\mathrm{e}^{|z|}$ 为 z 的偶函数，故

$$I=2\int_0^1 \mathrm{e}^z\mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 \mathrm{e}^z(1-z^2)\mathrm{d}z \xlongequal{\text{分部积分}} 2\pi.$$

例 9 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，证明：

$$\iiint\limits_V f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\mathrm{d}x,\ V: x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

证 被积函数是 x 一个变量的函数，平行 yoz 平面的截面积为 $\pi(1-x^2)$，故

$$\iiint\limits_V f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 1-x^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\pi\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)\mathrm{d}x.$$

例 10 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$f$ 为可微函数，证明：$F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right]$，$V$ 由 $0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t,0\leqslant z\leqslant t,t>0$ 所围成.

证 令 $x=ut,y=vt,z=wt$，则 $0\leqslant u,v,w\leqslant 1$，因此

$$F(t)=\iiint\limits_{V'} t^3f(uvwt^3)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

$$\begin{aligned}F'(t)&=\iiint\limits_{V'}[3t^2f(uvwt^3)+t^3f'(uvwt^3)\cdot 3t^2uvw]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{t}\iiint\limits_{V'}[t^3f(uvwt^3)+t^3tutvtwf'(uvwt^3)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_V xyzf'(xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right].\end{aligned}$$

例 11 设 $F(t)=\iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$f$ 连续，f' 存在，$f(0)=0,f'(0)=1,V:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$.

解 用球坐标计算 $F(t)$，得

$$F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r=4\pi\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r,$$

则
$$F'(t)=4\pi t^2f(t^2),\quad F(0)=0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}&\overset{\mathrm{L}'}{=\!=}\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{5t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{f(t^2)}{t^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{4\pi}{5}\cdot\frac{f(t^2)-0}{t^2}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=\frac{4}{5}\pi.\end{aligned}$$

例 12 设 $f(x)$ 有连续导数，$V:x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解 $\iiint\limits_V f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^t f(r) r^2 dr$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_0^t f(r) r^2 dr = 4\pi \int_0^t r^2 f(r) dr,$$

则
$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{4\pi}{\pi t^4} \int_0^t r^2 f(r) dr \xlongequal{L'} \lim \frac{4\pi t^2 f(t)}{4\pi t^3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \xlongequal{L'} f'(0).$$

当 $f(t) \neq 0$ 时，极限为 $+\infty$.

例 13 设 $f(x)$ 连续，V 由 $0 \leqslant z \leqslant h$ 和 $x^2 + y^2 \leqslant t^2$ 所围成，$F(t) = \iiint_V [f(x^2 + y^2) + z^2] dx dy dz$. 求 $\frac{dF}{dt}$ 和 $\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

解 $F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t r dr \int_0^h [f(r^2) + z^2] dz$

$$= 2\pi \int_0^t \left[\frac{h^3}{3} + f(r^2) h \right] r dr,$$

则
$$\frac{dF}{dt} = 2\pi \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) h \right] t = 2\pi h t \left[\frac{h^3}{3} + f(t^2) \right],$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(t)}{t^2} \xlongequal{L'} \lim_{t \to 0} \frac{2\pi h t [h^2/3 + f(t^2)]}{2t} = \pi h \left[\frac{h^2}{3} + f(0) \right].$$

例 14 求函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在 $V: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant x + y + z$ 的平均值 $\overline{f}(x,y,z)$.

解 $\overline{f}(x,y,z) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz.$

将 V 写成 $(x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + (z - 1/2)^2 \leqslant 3/4$，故 $V = \sqrt{3}\pi/2$.

作坐标变换：$x = 1/2 + r\sin\varphi\cos\theta$, $y = 1/2 + r\sin\varphi\cos\theta$, $z = 1/2 + r\cos\varphi$, $J = r^2 \sin\varphi$, 则 V_1 为 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{3}/2$，故

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$\cdot\int_0^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{3}{4}r^2+r(\sin\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\varphi)\right]r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{3}/2}\left[\frac{3}{4}r^2+r^2\right]r^2\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi.$$

于是

$$\overline{f}(x,y,z)=\frac{3\sqrt{3}}{5}\pi\Big/\frac{\sqrt{3}}{2}\pi=\frac{6}{5}.$$

第四节　重积分的应用

主要内容

1. $\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示区域 D 的面积.

2. $\iiint\limits_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 表示区域 V 的体积;若它是底为 D、曲顶为 $z=f(x,y)$ 的曲顶柱体,则 $V=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 设 D 为可求面积的平面有界区域,函数 f 在 D 上有连续偏导数,则曲面 $S:z=f(x,y),(x,y)\in D$ 的面积

$$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos(n,z)|}.$$

当 S 由 $x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$ 确定,且分别在 D 上有连续的一阶偏导数,$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$ 中至少有一个不等于零,则

$$\Delta S = \iint\limits_{D'} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

D' 是 D 经代换后的区域:$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$,$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$,$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$.

4. 密度为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体 V 的重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_V x\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V},\ \bar{y} = \frac{\iiint\limits_V y\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V},\ \bar{z} = \frac{\iiint\limits_V z\rho(x,y,z)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_V \rho(x,y,z)\mathrm{d}V}.$$

密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板 D 的重心公式

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\quad \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}.$$

5. 密度为 $\rho(x,y,z)$ 的空间物体 V 的转动惯量公式

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\quad J_y = \iiint\limits_V (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.\quad J_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

$$J_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V,\qquad J_{zx} = \iiint\limits_V y^2\rho(x,y,z)\mathrm{d}V.$$

密度为 $\rho(x,y)$ 的平面薄板 D 的转动惯量公式

$$J_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,\qquad J_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)\mathrm{d}v,$$

$$J_l = \iint\limits_D r^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}v.$$

设 l 为转动轴,则 $r(x,y)$ 为转动轴 l 到 D 的距离.

6. 密度为 $\mu(x,y,z)$ 的立体 V 到质量为 1 的质点 A 的引力公式

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{x-\xi}{r^2}\mu\mathrm{d}V,\quad F_y = k\iiint\limits_V \frac{y-\eta}{r^2}\mu\mathrm{d}V,$$

$$F_z = k\iiint\limits_V \frac{z-\zeta}{r^2}\mu\mathrm{d}V.\quad \boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}.$$

其中 k 为引力系数，(ξ,η,ζ) 为点 A 的坐标.

方法、技巧与典型例题分析

重积分的应用包括几何应用和物理应用.求解这类问题除了牢记必要的公式外，更重要的是应认真分析具体情况，了解问题的条件和可以利用的结果，讨论怎样求得需要的结果(包括坐标系的选取、积分微元的选取，可利用的计算手段和方法等).

一、重积分的几何应用

例 1 求下列曲线所围图形的面积：

(1) $xy=a^2, x+y=5a/2\quad (a>0)$;

(2) $(x^2+y^2)=2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2=a^2(x^2+y^2\geqslant a^2, a>0)$.

解 (1) 如图 13.20 所示，交点 $A\left(\frac{a}{2},2a\right)$，$B\left(2a,\frac{a}{2}\right)$. 故

$$\Delta S = \int_{a/2}^{2a}\mathrm{d}x\int_{a^2x}^{5a/2-x}\mathrm{d}y = \int_{a/2}^{2a}\left(\frac{5}{2}a - x - \frac{a^2}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= 15a^2/8 - 2a^2\ln 2.$$

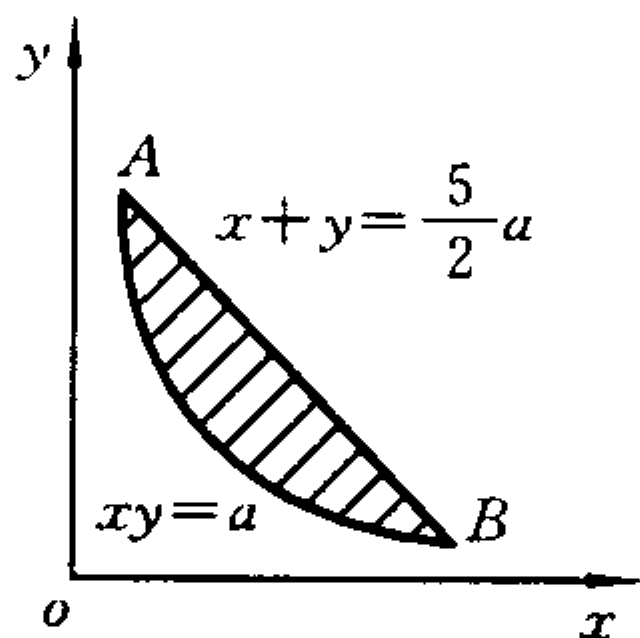


图 13.20

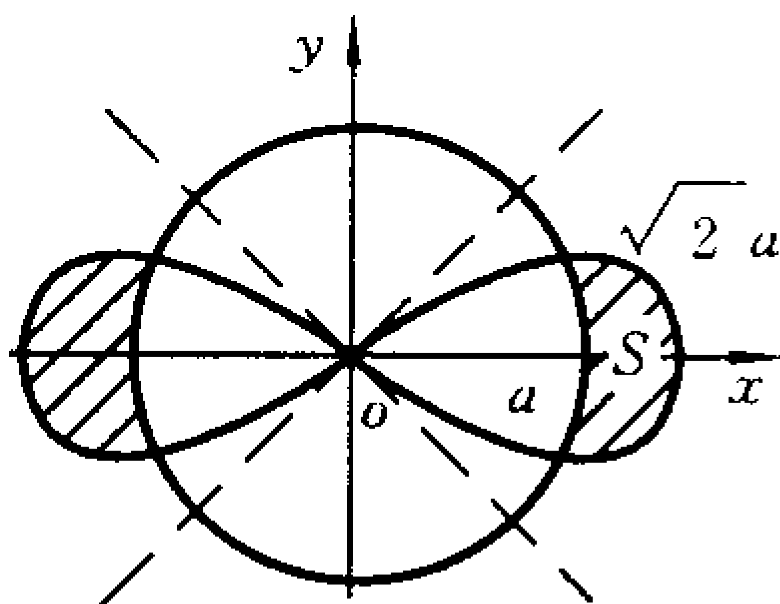


图 13.21

(2) 如图 13.21 所示，所求面积为阴影部分. 由对称性知，$S=$

$4S_1$. 故

$$\Delta S = 4\Delta S_1 = 4\int_0^{\pi/6} \mathrm{d}\theta \int_a^{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} r\mathrm{d}r$$

$$= 2\int_0^{\pi/6} (2a^2\cos 2\theta - a^2)\mathrm{d}\theta = a^2\left(\sqrt{3} - \pi/3\right).$$

例 2 进行适当变量代换,计算下列曲线所围成的面积:

(1) $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x$ $(0<a<b, 0<\alpha<\beta)$;

(2) $xy=a^2, xy=2a^2, y=x, y=2x$ $(x>0, y>0)$.

解 (1) 作代换 $x+y=u, y/x=v$,则 $a\leqslant u\leqslant b, \alpha\leqslant v\leqslant \beta$,且 $|J|=u/(1+v)^2$. 于是

$$\Delta S = \int_a^b u\mathrm{d}u \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(b^2-a^2)}{(1+\alpha)(1+\beta)}.$$

(2) 作代换 $xy=u, y/x=v$,则 $a^2\leqslant u\leqslant 2a^2, 1\leqslant u\leqslant 2$,且 $|J| = 1/(2v)$. 于是

$$\Delta S = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} \mathrm{d}u \int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{1}{2}a^2\ln 2.$$

例 3 计算下列立体体积:

(1) 圆柱 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+z^2\leqslant R^2$ 的公共部分;

(2) 曲面 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 的公共部分;

(3) 曲面 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ $(a>0)$所围成的立体;

(4) 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下的部分.

解 先作草图求出交线,确定投影区域,再配置积分限,进行积分. 可选择二重积分,也可选择三重积分.

(1) 如图 13.22 所示,$V=8V_1$, D_1: $0\leqslant x\leqslant R$, $0\leqslant y\leqslant \sqrt{R^2-x^2}$,于是

$$V = 8V_1 = 8\int_0^R \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$$

$$= 8\int_0^R (R^2-x^2)\mathrm{d}x = \frac{16}{3}R^3.$$

(2) $V: R-\sqrt{R^2-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-r^2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}/2R$(由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2=2Rz$ 消去 z,得 $x^2+y^2=3R^2/4\Rightarrow$投影域 $D_{xy}: 0\leqslant r\leqslant\sqrt{3}R/2$). 于是

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}R/2}r\mathrm{d}r\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}R/2}r(2\sqrt{R^2-r^2}-R)\mathrm{d}r=\frac{5}{12}\pi R^3.$$

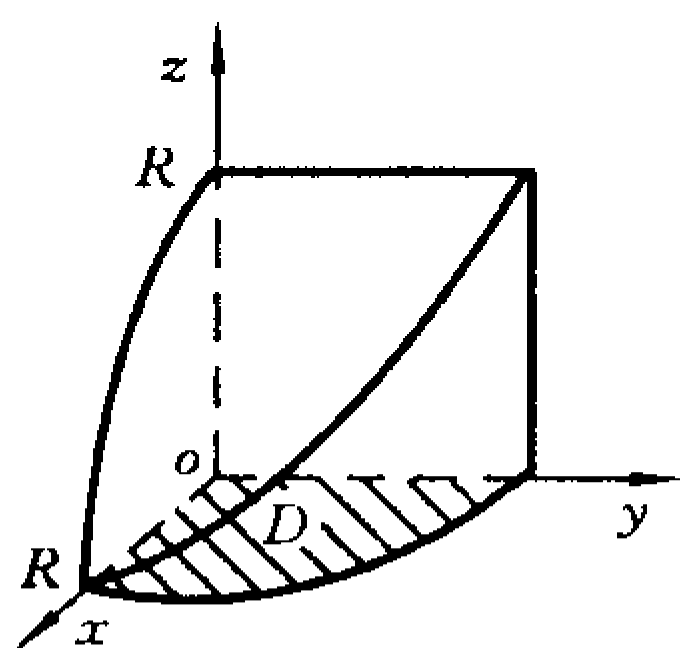


图 13.22

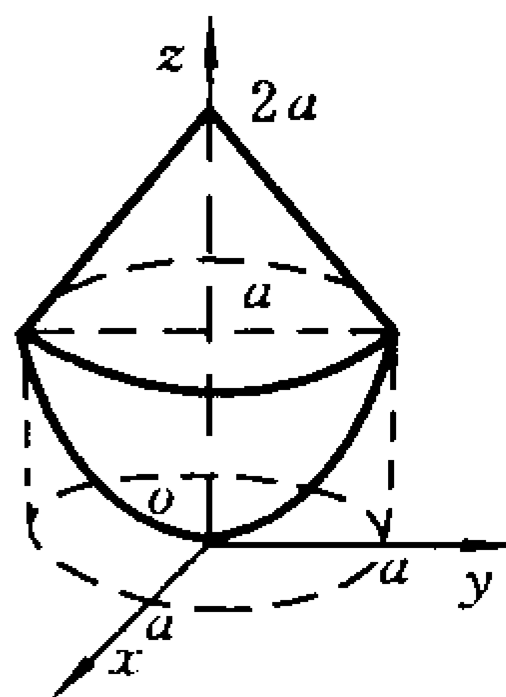


图 13.23

(3) 如图 13.23 所示,由 $x^2+y^2=az$ 与 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 z,得 $x^2+y^2=a^2\Rightarrow$投影域 $D_{xy}: 0\leqslant r\leqslant a$. 于是

$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{r^2/a}^{2a-r}\mathrm{d}z=2\pi\int_0^a r\left(2a-r-\frac{r^2}{a}\right)\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left(ar-\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4a}r^4\right)\Big|_0^a=\frac{5}{6}\pi a^3.$$

(4) V 关于 xoy 平面与 xoz 平面对称,故

$$V=4\iint_D\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例 4 求下列立体体积:

(1) 由 $z=xy, x+y+z=1, z=0$ 所围成;

(2) 由 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}, z=0$ 所围成;

(3) 由$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z}{c}=1, z=0$所围成.

解 用二重积分计算更简单些.

(1) 立体如图 13.24(a)所示,投影域如 13.24(b)所示. V 分为 $V_1: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{1+x}, z=xy$ 和 $V_2: 0\leqslant x\leqslant 1, \frac{1-x}{1+x}\leqslant y\leqslant 1-x, z=1-x-y$. 于是

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{(1-x)/(1+x)} y\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{(1-x)/(1+x)}^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y \\
&= (-11/4+4\ln 2)+(25/6-6\ln 2)=17/12-2\ln 2.
\end{aligned}
$$

(2) 立体在 xoy 面上投影域边界为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$,即

$$
\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{b}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.
$$

令$\frac{x}{a}=\frac{1}{2}+r\cos\theta, \frac{y}{b}=\frac{1}{2}+r\sin\theta$,

则 $z=c[1/2+r(\cos\theta+\sin\theta)+r^2]$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant r\leqslant 1/\sqrt{2}$;

$$
|J|=abr.
$$

于是 $$V=\iint_D c\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

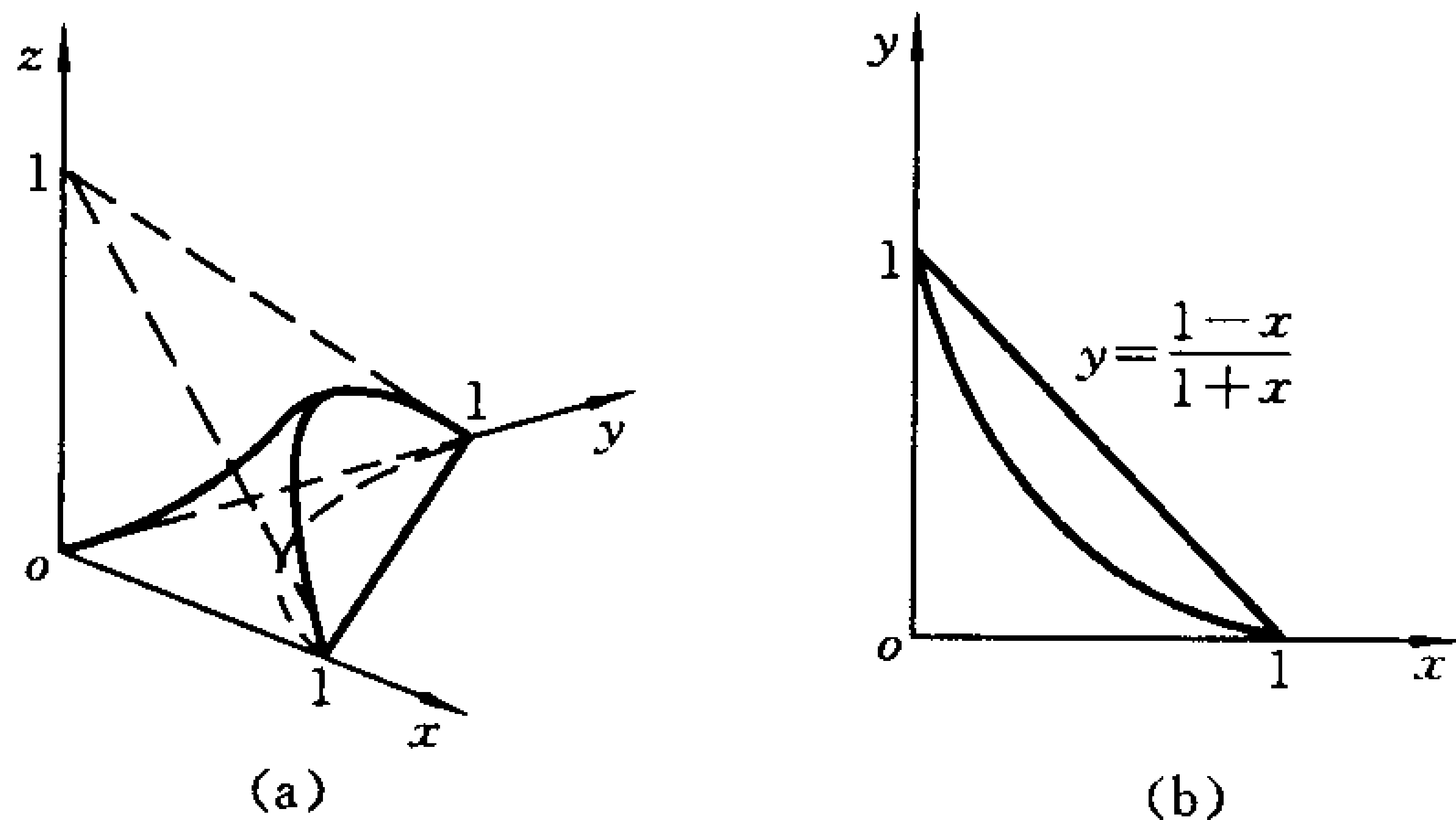


图 13.24

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1/\sqrt{2}} r\left[\frac{1}{2} + r(\cos\theta + \sin\theta) + r^2\right]\mathrm{d}r$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{16}\right]\mathrm{d}\theta$$

$$= abc \cdot \frac{6\pi}{16} = \frac{3}{8}\pi abc.$$

(3) 用广义极坐标 $x=ar\cos\theta, b=br\sin\theta$，则 $z=c(1-r^2)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant r\leqslant 1$；$|J|=abr$. 于是

$$V=\iint_D c\left[1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 abcr(1-r^4)\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi abc\int_0^1(r-r^5)\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\pi abc.$$

例 5 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 截下部分的曲面面积.

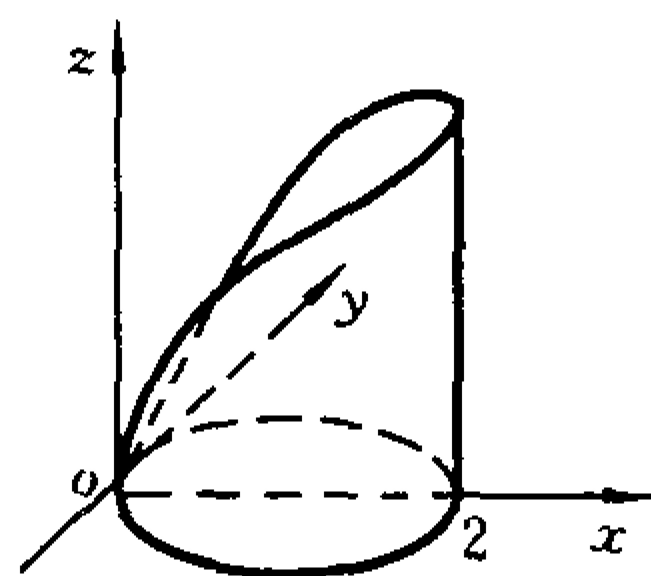


图 13.25

解 如图 13.25 所示，因为 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\sqrt{2}$，$D: x^2+y^2\leqslant 2x$，于是

$$S=\iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\mathrm{d}r$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}4\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\pi.$$

也可由 $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi$ 直接得到 $S=\sqrt{2}\pi$.

例 6 计算下列曲面的面积：

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b\leqslant a)$ 内的部分；

(2) 球面 $z=\sqrt{x^2-y^2}$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 内的部分.

解 （1） $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$D$：$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. 于是，由对称性得

$$S=2\cdot4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$=8a\int_0^a\left[\arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=8a^2\arcsin(b/a).$$

（2） $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$，$\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}=\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}$. D 为 $r^2\leqslant a^2\cos2\theta$. 于是，由对称性得

$$S=\iint_D\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\cos2\theta}}\sqrt{2}r\frac{r\cos\theta}{r\sqrt{\cos2\theta}}\mathrm{d}r$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}a^2\cos\theta\sqrt{\cos2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-2\sin^2\theta}\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin\theta)$$

$$=2a^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\sqrt{1-2\sin^2\theta}+\frac{1}{2}\arcsin(\sqrt{2}\sin\theta)\right]\Bigg|_0^{\pi/4}$$

$$=\pi a^2/2.$$

二、重积分的物理应用

物理应用的类型比较多，解题时要详细审题，明确条件和要求后再动手.

例 7 形如曲面 $x^2+y^2=z^2$ 的漏斗中装了深为 H 的液体，设漏斗中任一点 $M(x,y,z)$ 处液体密度为 $\dfrac{1}{a^2+x^2+y^2}$，$a>0$. 求漏斗中液体的质量 m.

解 V：$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$r\leqslant z\leqslant H$，$0\leqslant r\leqslant H$. 于是

$$m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^H r\mathrm{d}r\int_r^H \frac{\mathrm{d}z}{a^2+r^2}=2\pi\int_0^H \frac{Hr-r^2}{a^2+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^H \frac{Hr-(a^2+r^2)+a^2}{a^2+r^2}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{H}{2}\ln(a^2+r^2)-r+\arctan\frac{r}{a}\right]\Bigg|_0^H$$

$$=\pi[H\ln(a^2+H^2)-2H(1+\ln a)+2\arctan(H/a)].$$

例 8 设球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$ 的密度等于它到坐标原点的距离，求球体的质量 m.

解 积分域如图 13.26 所示，则

$$m=\iiint_V \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad (\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\pi\cdot 4\int_0^{\pi}\cos^4\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=4\pi\left(-\frac{1}{5}\cos^5\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{8}{5}\pi.$$

例 9 求下列曲线所围成的均匀薄板的质心坐标：

(1) $ay=x^2, x+y=2a$ $(a>0)$；

(2) $r=a\cos\theta, r=b\cos\theta$ $(0<a<b)$；

(3) $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi, a>0)$，$x$ 轴.

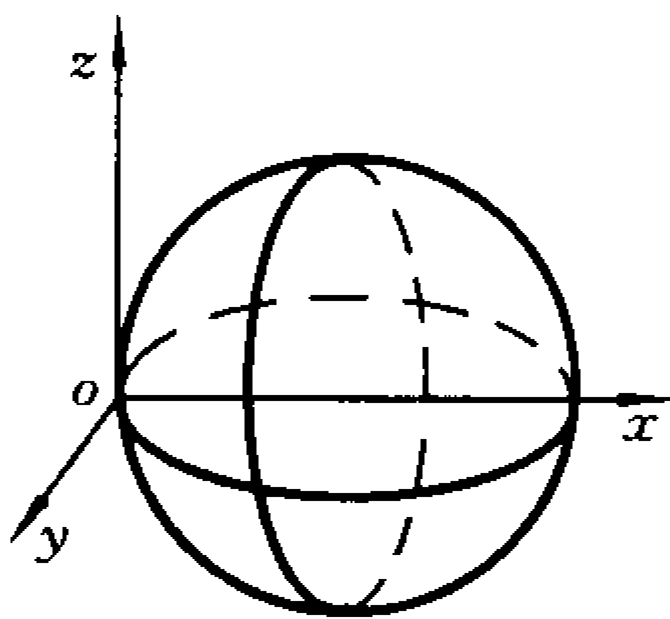


图 13.26

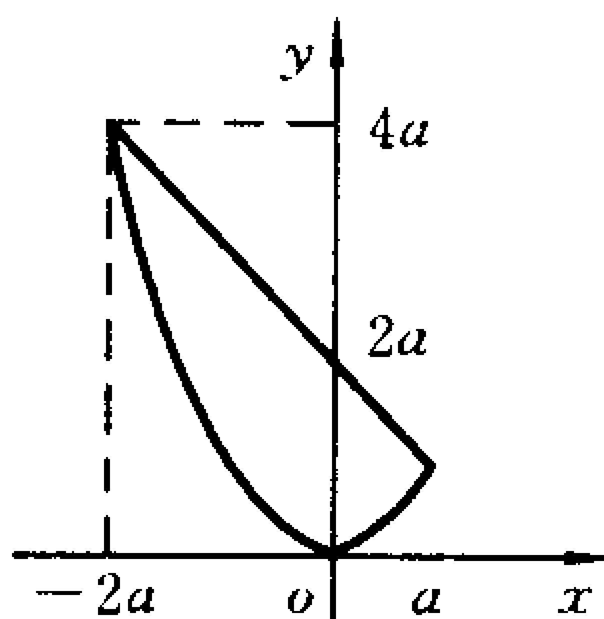


图 13.27

解 (1) 积分域如图 13.27 所示，设密度 $=\rho$，有

$$m=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\rho\left(2a-x-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x=\frac{9}{2}\rho a^2,$$

$$m_y=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho x\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\rho\left(2a-x-\frac{x^3}{a}\right)\mathrm{d}x=-\frac{9}{4}\rho a^3,$$

$$m_x=\int_{-2a}^{a}\mathrm{d}x\int_{x^2/a}^{2a-x}\rho y\mathrm{d}y=\int_{-2a}^{a}\frac{\rho}{2}\left[(2a-x)^2-\frac{x^4}{a^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{36}{5}\rho a^3.$$

故 $\bar{x}=\frac{m_y}{m}=-\frac{a}{2}$, $\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{8}{5}a$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(-\frac{a}{2},\frac{8}{5}a\right)$.

(2) 由对称性知,$\bar{y}=0$. 有

$$m=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho r\mathrm{d}r=\rho\int_0^{\pi/2}(b^2-a^2)\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi\rho}{4}(b^2-a^2),$$

$$m_y=2\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho r^2\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\rho\int_0^{\pi/2}(b^3-a^3)\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{3}\rho(b^3-a^3)\cdot\frac{3}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\rho}{8}(b^3-a^3).$$

故 $\bar{x}=\frac{m_y}{m}=\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)}$, $(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

(3) D 是摆线一拱与 x 轴所围成的图形:$0\leqslant x\leqslant 2\pi a$, $0\leqslant y\leqslant y$. 由对称性知,$\bar{x}=\pi a$.

$$m=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}\rho\mathrm{d}y=\rho\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=3\pi\rho a^2,$$

$$m_x=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y}\rho y^2\mathrm{d}y=\frac{\rho}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3a^3\mathrm{d}t=\frac{5}{2}\pi\rho a^3.$$

故 $$\bar{y}=\frac{m_x}{m}=\frac{5}{6}a,\quad(\bar{x},\bar{y})=\left(\pi a,\frac{5}{6}a\right).$$

注意 当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi a$ 时,$0\leqslant t\leqslant 2\pi$, x,y 均应用参数式表示.

例 10 求曲面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=2az$ $(a>0)$ 所围成的均匀立体的质心坐标.

解 V 由上半球面与旋转抛物面所围成,由区域对称性知,$\bar{x}=0$, $\bar{y}=0$,于是

$$m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}r\mathrm{d}r\int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}}\rho\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\rho\int_0^{\sqrt{2}a}\left[\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\right]r\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\rho\left[-\frac{1}{3}(3a^2 - r^2)^{3/2} - \frac{r^4}{8a}\right]\Big|_0^{\sqrt{2}a}$$

$$= 2\pi\rho\left(\sqrt{3} - 5/6\right)a^2,$$

$$m_{xy} = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}r\mathrm{d}r\int_{r^2/(2a)}^{\sqrt{3a^2-r^2}}\rho z\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\rho\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{2}\left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2}\right)r\mathrm{d}r = \frac{5}{3}\pi\rho a^4.$$

故 $\bar{z} = \dfrac{m_{xy}}{m} = \dfrac{5a}{6\sqrt{3} - 5}$， $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(0,0,\dfrac{5a}{6\sqrt{3} - 5}\right)$.

例 11 (1) 求 $y=x^2$ 与 $y=1$ 所围成的薄片对直线 $y=-1$ 的转动惯量；

(2) 求密度 $\rho=1$ 的由 $x^2+y^2+z^2=3(x+2y+3z)-10$ 所围成的均匀物体对直线 $l:2x+1=z,y=4$ 的转动惯量；

(3) 由 $y=\ln x,y=0,x=\mathrm{e}$ 所围成的均匀薄板绕直线 $x=l$ 旋转时转动惯量最小，求 l.

解 (1) 设想将 x 轴向上平移距离 1，于是

$$I_{y=-1} = \iint\limits_{(D)}\rho(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\rho\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y+1)^2\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\rho}{3}\int_{-1}^{1}[8 - (x^2+1)^3]\mathrm{d}x = \frac{368}{105}\rho.$$

(2) 曲面方程化为 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^3=4$，直线方程化为 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-4}{0}=\dfrac{z+1}{2}$. 可知，$l$ 过点 $(-1,4,-1)$，方向向量 $s=(1,0,2)$. 球心为 $(1,2,3)$，半径为 2. 球心到直线的距离 $d=\dfrac{|(2,-2,4)\times(1,0,2)|}{|(1,0,2)|}=2$，其中 $(2,-2,4)$ 表示点 $(-1,4,-1)$ 到球心 $(1,2,3)$ 的向量.

因为转动惯量仅与物体形状、大小、密度及物体与轴的相对位置有关，故设球体为

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leqslant 4,$$

l 为 x 轴或 y 轴，球体半径仍为 2，于是

$$I=I_x=I_y=\frac{1}{2}(I_x+I_y)=\frac{1}{2}\iiint_V(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}(1+\cos^2\varphi)r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$=\pi\int_0^{\pi/2}(1+\cos^2\varphi)\sin\varphi\int_0^{4\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1024}{5}\pi\int_0^{\pi/2}(\cos^5\varphi+\cos^7\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{896}{15}\pi.$$

(3) $$I(l)=\iint_D(x-l)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}(x-l)^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^{\mathrm{e}}(x-l)^2\ln x\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{分部积分}}\frac{1}{3}\Big[\ln x\cdot(x-l)^3-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2l-3xl^2-\ln x\cdot l^3\right)\Big]\Big|_1^{\mathrm{e}}$$

$$=l^2-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+1)l+\frac{2}{9}\mathrm{e}^3+\frac{1}{9}.$$

讨论极值，因为

$$I'(l)=2l-(\mathrm{e}^2+1)/2,$$

令 $I'(l)=0$，则 $$l=(\mathrm{e}^2+1)/4.$$

又 $I''(l)=2>0$，故 $l=(\mathrm{e}^2+1)/4$ 为极小值点.

例 12 求由 $y=1-x,y=1,x=1$ 所围成的、密度为 $\rho(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的薄板对位于坐标原点、质量为 m 的质点的引力.

解 这是一个平面引力问题.

$$F_x=mg\iint_D\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=mg\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-y}^1\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

$$= mg\int_0^1\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\right)\Big|_{1-y}^{1}\mathrm{d}y = -\pi mg/2.$$

由对称性知 $\quad F_y=-\pi mg/2.$

故 $$F=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}=-\frac{1}{2}\pi mg(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}).$$

例 13 求密度为 ρ 的均匀柱体：$x^2+y^2\leqslant R^2, 0\leqslant z\leqslant h$ 对位于点 $M_0(0,0,a)$ $(a>h)$的、单位质量质点的引力.

解 由柱体对称性知，$F_x=F_y=0$，而

$$F_z=\iiint_{\Pi}k\rho\frac{a-z}{[x^2+y^2+(a-z)^2]^{3/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ (k \text{ 为常数})$$

$$= k\rho\int_0^h(a-z)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(a-z)^2]^{3/2}}$$

$$= 2\pi k\rho\int_0^h(a-z)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\rho\int_0^h\left[1-\frac{a-z}{\sqrt{R^2+(a-z)^2}}\right]\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi k\rho[h+\sqrt{R^2+(a-h)^2}-\sqrt{R^2+a^2}].$$

例 14 形状为 $x^2+y^2\leqslant z^2\leqslant 1$ 的均匀物体放在水平的桌面上，当物体静止时，物体的轴线与桌面的夹角 θ 是多大？

解 图 13.28(a)表示物体处于不稳平衡状态；图 13.28(b)表示物体处于平衡状态，此时重心线通过桌面与物体切点，切线的法线过物体的重心.

先求重心坐标，由对称性知，$\bar{x}=\bar{y}=0$，而

$$m=\iiint_V\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$m_z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}.$$

故 $\bar{z}=2/3$，重心坐标$(0,0,2/3)$.

为简单计，在 yoz 平面上考虑角 θ. 设切点为$(0,y_0,z_0)$，物体边界线为 $z=y^2$，则过点(y_0,z_0)的切线斜率为 $2y_0$，法线斜率为

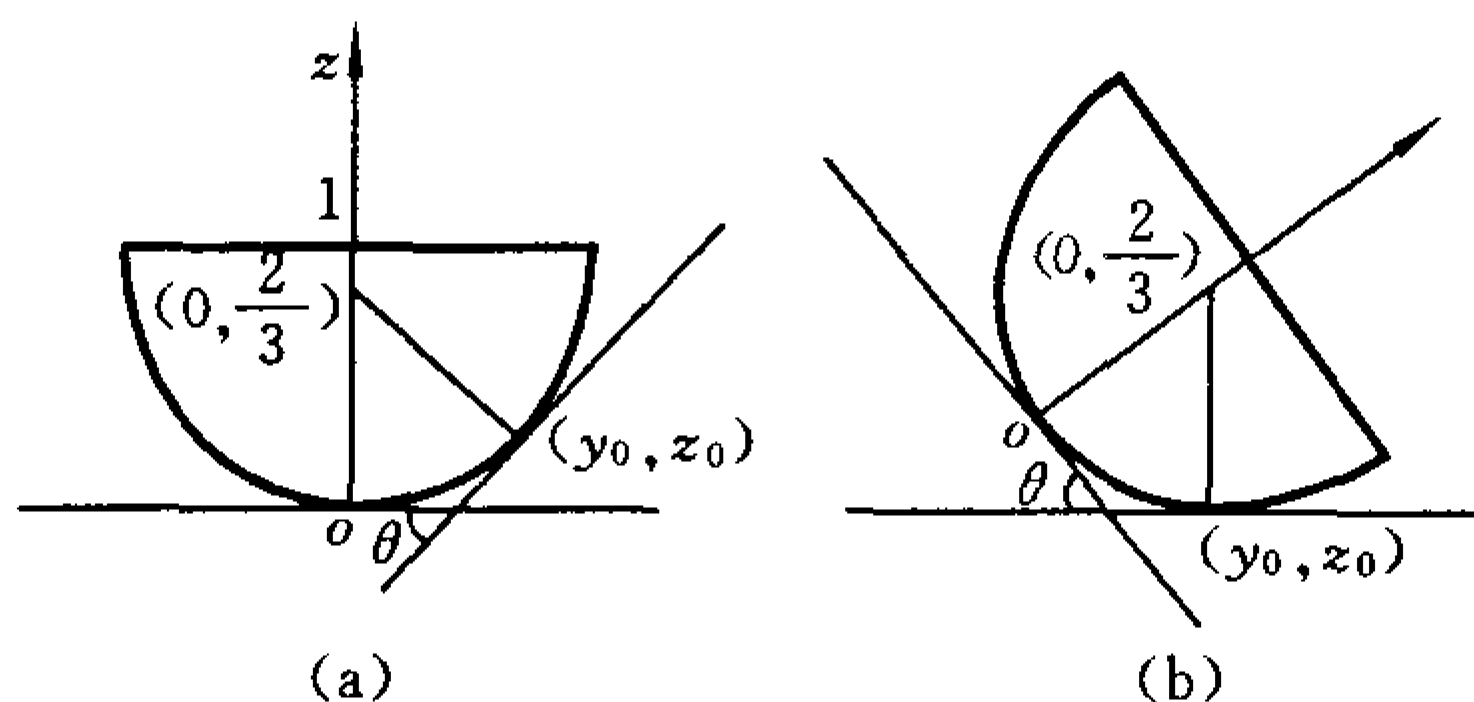


图 13.28

$-1/(2y_0)$. 法线方程为 $z-z_0=-(y-y_0)/(2y_0)$. 由于重心在法线上，将$(0,2/3)$代入，解得 $z_0=1/6, y_0=1/\sqrt{6}$. 所以

$$\tan\theta=\frac{2/3-z_0}{z_0}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \theta=\arctan\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 15 设一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化中，雪堆侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(长度单位厘米，时间单位小时). 已知体积减小的速率与侧面积成正比(比例系数 0.9)，问：高为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时？

解 以 V 记雪堆体积，S 记侧面积，则

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{h(t)}\frac{\pi}{2}[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t).$$

$$S=\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}}\sqrt{1+16(x^2+y^2)/h^2(t)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{h(t)/\sqrt{2}}[h^2(t)+16r^2]^{1/2}r\mathrm{d}r=\frac{13}{12}\pi h^2(t).$$

由题设知$\frac{dV}{dt}=-0.9S$,即

$$\frac{3}{4}\pi h^2(t)h'(t)=-\frac{9}{10}\cdot\frac{13}{12}\pi h^2(t),$$

得
$$h'(t)=-\frac{13}{10}\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+c.$$

由于$h(0)=130$,故$c=130\Rightarrow h(t)=-\frac{13}{10}t+130.$

令$h(t)\to 0$,得$t=100$(小时),即高130厘米的雪堆全部融化要100小时.

第五节 含参变量的非正常积分

主要内容

一、含参变量的非正常积分

1. 设函数f在无界区域

$$E=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y<+\infty\}$$

上,$\forall$ 固定的$x\in[a,b]$,非正常积分$\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$都收敛,则其值是x的函数,记作

$$I(x)=\int_c^{+\infty}f(x,y)dy,\quad x\in[a,b].$$

$I(x)$称为定义在$[a,b]$上的含参变量的非正常积分.

2. $\int_c^{+\infty}f(x,y)dy$与函数$I(x)\forall\ \varepsilon>0,\exists\ c<N\in\mathbf{R}$,使得当$M>N$时,$\forall\ x\in[a,b]$,都有

$$\left|\int_c^{M}f(x,y)dy-I(x)\right|<\varepsilon,\quad 即\quad \left|\int_M^{+\infty}f(x,y)dy\right|<\varepsilon,$$

则称非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 一致收敛于 $I(x)$.

3. 一致收敛的柯西准则　含参变量的非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛的充要条件是：$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ c < M \in \mathbf{R}$，使得当 $A_1, A_2 > M$ 时，对一切 $x \in [a,b]$，都有

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

4. 含参变量非正常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛的充要条件是：$\forall$ 递增数列$\{A_n\} \to +\infty$ $(A_1 = c)$，函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

在$[a,b]$上一致收敛.

5. 维尔斯特拉斯判别法(M 判别法)　设有函数 $g(y)$，使得

$$|f(x,y)| \leqslant g(y), a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y < +\infty.$$

若 $\int_c^{+\infty} g(y)\mathrm{d}y$ 收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛.

6. 连续性　设 f 在$[a,b]\times[c,+\infty]$上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛，则 $I(x)$ 在$[a,b]$上连续.

7. 可微性　设 f 和 f_x 在$[a,b]\times[c,+\infty]$上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上收敛，$\int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛，则 $I(x)$ 在$[a,b]$上可微，且

$$I'(x) = \int_c^{+\infty} f(x)(x,y)\mathrm{d}y.$$

8. 可积性　设 f 在$[a,b]\times[c,+\infty)$上连续，若 $I(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[a,b]$上一致收敛，则 $I(x)$ 在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续.

(1) 若 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何 $[c,d]$ 上一致收敛，则 $\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在任何 $[a,b]$ 上一致收敛；

(2) 设 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y$ 或 $\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$ 中有一个收敛，则

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

9. 设 f 在区域 $R=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$ 上有定义，对 x 的某些值，$y=d$ 是函数 f 的瑕点，则称 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 为含参变量非正常积分(无界函数).

10. 若 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>d-c\ (\delta>0)$，使得当 $0<\eta<\delta$ 时，$\forall\ x\in[a,b]$，都有 $\left|\int_{d-\eta}^d f(x,y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon$，则称含参变量非正常积分 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

对 $\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$，有类似以上第 3 ~ 8 条的条件与性质成立.

二、欧拉积分

1. Γ 函数　$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, s>0$，

B 函数　$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x, p>0,q>0.$

Γ 函数和 B 函数统称欧拉积分.

2. $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=I(s)+J(s)$. 其中 $I(s)$ 当 $0<s<1$ 时是收敛的无界函数非正常积分，$J(s)$ 当 $s>0$ 时是收敛的无穷限非正常积分.

(1) $\Gamma(s)$ 在定义域 $s>0$ 内连续且可导；

(2) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\Gamma(m+1)=n!,\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$；

(3) $\Gamma(s)$ 图形位于 s 轴上方，图形是凸的，在 $(1,2)$ 间有极小值点.

令 $x=y^2$，则 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}y^{2s-1}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\ (s>0)$.

令 $x=py$，则 $\Gamma(s)=p^s\int_0^{+\infty}y^{s-1}\mathrm{e}^{-sy}\mathrm{d}y\ (s>0,p>0)$.

3. $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x,p>0,q>0$ 在定义域内连续.

(1) 具有对称性，$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$；

(2) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p,q-1)\ (p>0,q>1)$；

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}\mathrm{B}(p-1,q-1)\quad (p>1,q>1);$$

(3) 令 $x=\cos^2\varphi$，则 $\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2q-1}\varphi\cos^{2p-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi$.

令 $x=\dfrac{1}{1+y}$，则 $\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\dfrac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y$.

4. $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p>0,q>0)$，当 $p+q=1$ 时，有余元公式

$$\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

疑难解析

1. 含参变量的非正常积分与一般非正常积分有何不同?

答 一般非正常积分收敛时是一个数量，而含参变量的非正常积分是参变量的函数. 因为是函数，所以它就存在在区域上收敛或一致收敛、连续、求导等问题；因为参变量的存在，所以还存在极限与积分交换顺序、求导与积分交换顺序以及二重积分交换顺序

等问题.解题时要认真对待,仔细考察.

方法、技巧与典型例题分析

利用定义、充要条件和魏尔斯特拉斯判别法确定含参变量非正常积分收敛与一致收敛时,最重要的是认真审验条件,指出什么情形下不符合条件,然后再进行判断.

例 1 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间内的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y,[\delta,+\infty),(\delta>0)$ 与$(0,+\infty)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\sin x\mathrm{d}x,\ (0<y_0\leqslant y<+\infty)$;

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ (-\infty<y<+\infty)$;

(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x,(-1,1)$.

解 (1) 作代换 $u=xy$,则

$$\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y=\int_{Ax}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\ (A>0),$$

由上册知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$收敛,故$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ M>0$,当$A'>M$时,有

$$\left|\int_{A'}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon.$$

取 $A\delta>M$,则当 $A>M/\delta$ 时,$\forall\ x\geqslant\delta>0$,有

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,$$

故$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛$(\delta>0)$.

又由$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$收敛,$\forall\ \varepsilon_0>0$与$M>0,\exists\ x>0$.使得

$$\left|\int_{M_x}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right|<\varepsilon_0,$$

即 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \varepsilon_0 < \int_{M_x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du < \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \varepsilon_0$,

令 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$,则由上式得

$$\int_M^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy = \int_{M_x}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du > 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 = \varepsilon_0.$$

故知$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{y} dy$ 在$(0, +\infty)$内不一致收敛.

(2) 因为当 $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$ 时,$|e^{-yx}\sin x| \leqslant e^{-y_0 x}$,而 $\int_0^{+\infty} e^{-y_0 x} dx = -1/y_0$ 收敛,所以依 M 判别法知,$\int_0^{+\infty} e^{-yx}\sin x dx$ 在 $(0 < y_0 \leqslant y < +\infty)$ 内一致收敛.

(3) 因为$\left|\frac{\cos(xy)}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$,而$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛,所以依 M 判别法知,$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2} dx$ 在$(-\infty < y < +\infty)$内一致收敛.

(4) 因为$\frac{\cos x^2}{x^p}$在 $x=0$ 无界,所以将积分写为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\cos x^2}{x^p} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = I_1 + I_2.$$

对于 I_1,因$\left|\frac{\cos x^2}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^{p_1}}$ $(0 < x \leqslant 1, p_0 \leqslant p \leqslant p_1)$,而 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p_1}}$ 收敛,故依 M 判别法知,$\int_0^1 \frac{\cos x^2}{x^p} dx$ 在$[p_0, p_1]$上一致收敛.

对于 I_2,因$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x^2}{x^p} dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt$,而

$$\left|\int_1^A \cos t dt\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2, \quad 1 \leqslant A \leqslant +\infty,$$

故一致有界,而$\frac{1}{t^{(p+1)/2}}$关于 t 单调减少,且关于 $p \in [p_0, p_1]$一致趋向于零. 依狄利克雷判别法知,$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{(p+1)/2}} dt$ 在$[p_0, p_1]$内一致收敛.

综上所述知，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 在$(-1,1)$内闭一致收敛.

例 2 讨论下列含参变量非正常积分在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x, 0\leqslant y\leqslant 1$；(2) $\int_1^{+\infty} x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, a\leqslant y\leqslant b$；

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x, 0\leqslant y\leqslant +\infty$.

解 (1) 设 $\varepsilon_0=1/3>0, \forall A>0, \exists A_0>A$ 和 $y_0=1/A_0\in[0,1]$，使得

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} y_0\mathrm{e}^{-y_0x}\mathrm{d}x\right| = \mathrm{e}^{-y_0A_0} = \mathrm{e}^{-1} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

所以$\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x$ 在$[0,1]$不一致收敛.

(2) 当 $a\leqslant y\leqslant b$ $(x>1)$ 时，$0<x^y\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^b\mathrm{e}^{-x}$，而

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot x^b\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^b+2}{\mathrm{e}^x} = 2,$$

故$\int_1^{+\infty} x^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛. 依 M 判别法知，$\int_1^{+\infty} x^y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 在$[a,b]$上一致收敛.

(3) 设 $\varepsilon_0 = 1/3 > 0, \forall A > 0, \exists A_0 > A$ 和 $y_0 = A_0 \in (0, +\infty)$，使得

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}\frac{y_0}{(x+y_0)^2}\mathrm{d}x\right| = \frac{y_0}{A_0+y_0} = \frac{A_0}{A_0+A_0} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

所以$\int_1^{+\infty}\frac{y}{(x+y)^2}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$不一致收敛.

例 3 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x^2}-\mathrm{e}^{-\beta x^2}}{x}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$；

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\mathrm{d}x$ $(\alpha>0,\beta>0)$.

解 此例用逐次积分法求解比较简单.

(1) 设 $\alpha > \beta$, $\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} = \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy$. 因为 $0 \leqslant x e^{-yx^2} \leqslant x e^{-\alpha x^2} (\alpha \leqslant y \leqslant \beta)$，而$\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ 收敛，故$\int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx$ 在 $y \in [\alpha, \beta]$ 上一致收敛，所以可以交换积分次序，即

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy = \int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2y} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

(2) 设 $\alpha < \beta$, $\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{2} = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy$. 因为 $0 \leqslant e^{-xy} \leqslant e^{-\alpha x}$，而$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ 收敛，故$\int_0^{+\infty} e^{-yx} dx$ 在 $y \in [\alpha, \beta]$ 上一致收敛，所以可以交换积分次序，即

$$I = \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy = \int_{a}^{b} dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

计算含参变量非正常积分，可用对参数的积分法、微分法和公式法进行，具体使用时要根据具体情况选择尽可能简单的方法. 但要注意，每一过程都要合理，方能避免出错.

例 4 证明付茹兰公式　设 $f(x)$ 为连续函数，且积分$\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何的 $A > 0$ 都有意义，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

证　$\forall A > 0$，有

$$I = \lim_{A \to 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$
$$= \lim_{A \to 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \lim_{A \to 0^+} \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx$$
$$\xlongequal{ax, bx = t} \lim_{Aa \to 0^+} \int_{Aa}^{+\infty} f(t) \frac{dt}{t} - \lim_{Ab \to 0^+} \int_{Ab}^{+\infty} f(t) \frac{dt}{t}$$

$$= \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}}\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}} f(\xi)\int_{Aa}^{Ab}\frac{\mathrm{d}t}{t}\ (Aa<\xi<Ab)$$

$$= \lim_{\substack{Aa\to 0^+\\ Ab\to 0^+}} f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

利用这个公式即可得出例 3(2)的结果,只需令 $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

例 5 利用付茹兰公式,计算:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x\ (a>0.b>0)$;

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x\ (a>0.b>0)$.

解 (1) 设 $f(x)=\cos x$,则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 连续,且 $\forall A>0$,$\int_A^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,依付茹兰公式,有

$$I=f(0)\ln\frac{b}{a}=\cos 0\cdot\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{b}{a}.$$

(2) 设 $f(x)=\pi/2-\arctan x$,则 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 连续,且 $\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x}\overset{\mathrm{L'}}{=\!=\!=}1$,故 $\forall A>0$,积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 收敛,依付茹兰公式,有

$$I=-f(0)\ln\frac{b}{a}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$$

注意 $f(ax)-f(bx)=\arctan bx-\arctan ax$.

例 6 计算 $I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t$.

解 记 $f(x)=\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt$,则 $f_x'=-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt$,且

$$|f_x(x,t)|\leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2},\ -\infty<x<+\infty,0\leqslant t\leqslant+\infty.$$

而$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 收敛,依 M 判别法知,$\int_0^{+\infty}f_x(x,t)\mathrm{d}t$ 关于 $x\in\mathbf{R}$ 一致收敛. 应用积分号下求导定理,得

$$I'(x)=-2\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty} - 2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t = -2xI(x),$$

即 $I'(x)/I(x) = -2x$. 积分得 $I(x) = c\mathrm{e}^{-x^2}$,由 $I(0) = \sqrt{\pi}/2$,得 $c = \sqrt{\pi}/2$,故

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2},\ -\infty < x < +\infty.$$

例 7 确定 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的连续范围.

解 $x = 0$ 可能为瑕点,将 $I(\alpha)$ 改写为

$$I(\alpha) = \int_0^1\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x = I_1(\alpha) + I_2(\alpha).$$

当 $x \to 0^+$ 时,$\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha-3}}$,故当 $\alpha < 4$ 时 $I_1(\alpha)$ 收敛;而当 $\alpha > 1$ 时,$I_2(\alpha)$ 收敛. 故 $I(\alpha)$ 定义域为$(1,4)$.

$\forall\ [a,b] \subset (1,4)$,当 $0 \leqslant x \leqslant 1, a \leqslant \alpha \leqslant b < 4$ 时,有

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^b},$$

且$\int_0^1\frac{\ln(1+x^3)}{x^b}\mathrm{d}x$ 收敛,依 M 判别法知,$I_1(\alpha)$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致收敛. 故 $I_1(\alpha)$ 在$[a,b]$上连续.

$\forall\ [a,b] \subset (1,4)$,当 $1 \leqslant x < +\infty, 1 \leqslant a \leqslant \alpha \leqslant b$ 时,有

$$\left|\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\right| = \frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha} \leqslant \frac{\ln(1+x^3)}{x^a},$$

且$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^a}\mathrm{d}x$ 收敛,依 M 判别法知,$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha \in [a,b]$ 一致收敛,故 $I_a(\alpha)$ 在$[a,b]$上连续.

综上所述知,$I(\alpha) = \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x^3)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$[a,b]$上连续.

例 8 证明:若$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$ 收敛,则$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0 \leqslant y \leqslant \beta$ 上一致收敛.

证 设 $F(x)=\int_x^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$，则当 $x\to+\infty$ 时，$F(x)\to 0$. 当 $x>X_0$ 时，有 $|F(x)|<\varepsilon$，故对 $X'>X>X_0$ 及一切 $y\geqslant 0$ 有

$$\left|\int_X^{X'}f(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right|=\left|F(x)\mathrm{e}^{-xy}-y\int_X^{X'}F(x)\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\varepsilon+\varepsilon+y\varepsilon\int_X^{X'}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x<3\varepsilon.$$

由柯西审敛准则知，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $0\leqslant y\leqslant\beta$ 上一致收敛.

例 9 利用 Γ 函数、B 函数计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$；

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解 要找准适当的代换，将积分化为 Γ 函数或 B 函数.

(1) $$I=\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{[\Gamma(3/2)]^2}{\Gamma(3)}=\frac{[\Gamma(1/2)/2]^2}{2!}=\frac{(\sqrt{\pi}/4)^2}{2}=\frac{\pi}{8}.$$

(2) $$I=a^4\int_0^a\left(\frac{x}{a}\right)^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\,\frac{x}{a}$$

$$=a^4\int_0^1 u^2(1-u^2)^{1/2}\mathrm{d}u=\frac{a^4}{2}\int_0^1 u(1-u^2)^{1/2}\mathrm{d}u^2$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{1/2}\mathrm{d}t=\frac{a^4}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{a^4}{2}\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi a^4}{16}.$$

(3) 设 $x^4=t$，则 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^{-1/4}}{1+t}\mathrm{d}t$，再令 $\frac{t}{1+t}=u$，得

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 u^{-1/4}(1-u)^{-3/4}\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/4)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(4) 设$\frac{x}{1+x}=t \Rightarrow x=\frac{t}{1-t}, \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^2}$,则

$$I=\int_0^1 t^{1/4}(1-t)^{-1/4}\mathrm{d}t=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma(5/4)\Gamma(3/4)}{\Gamma(2)}$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi/4)}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

例 10 证明瓦里士公式

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta\mathrm{d}\theta=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2m,\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1.\end{cases}$$

证 由主要内容二中的3(3)知

$$I_n=\frac{\Gamma[(n+1)/2]\Gamma(1/2)}{2\Gamma(n/2+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\Gamma(n/2+1)}.$$

当$n=2m$时,由递推公式得

$$I_{2m}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{(2m-1)!!/2^m\cdot\sqrt{\pi}}{m!}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2};$$

当$n=2m+1$时,由递推公式得

$$I_{2n+1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{m!}{(2m+1)!!/2^{m+1}\cdot\sqrt{\pi}}=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例 11 证明勒让德(Legendre)公式

$$\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s).$$

证 由于

$$\mathrm{B}(s,s)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{1/2}\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right]^{s-1}\mathrm{d}x,$$

作代换$1/2-x=\sqrt{t}/2$,得

$$\mathrm{B}(s,s)=\frac{1}{2^{2s-1}}\int_0^1(1-t)^{s-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^{2s-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},s\right).$$

由 Γ 函数与 B 函数关系式得

$$\mathrm{B}(s,s)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)}=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)}=\frac{1}{2^{2s-1}}\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(s)}{\Gamma(s+1/2)},$$

整理后即得所证结果.

例 12 计算 $\int_0^{\pi/2}\sin^6 x\cos^4 x\mathrm{d}x$.

解 设 $t=\sin x$，则 $I=\int_0^1 t^6(1-t^2)^{3/2}\mathrm{d}t$. 再作代换 $t=\sqrt{u}$，得

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{5/2}(1-u)^{3/2}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(7/2)\Gamma(5/2)}{\Gamma(6)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5!}\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{3\pi}{512}.$$

例 13 求下列积分的存在域：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{(1+x)^n}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi/2}\sin^m x\cos^n x\mathrm{d}x$.

解 (1) $I\xlongequal{\frac{x}{1+x}=t}\int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{m-m-1}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(m,n-m)$，故存在域为 $m>0,n-m>0$，即 $n>m>0$.

(2) $I\xlongequal{\sin x=t}\int_0^1 t^m(1-t^2)^{(n-1)/2}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal{t^2=m}\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}}(1-u)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),$$

故存在域为 $m>-1,n>-1$.

第十四章　曲线积分与曲面积分

第一节　第一型曲线积分与第一型曲面积分

主要内容

1. 设Ω是平面或空间的一个可度量的几何体,f定义在Ω上.对Ω作分割T,称$\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{d(\Omega_i)\}$为分割$T$的细度,$\forall\ P_i \in \Omega_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.若极限$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\Omega_i = J$,且$J$与分割$T$及点$P_i$取法无关,则称$f$在$\Omega$上可积,$J$为$f$在$\Omega$上的积分.记作$J = \int_\Omega f$.

若Ω为平面曲线或空间曲线L,则称J为f在L上的第一型曲线积分,记作$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$或$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$,其中$\mathrm{d}s$为曲线$L$的弧微分.

若Ω为空间曲面块S,则称J为f在S上的第一型曲面积分,记作$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}s$.

2. 第一型曲线积分与曲面积分的性质

(1) 若$f_i\ (i=1,2,\cdots,k)$在Ω上可积,c_i为常数,则

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} c_i f_k = \sum_{i=1}^{k} \left(c_i \int_\Omega f_i \right).$$

(2) 若 Ω 可划分为相连接的小 Ω_i ($i=1,2,\cdots,k$),则

$$\int_\Omega f = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} f.$$

(3) 若 f,g 在 Ω 上可积,且 $f(P) \leqslant g(P)$,则

$$\int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g.$$

(4) 若 f 和 $|f|$ 都在 Ω 上可积,则

$$\left| \int_\Omega f \right| \leqslant \int_\Omega |f|.$$

(5) 若 f 在 Ω 上可积,则存在 $c \in [\inf\limits_\Omega f(P), \sup\limits_\Omega f(P)]$ 使得

$$\int_\Omega f = c\Delta\Omega.$$

3. 设有定义在光滑曲线 L 上的连续函数 f,且

$$L: \begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t = [\alpha, \beta],$$

则 $$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

4. 设有定义在光滑面曲 S 上的连续函数 f,且

$$S: Z = Z(x,y), \quad (x,y) \in D,$$

则 $$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

疑 难 解 析

1. 为什么第一型曲线积分定义中的 ds 为曲线 L 的弧微分?

答 由积分和的概念,第一型曲线积分为

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\|T\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

由于 $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t$（$t_i$ 是分割 T 的分点所对应的参数值），由定积分中值定理

$$\Delta s_i = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\Delta t_i,$$

故弧长 Δs 的近似值就用弧微分表示为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

从而与第一型曲线积分计算公式一致.

方法、技巧与典型例题分析

在计算第一型曲线积分时要注意，当曲线以不同形式方程给出时，$\mathrm{d}s$ 的表示形式不同；同时要注意利用曲线的对称性、方程形式的转换和定积分的方法与技巧，注意第一型曲面积分与二重积分的不同、曲面定义域的求取以及 $\mathrm{d}s$ 的转化，注意二重积分方法与技巧的利用.

一、第一型曲线积分的计算与应用

由于弧长一定是正值，故化为定积分后上限一定要大于下限，$\mathrm{d}s$ 的计算一定要正确.

例 1 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L [(x+2)^2 + (y-3)^2]\mathrm{d}s$，$L$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与 $x + y + z = 0$ 的交线 $(a > 0)$；

(2) $\oint_L (2x^2 + 3y^2)\mathrm{d}s$，$L$ 为 $x^2 + y^2 = 2(x + y)$；

(3) $\oint_L xy\mathrm{d}s$，L 为 $x = a\cos t, y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$；

解 (1) 由曲线的对称性，得

$$\oint_L x^2\mathrm{d}s = \oint_L y^2\mathrm{d}s = \oint_L z^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$$

$$= \frac{1}{3}\oint_L a^2\mathrm{d}s = \frac{1}{3}a^2 \cdot 2\pi a = \frac{2}{3}\pi a^3,$$

$$\oint_L x\mathrm{d}s = \oint_L y\mathrm{d}s = \oint_L z\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (x+y+z)\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{3}\oint_L 0\mathrm{d}s = 0,$$

故
$$I = \oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s + \oint_L (4x-6y)\mathrm{d}s + 13\oint_L \mathrm{d}s$$
$$= 4\pi a^3/3 + 0 + 13\cdot 2\pi a = \pi a(4a^2/3+26).$$

(2) 令 $x=1+\sqrt{2}\cos t, y=1+\sqrt{2}\sin t\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$，于是

$$I = \int_0^{2\pi}[10+2\sqrt{2}(2\cos t+3\sin t)-\cos 2t]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{2\pi} 10\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 20\sqrt{2}\pi.$$

(3)

$$I = \int_0^{\pi/2} ab\cos t\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_0^{\pi/2}\sqrt{(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2}\,\mathrm{d}[(a^2-b^2)\sin^2 t]$$
$$= \frac{ab}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}[(a^2-b^2)\sin^2 t+b^2]^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

例 2 计算下列曲线积分：

(1) $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，$L$ 由曲线 $r=a, \theta=0, \theta=\frac{\pi}{4}$ 所围成；

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$，L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 的弧；

(3) $\int_L (x^{4/3}+y^{4/3})\mathrm{d}s$，$L$ 为内摆线 $x^{4/3}+y^{4/3}=a^{4/3}$ 的弧.

解 (1) L 由 $L_1: r=a, L_2: \theta=0, L_3: \theta=\pi/4$ 三组组成，可以求得 $\mathrm{d}s$ 分别为 $a\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}r, \mathrm{d}r$，于是

$$I = \int_0^{\pi/4} e^a\mathrm{d}\theta + \int_0^a e^r\mathrm{d}r + \int_0^a e^3\mathrm{d}r = 2(e^a-1)+\frac{1}{4}\pi a e^a.$$

(2) L 的极坐标方程为 $r^2=a^2\cos2\theta, \mathrm{d}s=\dfrac{a\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos2\theta}}$，由曲线的对称性，得

$$I = 4\int_0^{\pi/4} a\ \sqrt{\cos2\theta}\cdot\sin\theta\frac{a}{\sqrt{\cos2\theta}}\mathrm{d}\theta = 2a^2(2-\sqrt{2}).$$

(3) $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y_x'^2}\mathrm{d}x=(a/x)^{1/3}\mathrm{d}x$，由对称性，得

$$I= 4\int_0^a[x^{4/3}+(a^{2/3}-x^{2/3})^2](a/x)^{1/3}\mathrm{d}x$$

$$= 4a^{1/3}\int_0^a(2x+a^{4/3}x^{-1/3}-2a^{2/3}x^{1/3})\mathrm{d}x = 4a^{7/3}.$$

若令 $x=a\cos^3t, y=a\sin^3t$，则 $\mathrm{d}s=3a\cos t\sin t\mathrm{d}t$，得

$$I= 4\int_0^{\pi/2}a^{4/3}(\cos^4t+\sin^4t)3a\cos t\sin t\mathrm{d}t$$

$$= 24a^{7/3}\int_0^{\pi/2}\sin^5t\mathrm{d}\sin t = 4a^{7/3}.$$

例 3 求空间曲线 $x=a\arcsin\dfrac{x}{a}, z=\dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a-x}{a+x}$ 从 $o(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长.

解 $\mathrm{d}s=\dfrac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x$ ($|x_0|<a$). 当 $x_0>0$ 时，有

$$I = \int_0^{x_0}\frac{3a^2-2x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x = \frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0 = |z_0|+|x_0|;$$

当 $x_0<0$ 时，有

$$I = \int_{x_0}^0\frac{3a^2-3x^2}{2(a^2-x^2)}\mathrm{d}x = -\frac{a}{4}\ln\frac{a+x_0}{a-x_0}-x_0 = |z_0|+|x_0|.$$

故，只要 $|x_0|<a$，总有 $s=|z_0|+|x_0|$.

例 4 计算圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 界于 xoy 平面与曲面 $z=R+x^2/R$ 之间的一块面积($R>0$).

解 由第一型曲线积分的几何意义知，面积 S 等于被积函数为 $Z=R+x^2/R$，积分路线为 $x^2+y^2=R^2$ 的第一型曲线积分的值，

$$S= \int_L f(x,y)\mathrm{d}s = 4\int_0^{\pi/2}\left(R+\frac{R^2\cos^2\theta}{R}\right)R\mathrm{d}\theta$$

$$= 4R^2\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = 3\pi R^2.$$

例 5 计算球面上的三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2, x>0, y>0, z>0$ 的围线的质心坐标($\rho=1$).

解 由对称性知 $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}$. 围线长为 $s=3\left(\frac{1}{4}\cdot 2\pi a\right)=\frac{3}{2}\pi a$. 球面上三条曲边的球坐标方程为

$$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, z = 0,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi/2;$$

$$x = a\cos\varphi, y = 0, z = a\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2;$$

$$x = 0, y = a\cos\varphi, z = a\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2.$$

故 $$\bar{x}=\left[\int_0^{\pi/2}a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi/2}a\cos\varphi\cdot a\mathrm{d}\varphi\right]\Big/\left(\frac{3}{2}\pi a\right)$$

$$= 2a^2\Big/\left(\frac{3}{2}\pi a\right)=\frac{4a}{3\pi},$$

即,质心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$.

例 6 求螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=ht/(2\pi)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 一支对于坐标轴的转动惯量.

解 $\mathrm{d}s = \sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+h^2/(4\pi^2)}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t.$

$$I_x=\int_L(y^2+z^2)\mathrm{d}s+\int_0^{2\pi}\left(a^2\sin^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}+\frac{h^2}{8\pi^3}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2},$$

$$I_y=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+\frac{h^2t^2}{4\pi^2}\right)\frac{\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}}{2\pi}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}+\frac{h^2}{8\pi^3}\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}\cdot\frac{1}{3}(2\pi)^3$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2},$$

$$I_z = \int_L (x^2 + y^2) \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^2 \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} \mathrm{d}t = a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

二、第一型曲面积分的计算与应用

第一型曲面积分又称为对面积的曲面积分，是一个标量，因此不需要区分曲面的侧. 由于 $\mathrm{d}S$ 总是正值，所以化为二重积分时，积分上限应大于下限.

例 7 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 截得的部分；

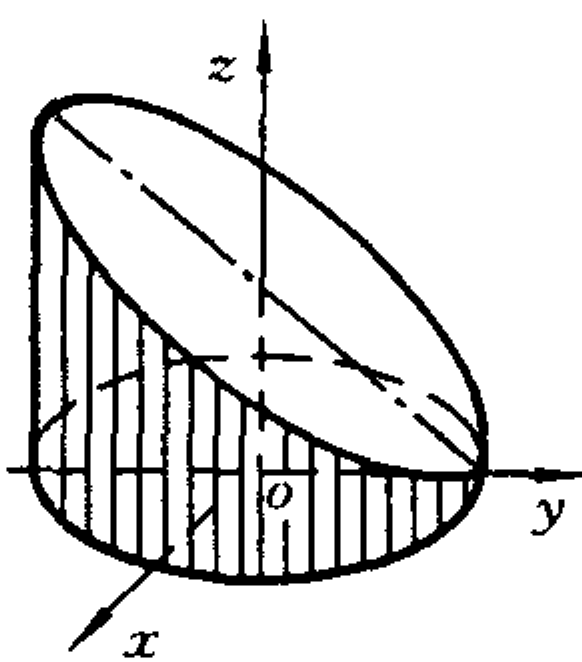


图 14.1

(2) $\iint\limits_S z^2 \mathrm{d}S$，$S$ 为锥面 $x = r\cos\theta\cos\varphi$，$y = \sin\theta\sin\varphi$，$z = r\cos\varphi$ $(0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 < \varphi < \pi/2)$ 的部分；

(3) $\iint\limits_S z\mathrm{d}S$，$S$ 为螺旋面 $x = u\cos v$，$y = u\sin v$，$z = v$ 的一部分，$0 \leqslant u \leqslant a$，$0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

解 (1) 如图 14.1 建立坐标系. 因为 $z=5-y$，所以 $\mathrm{d}S = \sqrt{1+(-1)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (x+y+5-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^5 \sqrt{2}(5+r\cos\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= 125\sqrt{2}\pi + 0 = 125\sqrt{2}\pi.$$

(2) 从 x,y,z 中消去 r 和 θ，得 $z^2\tan^2\varphi = x^2+y^2$，故 D_{xy} 为 $x^2+y^2 \leqslant R^2\sin^2\varphi$，$\mathrm{d}S = \frac{1}{\sin\varphi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sin\varphi} \frac{r^2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{r}{\sin\varphi}\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\frac{\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi}\int_0^{R\sin\varphi} r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}R^4\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

(3) 如图 14.2 建立坐标系. 因为 $E = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$，$F =$

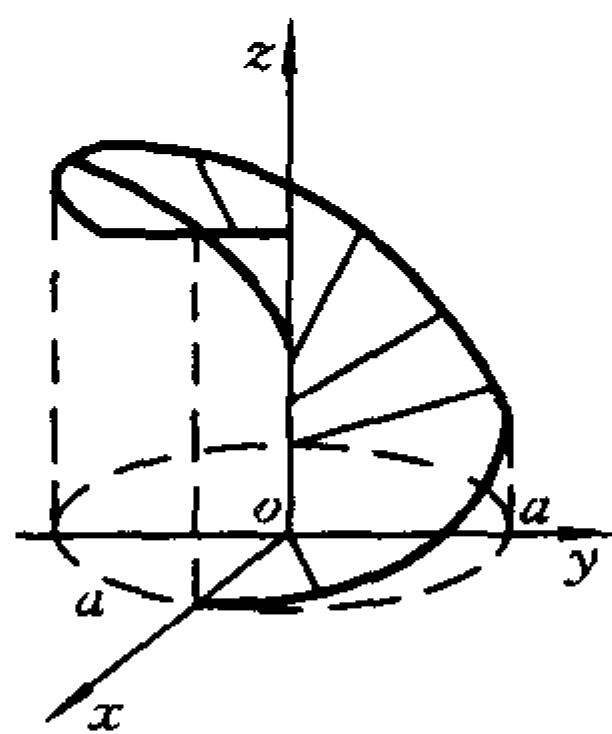


图 14.2

$-u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0$, $G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + 1 = 1 + u^2$，所以，$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{1+u^2}\,du\,dv$，于是

$$I = \iint_D v\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \int_0^{2\pi} v\,dv \int_0^a \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi^2\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2})\right]\Bigg|_0^a$$

$$= \pi^2\left[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})\right].$$

例 8 计算下列曲面积分：

(1) $F(t) = \iint_S f(x,y,z)\,dS$，$S$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$；当 $z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$ 时 $f(x,y,z) = x^2 + y^2$，当 $z < \sqrt{x^2+y^2}$ 时 $f(x,y,z) = 0$；

(2) $\iint_S (ax + by + cz + d^2)\,dS$，$S$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解 (1) 将 S 按 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 分为两部分，于是

$$F(t) = \iint_{S_1} (x^2 + y^2)\,dS + \iint_{S_2} 0\,dS.$$

其中 S_1 为 $x^2+y^2+z^2=t^2$，$z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$. 此时 $dS = t^2\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi$，$x^2 + y^2 = t^2\sin^2\varphi$，于是

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} t^2\sin^2\varphi \cdot t^2\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\pi t^4 \int_0^{\pi/4} (1 - \cos^2\varphi)\,d(-\cos\varphi) = \frac{1}{6}(8 - 5\sqrt{2})\pi t^4.$$

(2) 由对称性与奇偶性并利用轮换对称性，有

$$I = d^2 \iint_S dS + (a^2 + b^2 + c^2)\iint_S x^2\,dS$$

$$= d^2 \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$$

$$= d^2 \cdot 4\pi R^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2 \cdot 4\pi R^2$$

$$= 4\pi R^2\left[d^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)R^2\right].$$

例 9 求高为 $2h$、半径为 R、质量均匀的正圆柱对圆柱中心轴与中央横截面一条直径的转动惯量.

解 如图 14.3 建立坐标系，则 $\mathrm{d}S = \frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，于是，对圆柱中心轴的转动惯量即 I_z. 但也可以不用化为二重积分，得

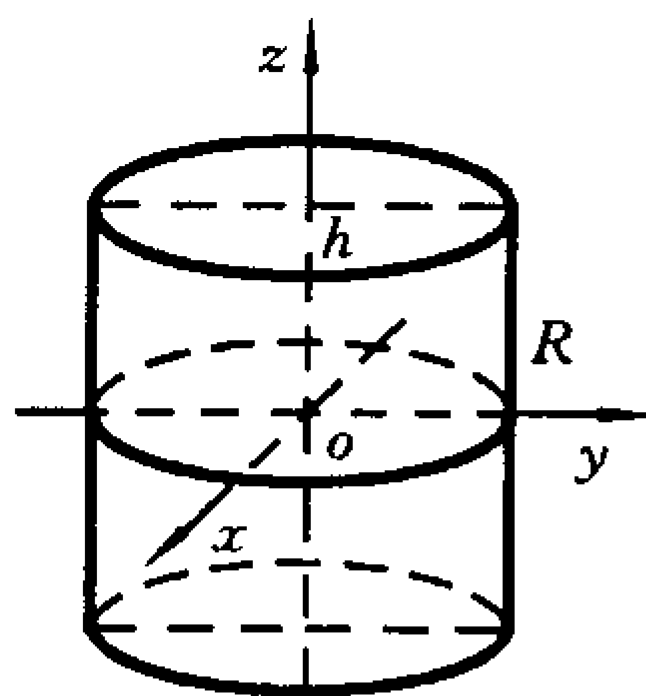


图 14.3

$$I_z = \rho\iint_S (x^2 + y^2)\mathrm{d}S = \rho R^2\iint_S \mathrm{d}S = 4\rho R^3 h\pi.$$

这里 S 是圆柱的侧面，故 $\iint_S \mathrm{d}S = 4\pi Rh$.

求对中央横截面一条直径的转动惯量，即求 I_x 或 I_y.

$$I_x = \iint_S \rho(y^2 + z^2)\mathrm{d}S = 2\rho\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_{-h}^{h}(y^2 + z^2)\frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}}\mathrm{d}z$$

$$= 4\rho hR\int_{-R}^{R}\frac{y^2\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{4}{3}\rho Rh^3\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

$$= 4\rho h \cdot \frac{\pi}{2}R^3 + \frac{4}{3}\pi\rho Rh^3 = 2\pi h\rho R\left(R^2 + \frac{2}{3}h^2\right).$$

例 10 设球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的密度等于点到 xoy 平面的距离，求球面被 $x^2+y^2=ax$ 截下部分曲面的重心.

解 由曲面对称性知，$\bar{y}=\bar{z}=0$. 球面上半部曲面为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，故 $\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；截得曲面在 xoy 面上投影为 $(x-a/2)^2+y^2=a^2/4$，故

$$M = 2\iint_{S_1}|z|\mathrm{d}S = 2\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2a\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\cdot\pi\frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{2}a^3.$$

这里 S_1 是截得曲面中位于上半球面的部分.

$$M_{yz} = \iint\limits_{S}|z|x\mathrm{d}S = 2\iint\limits_{S_1}xz\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2a\iint\limits_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r\cos\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}a^4\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}a^2.$$

故
$$\bar{z} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\pi a^2}{4}\Big/\frac{\pi a^3}{2} = \frac{1}{2a}.$$

第二节　第二型曲线积分

主要内容

1. 设 P,Q 为定义在光滑或按段光滑平面有向曲线 L 上的函数，$\forall T$，把 L 分成 n 个小弧段 $\overset{\frown}{M_{i-1}m_i}$. 这里 $M_{i-1}(x_{i-1},y_{i-1})$，$M_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,\cdots,n$. 记各弧段长为 ΔS_i，分割的细度为 $\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i\}$，$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$，$i=1,2,\cdots n$. (ξ_i,η_i) 为 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任一点. 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,n_i)\Delta x_i + \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,n_i)\Delta y_i$$

存在且与分割 T 及点 (ξ_i,n_i) 的取法无关，则称此极限为函数 P,Q

沿有向曲线 L 的第二型曲线积分,记作$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

若记 $\boldsymbol{F}(x,y)=(P(x,y)+Q(x,y))$,$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$,则有向量形式$\int_L \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

2. 设 $L:x=\varphi(t),y=\psi(t),t\in[\alpha,\beta]$为$[\alpha,\beta]$上光滑或按段光滑的平面曲线. P,Q 为 L 上的连续函数,则沿 L 从 $A(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 到 $B(\varphi(\beta),\psi(\beta))$的第二型曲线积分为

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_\alpha^\beta[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t.$$

疑难解析

1. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么不同?

答 第二型曲线积分又称为对坐标的曲线积分,它与曲线的方向有关. 因此,在化为定积分计算时,应该是下限对应于起点,上限对应于终点,而不论其大小;在分段求积时,要注意分点的衔接.

第二型曲线积分也可以化为定积分来计算,还可以利用原函数以及化为第一型曲线积分来计算. 例如,计算

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},\quad L\text{ 为 }x^2+y^2=a^2\text{ 逆向.}$$

若令 $x=a\cos t,y=a\sin t,0\leqslant t\leqslant 2\pi$,则

$$I=\frac{1}{a^2}\int_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2t+a^2\sin^2t)\mathrm{d}t=2\pi.$$

因为 $\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$,$\mathrm{d}\theta=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,所以

$$I=\int_L\mathrm{d}\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

若令 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},r=|\boldsymbol{r}|$,则

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_L \frac{x\cos(\tau,y) - y\cos(\tau,x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}S \\
&= \oint_L \frac{x\cos(n,x) - y\cos(n,y)}{x^2+y^2}\mathrm{d}S \\
&= \oint_L \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^2}\mathrm{d}S = \frac{1}{a}\int_L \mathrm{d}S = \frac{1}{a}2\pi a = 2\pi.
\end{aligned}
$$

在验证积分与路线无关后，可选择比较简单的路径计算. 在满足格林公式或斯托克斯公式条件时，可利用公式计算. 所以，第二型曲线积分要比第一型曲线积分复杂.

2. 第二型曲线积分与第一型曲线积分有什么联系？

答 两类曲线积分来自不同的物理原型，有不同的特性，但在规定了曲线方向后，两类曲线积分可以相互转化.

若 $L: x=x(s), y=y(s), 0\leqslant s\leqslant t$. $(t,x),(t,y)$ 分别表示切线方向 $\boldsymbol{t}$ 与 x 轴和 y 轴正向的夹角. $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 是曲线 L 上的连续函数，则

$$
\begin{aligned}
&\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_L [P(x,y)\cos(t,x) + Q(x,y)\cos(t,y)]\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲线积分时，要特别注意：(1)曲线的方向、起点与终点及分段点；(2)曲线是否经过或绕某个不连续点；(3)曲线是否封闭；(4)曲线是否满足格林公式条件；(5)曲线是否满足与路径无关条件. 进行定积分计算时应尽量利用已有方法、技巧与结果.

例 1 计算下列曲线积分：

(1) $\oint x^2 y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y$, L 沿 $y^3 = x^2$ 和 $y = x$ 所围成的封闭曲线正向；

(2) $\int_L (x^2 - 2xy)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$，$L$ 为抛物线 $y = x^2$ 上对应 x 从 -1 到 1 的一段；

(3) $\int_L x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + (x + y - 1)\mathrm{d}z$，$L$ 为由点(1,1,1)到点(1,3,4)的直线段.

解 本例可用定积分计算.

(1) $L=L_1+L_2$，L_1 为 $y^3=x^2$，x 从 1 到 0；L_2 为 $y=x$，x 从 0 到 1. 于是

$$\int_{L_1} x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = \int_1^0 x^2 \cdot x^{2/3}\mathrm{d}x + \int_1^0 y^3\mathrm{d}y = -\frac{23}{44},$$

$$\int_{L_2} x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 \cdot x\mathrm{d}x + \int_0^1 y^3\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

故
$$\oint_L x^2y\mathrm{d}x + y^3\mathrm{d}y = -\frac{1}{44}.$$

(2)
$$I = \int_{-1}^1 (x^2 - 2x \cdot x^2)\mathrm{d}x + (x^4 - 2x \cdot x^2)2x\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 (x^2 - 4x^4)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (x^2 - 4x^4)\mathrm{d}x = -\frac{14}{15}.$$

(3) 直线的参数方程为：$x = 1, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，于是

$$I = \int_0^1 [1 + (1 + 2t) \cdot 2 + 3(1 + 2t)]\mathrm{d}t = \int_0^1 (5 + 10t)\mathrm{d}t = 10.$$

例 2 计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$，$L$ 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y = \sqrt{3}x$，从 x 轴正向看时圆周沿逆向绕行；

(2) $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{[(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2]^n}$ $(\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$，$L$ 为椭圆 $(\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x + \delta y)^2 = 1$ 的逆时针方向.

解 选择好参数方程是解题的关键.

(1) 将 $x^2+y^2+z^2=1$ 表示为 $r=1$，$y=\sqrt{3}x$ 表示为 $\theta=$

$\pi/3$，则 L 为 $x=\frac{1}{2}\sin\theta, y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, z=\cos\theta$，$\theta$ 从 $2\pi\to 0$，于是

$$I=\int_{2\pi}^{0}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\right.$$

$$+\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)(-\sin\theta)\right]d\theta$$

$$=\int_{2\pi}^{0}\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)d\theta=(1-\sqrt{3})\pi.$$

(2) L 的参数方程为 $\alpha x+\beta y=\cos t, \gamma x+\delta y=\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则 $x=\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t), y=\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)$，于是

$$I=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t)d\left[\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)\right]$$

$$-\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\alpha\sin t-\gamma\cos t)d\left[\frac{1}{\alpha\delta-\gamma\beta}(\delta\cos t-\beta\sin t)\right].$$

由 $(0,2\pi)$ 内三角函数系的正交性，可得

$$I=\frac{1}{(\alpha\delta-\gamma\beta)^2}\int_{0}^{2\pi}(\alpha\delta-\gamma\beta)dt=\frac{2\pi}{\alpha\delta-\gamma\beta}.$$

例 3 证明：曲线积分有估计式

$$\left|\int_{L}Pdx+Qdy\right|\leqslant LM,$$

其中 L 为积分路径长度，$M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$（在 L 上）.

证 由两类曲线积分的联系，有

$$\left|\int_{L}Pdx+Qdy\right|=\left|\int_{L}(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)ds\right|$$

$$\leqslant\int_{L}|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|ds.$$

而 $(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2=P^2\cos^2\alpha+Q^2\sin^2\alpha+PQ2\sin\alpha\cos\alpha$,

$0\leqslant(P\sin\alpha-Q\cos\alpha)^2=P^2\sin^2\alpha+Q^2\cos^2\alpha-PQ2\sin\alpha\cos\alpha$,

则$(P\cos\alpha+Q\sin\alpha)^2\leqslant P^2+Q^2$,从而

$$|P\cos\alpha+Q\sin\alpha|\leqslant\sqrt{P^2+Q^2}\leqslant M.$$

于是
$$\left|\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\right|\leqslant M\int_L\mathrm{d}s=LM.$$

例 4 若$f(u)$为连续函数,L为按段光滑的封闭曲线,证明:

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0.$$

证 令$F(x,y)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x^2+y^2}f(u)\mathrm{d}u$,由$f(u)$的连续性有,$F_x'(x,y)=xf(x^2+y^2)$,$F_y'(x,y)=yf(x^2+y^2)$.显然$F_x'$和$F_y'$是连续函数,故$F(x,y)$可微,且有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F(x,y)&=xf(x^2+y^2)\mathrm{d}x+yf(x^2+y^2)\mathrm{d}y\\&=f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

于是,$\forall\ (x_0,y_0)\in L$,由于L是封闭的,所以

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=F(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y_0)}=0.$$

例 5 方向为纵轴的负向、大小等于作用点的横坐标平方的力构成一力场.求质量为m的点沿曲线$1-x=y^2$从点$(1,0)$移到点$(0,1)$所做的功.

解 因为$\boldsymbol{F}=0\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}$,所以

$$W=\int_L 0\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=-\int_L x^2\mathrm{d}y=-\int_0^1(1-y^2)^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{15}.$$

即场力做负功,大小为8/15.

例 6 已知力场$\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$,问将质点从原点沿直线移到曲线$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的第一卦限部分上哪一点做的功最大,并求最大功.

解 $\forall\ P_0(x_0,y_0,z_0)\in\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,直线方程$L$为$x=x_0t$,$y=y_0t$,$z=z_0t$,$t$从0变到1,则

$$W=\int_L yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=3x_0y_0z_0\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=x_0y_0z_0.$$

由 P_0 的任意性知，$W=xyz$.

最大功为 $W=xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值，据第十一章第二节例 14 结果知，最大值点

$$(x,y,z)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right),$$

故最大功 $W_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

例 7 说明对第二型曲线积分，"积分中值定理"不再成立.

答 如果有积分中值定理，应该是这样的：若 $f(P)$ 在 L 上连续，则存在点 $P^*\in L$，使得

$$\int_{L^+}f(P)\mathrm{d}x=f(P^*)\int_{L^+}\mathrm{d}x.$$

设 L 为圆周，由对称性知 $\int_{L^+}\mathrm{d}x=0$，故上式右边对一切 f 都等于零. 但是，当 $f(P)=f(x,y)=y$，L^+ 为 $x^2+y^2=2y$ 时（逆时针向），有

$$\int_{L^+}f(P)\mathrm{d}x=\int_{L^+}y\mathrm{d}x=-\pi\neq 0.$$

推出矛盾，故积分中值定理不成立.

第三节 格林公式 曲线积分与路径的无关性

主要内容

1. 若函数 P,Q 在闭区域 $D=\mathbf{R}^2$ 上连续，且有一阶连续偏导数，则有格林(Green)公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

成立,其中 L 为区域 D 的边界曲线,取正方向.

2. 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 是单连通闭区域. 若函数 P,Q 在 D 内连续,且有一阶连续偏导数,则以下四个命题等价:

(1) $\forall$ 光滑闭曲线 $L \in D$, $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$;

(2) $\forall$ 光滑曲线 $L \in D$, $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分路线无关,只与 L 的起点和终点有关;

(3) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 必为 D 内某函数 $u(x,y)$ 的全微分,且 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$;

(4) 在 D 内每一点,有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

疑 难 解 析

1. 格林公式有什么意义? 它应用在哪些方面?

答 格林公式给出了有限条按段光滑的封闭曲线上的曲线积分与它们所包围的区域上的二重积分的关系. 当区域 D 为单连通域时, L 正向即逆时针方向; 当 D 为多连通域时, D 的外边界为逆时针方向,内边界为顺时针方向. P,Q 要求在区域 D 内直到边界 L 上连续,且有连续的偏导数.

利用格林公式可以将封闭曲线上的线积分化为区域上的二重积分来计算; 对开口曲线上的线积分可以补上一段曲线后变成封闭曲线,再应用格林公式.

格林公式的一个简单应用就是求面积,即

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

格林公式在力学中还有许多应用.

2. 怎样求 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\mathrm{d}u$ 的函数 $u(x,y)$?

答 常用折线法、偏积分法和凑微分法.

(1) 折线法. 由 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,得

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或
$$=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 偏积分法. 因为 $P(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$Q(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}$,故

$$u(x,y)=\int_0^x\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+g(y)=\int_0^x x_0P(x,y)\mathrm{d}x+g(y)$$

或
$$\int_0^y\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+h(x)=\int_0^yQ(x,y)\mathrm{d}y+h(x).$$

再求出$\dfrac{\partial u}{\partial y}$与 $Q(x,y)$比较,确定 $g(y)$,得出 $u(x,y)$.

(3) 将 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}x$ 通过拆项、拼项凑出全微分 $\mathrm{d}u$,需要一定的技巧.

方法、技巧与典型例题分析

利用格林公式,首先要验证是否满足定理条件,满足条件才可化为二重积分来计算. 当需要添加曲线段时,要尽量使添加的曲线段上的线积分简单,更不要忘了最后减去添加部分.

例 1 计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L(yx^3+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x+(xy^3+x\mathrm{e}^y-2y)\mathrm{d}y$,$L$ 为 $x^2+y^2=a^2$ 正向;

(2) $\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^y\cos y-m)\mathrm{d}y$,$L$ 为 $A(a,0)\to o(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$;

(3) $\oint_L (-2x^3y)\mathrm{d}x + x^2y^2\mathrm{d}y$，$L$ 为 $x^2+y^2 \geqslant 1$ 与 $x^2+y^2 \leqslant 2y$ 所围区域边界正向.

解 本例可利用格林公式求解.

(1) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = y^3 - x^3$，所以

$$I = \iint_D (y^3 - x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r(r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{a^5}{5}\int_0^{2\pi}(\sin^3\theta - \cos^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{a^5}{5}\left[\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - 1)\mathrm{d}\cos\theta - \int_0^{2\pi}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta\right] = 0.$$

(2) 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = m$，添加直线段 oA $(y=0, 0 \leqslant x \leqslant a)$ 构成封闭曲线，取正向，所以 $\int_L = \oint_{L_1} - \int_{oA}$，而 $\int_{oA} = \int_0^a 0\mathrm{d}x + 0 = 0$. 于是

$$I = \oint_{L_1} - 0 = \iint_D m\mathrm{d}x\mathrm{d}y = m\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = m \cdot \frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{8}\pi m a^2.$$

(3) 如图 14.4 建立坐标系. 因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy^3 + 2x^3$，所以

$$I = \iint_D (2xy^2 + 2x^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D 2x(y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于被积函数是 x 的奇函数，而积分域关于 y 轴对称. 故

$$I = \iint_D 2x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

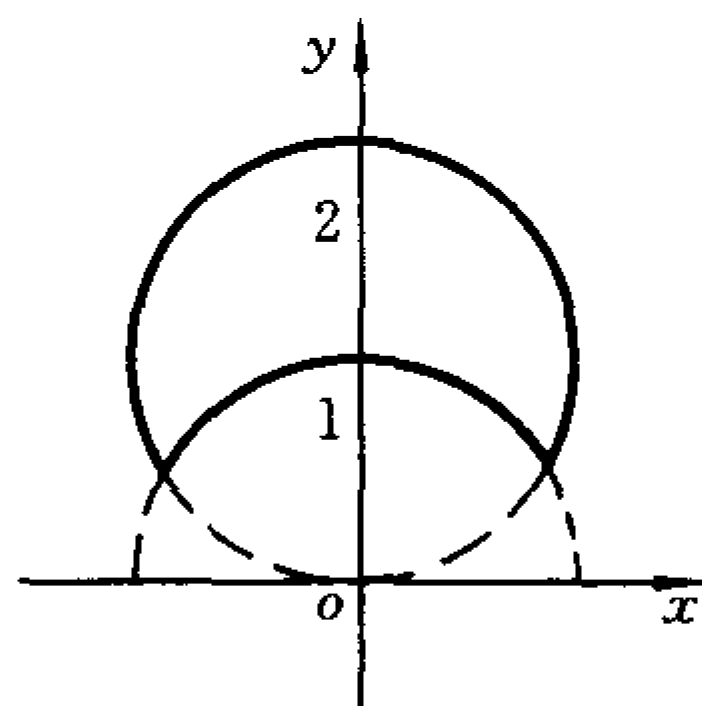


图 14.4

例 2 计算 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}$，$L$ 为任一不通过原点的简单光滑闭曲线正向.

解 因为不过原点，所以 L 上 $x^2+4y^2 \neq 0$，且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

当 L 不绕原点时，D 为单连通域，$\oint_L=0.$

当 L 绕原点时，作一小圆周 $C:x^2+4y^2=\varepsilon^2$，C 包含在 L 内，则

$$\oint_L=\oint_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

因为 $\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故由 $\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{y^2}{(\varepsilon/2)^2}=1$ 得

$$\oint_L=\frac{1}{\varepsilon^2}2\cdot\left(\frac{1}{2}\pi\varepsilon^2\right)=\pi.$$

同理，$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, & L\text{ 不绕原点},\\ 2\pi, & L\text{ 绕原点}.\end{cases}$

例 3 计算曲线积分

$$\oint_L\left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}+x^2\right)\mathrm{d}x,$$

L 由 $x^2+y^2=2y, x^2+y^2=4y, x=\sqrt{3}\,y, x=\frac{1}{\sqrt{3}}y$ 所围成.

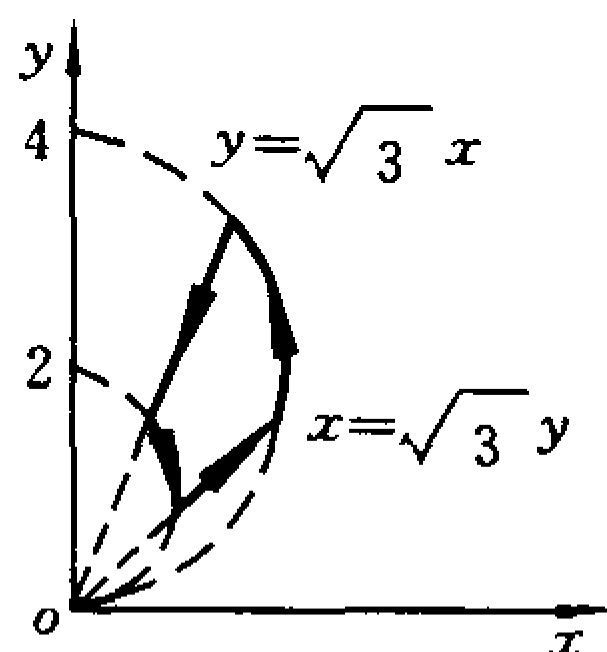


图 14.5

解 如图 14.5 所示，L 很复杂，可用格林公式求解. 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=2x$，所以

$$I=\iint\limits_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}2r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{112}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin^3\theta\mathrm{d}\sin\theta=\frac{14}{3}.$$

例 4 应用格林公式计算下列曲线所围区域的面积：

(1) 星形线 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$； (2) 双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta.$

解 (1) $S=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}a^2(\sin^2t\cos^4t+\sin^4t\cos^2t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) $x = a\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta},\ y = a\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta}$.

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta = a^2.$$

例 5 求出指数 λ,使曲线积分

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{x}{y}r^\lambda\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2}r^\lambda\mathrm{d}y\ (r = \sqrt{x^2+y^2})$$

在 $y\neq 0$ 的区域内与路径无关,并求出积分值.

解 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}r^\lambda + \lambda x\lambda^{\lambda-2}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}(2xr^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2})$,

故 $$2xr^\lambda + \lambda x^3 r^{\lambda-2} = xr^\lambda + \lambda xy^2 r^{\lambda-2},$$

两边乘以 $r^{2-\lambda}$,化为

$$(2+\lambda)x^3 + 2xy^2 = x^3 + (1-\lambda)xy^2,$$

得 $$(2+\lambda) = 1,\quad (1-\lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = -1.$$

当 $\lambda = -1$ 时,有

$$I = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{x}{y_0\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x - \frac{x^2}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x}\frac{x}{y_0\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x - \int_{y_0}^{y}\frac{x^2}{y\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} - \frac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{y_0^2}.$$

例 6 计算下列曲线积分:

(1) $\int_L(x^2y+3xe^x)\mathrm{d}x + \left(\frac{x^3}{3} - y\sin y\right)\mathrm{d}y$,$L$ 为摆线 $x = t - \sin t, y = 1-\cos t$,从 $o(0,0)$ 到 $A(\pi,2)$ 的弧段;

(2) $\int_L\frac{1+y^2f(xy)}{y}\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2f(x,y)-1]\mathrm{d}y$,$f$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有连续导数,L 为从点$(3,2/3)$到$(1,2)$的直线段.

解　先考察积分是否与路径无关,再进行计算.

(1) $\frac{\partial P}{\partial y}=x^2=\frac{\partial Q}{\partial x}$,故积分与路径无关. 选从$(0,0)\to(\pi,0)\to(\pi,2)$的折线段为积分路径,于是

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^{\pi}3xe^x\mathrm{d}x+\int_0^2\left(\frac{\pi^3}{3}-y\sin y\right)\mathrm{d}y\\
&=3(xe^x-e^x)\Big|_0^{\pi}+\left(\frac{\pi^3}{3}y-\sin y+y\cos y\right)\Big|_0^2\\
&=3e^{\pi}(\pi-1)+3+2\pi^3/3+2\cos2-\sin2.
\end{aligned}
$$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,故积分与路径无关. 选择折线段$(3,2/3)\to(1,2/3)\to(1,2)$为积分路径,于是

$$
\begin{aligned}
I&=\int_3^1\frac{3}{2}\left[1+\frac{4}{9}f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]\mathrm{d}x\int_{2/3}^2\left[f(y)-\frac{1}{y^2}\right]\mathrm{d}y\\
&=-3+\frac{2}{3}\int_3^1f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_{2/3}^2f(y)\mathrm{d}y-1.
\end{aligned}
$$

设$f(t)$的原函数为$F(t)$,则

$$
\frac{2}{3}\int_3^1f\left(\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x=F\left(\frac{2}{3}x\right)\Big|_3^1=F\left(\frac{2}{3}\right)-F(2),
$$

$$
\int_{2/3}^1f(y)\mathrm{d}y=F(y)\Big|_{2/3}^1=F(2)-F\left(\frac{2}{3}\right),
$$

故 $I=-3+F\left(\frac{2}{3}\right)-F(2)+F(2)-F\left(\frac{2}{3}\right)-1=-4.$

例 7　当$x>-1$时,$f(x)$连续且可微,且$f(0)=6/5$,对半平面$x>-1$上的任一闭曲线,有

$$
\oint_L[y-5ye^{-2x}f(x)]\mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\mathrm{d}y=0,
$$

求$f(x)$,并计算$\int_L[y-5ye^{-2x}f(x)]\mathrm{d}x+e^{-2x}f(x)\mathrm{d}y$,$L$为从$(1,0)$到$(2,3)$的弧段.

解　因为$\oint_L=0$,所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,即

$$-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=1-5e^{-2x}f(x),$$

有微分方程 $$f'(x)+3f(x)=e^{2x},$$

解得 $f(x)=e^{-\int 3dx}\left[\int e^{2x}\cdot e^{\int 3dx}dx+c\right]=\frac{1}{5}e^{2x}+ce^{-3x}$,

因 $f(0)=\frac{6}{5}\Rightarrow c=1$,故 $f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}+e^{-3x}$.

由于积分与路径无关,选折线段(1,0)→(2,0)→(2,3)为积分路径,于是

$$I=\int_1^2 P(x,0)dx+\int_0^3 Q(2,y)dy$$

$$=\int_0^3 e^{-4}\left(\frac{1}{5}e^4+e^{-6}\right)dy=\left(\frac{1}{5}+e^{-10}\right)y\Big|_0^3=3\left(\frac{1}{5}+e^{-10}\right).$$

例 8 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,当它满足什么条件时,曲线积分$\int_L f(x,y)(ydx+xdy)$ 与路径无关?

解 因为 $P(x,y)=yf(x,y)$, $Q(x,y)=xf(x,y)$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf'_y(x,y),\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=f(x,y)+xf'_x(x,y),$$

所以 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow y\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial x}.$$

例 9 选取 a,b 值,使得$\frac{ax+y}{x^2+y^2}dx-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}dy$ 为函数 $u(x,y)$的全微分,并求 $u(x,y)$.

解 因为 $P(x,y)=\frac{ax+y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{-x+y-b}{x^2-y^2}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-2axy-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2-y^2-2xy+2bx}{(x^2+y^2)^2},$$

所以 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow 2axy=2xy,\quad 2bx=0\Rightarrow a=1,b=0.$

因为,除点(0,0)外,P,Q 具有一阶连续偏导数,于是

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}+c$$

$$=\int_1^x \frac{1}{x}dx-\int_0^y \frac{x-y}{x^2+y^2}dy+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}+c.$$

例 10 验证下列函数为某函数的全微分，并求出该函数.

(1) $(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy-y^2)dy$;

(2) $e^x[e^y(x-y+2)+y]dx+e^x[e^y(x-y)+1]dy$;

(3) $y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy+\sin z dz$.

解 先验证$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，再求 $u(x,y)$.

(1) $\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$，且

$$u(x,y)=\int_0^x x^2dx+\int_0^y (x^2-2xy-y^2)dy+c$$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+c.$$

(2) $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x[e^y(x-y+1)]+e^x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$，且

$$u(x,y)=\int_0^x e^x(x+2)dx+\int_0^y [e^{x+y}(x-y)+e^x]dy+c$$

$$=(x-y+1)e^{x+y}+ye^x+c.$$

(3) $\frac{\partial P}{\partial y}=\cos(xy)-xy\sin(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$，故存在 $u(x,y)$.

用线积分(折线法)求解，得

$$u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} y\cos(xy)dx+x\cos(xy)dy+\sin z dz+c$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y x\cos(xy)dy+\int_0^z \sin z dz+c$$

$$=\sin(xy)-\cos z+1+c_1=\sin(xy)-\cos z+c.$$

用偏积分法求解，得$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cos(xy)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(xy)$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\sin z$.

任取其中一式$\left(如\frac{\partial u}{\partial x}\right)$积分，于是

$$u(x,y,z)=\int_0^x y\cos(xy)\mathrm{d}x+\varphi(y,z)$$
$$=\sin(xy)+\varphi(y,z).$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial y}=x\cos(xy)+\varphi_y'(y,z)=x\cos(xy),$$

故 $$\varphi_y'(y,z)=0\Rightarrow\varphi(y,z)=\psi(z).$$

因为 $\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi_z'(y,z)=\psi'(z)=\sin z\Rightarrow\psi(z)=-\cos z+c,$

即 $$\varphi(y,z)=-\cos z+c,$$

所以 $$u(x,y,z)=\sin(xy)-\cos z+c.$$

用凑微分法，即利用微分公式与法则求解，得

$$\mathrm{d}u(x,y,z)=y\cos(xy)\mathrm{d}x+x\cos(xy)\mathrm{d}y+\sin z\mathrm{d}z$$
$$=\cos(xy)y\mathrm{d}x+\cos(xy)x\mathrm{d}y+\sin z\mathrm{d}z$$
$$=\mathrm{d}[\sin(xy)-\cos z],$$

故 $$u(x,y,z)=\sin(xy)-\cos z+c.$$

例 11 利用格林公式计算 $\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$，其中 $u(x,y)=x^2+y^2$，L 为 $x^2+y^2=6x$ 正向，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 L 的外法线方向导数.

解 $\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y)=2x\cos\beta-2y\cos\alpha$，其中 α,β 是曲线 L 上在点 (x,y) 切线的方向角，故

$$\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint_L(2x\cos\beta-2y\cos\alpha)\mathrm{d}S.$$

化为第二型曲线积分后再利用格林公式，有

$$I=\oint_L(-2y\cos\alpha+2x\cos\beta)\mathrm{d}S$$
$$=\oint_L(-2)y\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\cdot 9\pi=36\pi.$$

第四节　第二型曲面积分

主要内容

1. 设 P,Q,R 为定义在双侧曲面 S 上的函数，在 S 上指定一侧作分割 T，分 S 为 n 个小曲面 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，分割的细度 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S_i \text{ 的直径}\}$. 以 $\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}},\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上的投影区域的面积. 当 S_i 的法线正向与 z 轴正向夹角小于 $\pi/2$ 时，$\Delta S_{i_{xy}}$ 取正值；当该夹角大于 $\pi/2$ 时，$\Delta S_{i_{xy}}$ 取负值. $\Delta S_{i_{yz}},\Delta S_{i_{zx}}$ 正负值取法类似. 在各小曲面积 S_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}}+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}}$$

$$+\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在，且与 S 的分割 T 和点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，则称此极限为函数 P,Q,R 在曲面 S 指定一侧上的第二型曲面积分，记作

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 设 R 是定义在光滑曲面 $S:z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$ 上的连续函数，以 S 的上侧为正侧，则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 若光滑曲面由参量方程给出，$S:x=x(u,v),y=y(u,v),z=z(u,v),(u,v)\in D$，且在 D 上函数行列式 $\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 不同时为零，则有

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \pm \iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm \iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

当 uov 平面的正方向对应曲面 S 选定的一侧时，二重积分前取正号，否则取负号.

疑难解析

1. 为什么要将曲面分侧？

答 第二型曲面积分又称为对坐标的曲面积分，积分是在曲面上进行的，但积分不是对 $\mathrm{d}S$ 而是对 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$（或 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$）进行的. 这里的 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 实际上是 ΔS 在 xoy 面上的投影，因此是有方向的. 这样，就需要考虑曲面的侧，即考虑积分是对曲面的某一侧进行的，对不同侧进行的积分有不同的值. 事实上，大多数曲面都是双侧的，因此，必须区分曲面的侧，在指定的侧上进行第二型曲面积分.

方法、技巧与典型例题分析

在计算第二型曲面积分时，很重要的一步是根据指定的侧确定二重积分前面的符号. 一般可以依据几何知识确定. 其实，计算第二型曲面积分的方法不是惟一的，读者可以多尝试新的解法.

例 1 用多种方法计算曲面积分

$$\iint_D (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 为 $z^2=x^2+y^2$ $(0\leqslant z\leqslant h)$的下侧.

解法 1 化曲面积分为二重积分.

取 $x>0$ 部分前侧为 S_1,$x<0$ 部分后侧为 S_2,$y>0$ 部分右侧为 S_3,$y<0$ 部分左侧为 S_4,则

$$\iint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{S_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{S_2}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0,$$

类似地,有

$$\iint_S (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{S_3}(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{S_4}(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,$$

$$\iint_S (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r^2(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}r = 0.$$

解法 2 化为第一型曲面积分来求解. 因为

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_S [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\mathrm{d}S,$$

其中 α,β,γ 分别是曲面 S 上法向量与三个坐标轴正向的夹角.

因为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$,故

$$I = \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}}\left(-x+y-\frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶数知,$I=0$.

(3) 用高斯公式(见下节)求解.

添加曲面 $S_0: z=h, x^2+y^2\leqslant h^2$,并取其上侧,则

$$I=\iint\limits_{S+S_0}-\iint\limits_{S_0}=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_0}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{V}0\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_0}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由区域的对称性与被积分函数的奇偶性知,$I=0$.

(4) 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$,所以曲面积分与曲面形状无关,只与边界曲线有关.故取曲面为题(3)中 S_0 的下侧,则由区域的对称性与函数的奇偶性知

$$I=\iint\limits_{S_0}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例 2 计算下列曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{S}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S$ 为椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 外侧;

(2) $\iint\limits_{S}f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$f,g,h$ 为连续函数,S 为平行六面体 $0<x<a,0<y<b,0<z<c$ 的外表面;

(3) $\iint\limits_{S}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S$ 是平面 $2x+2y+z=2$ 在第一卦限部分的上侧.

解 (1) $I=\oiint\limits_{S}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\oiint\limits_{S}\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\oiint\limits_{S}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

$$I_1=\oiint\limits_{S}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{a\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}$$

$$=\frac{8}{a}\int_0^b\mathrm{d}y\int_0^{c\sqrt{1-y^2/b^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-y^2/b^2-z^2/c^2}}=\frac{4\pi abc}{a^2},$$

其中 D_{xy} 为 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. 由轮换对称性，得

$$\oiint_S \frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{4\pi abc}{b^2},\quad \oiint_S \frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4\pi abc}{c^2}.$$

故 $I = \frac{4\pi abc}{a^2} + \frac{4\pi abc}{b^2} + \frac{4\pi abc}{c^2} = 4\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$

(2) 先计算 $\iint_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于侧面垂直于 xoy 面，故

$$\iint_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= (h(c) - h(0))\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc\,\frac{h(c) - h(0)}{c}.$$

由轮换对称性，得

$$\iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = abc\,\frac{f(a) - f(0)}{a},$$

$$\iint_S g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = abc\,\frac{g(b) - g(0)}{b}.$$

故 $I = abc\left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}\right].$

(3) 由于 S 取上侧，故法向量与 z 轴的夹角为锐角，方向余弦分别为 $\cos\alpha = 2/3, \cos\beta = 2/3, \cos\gamma = 1/3$，于是

$$I = \iint_S\left[\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}(x + z)\right]\mathrm{d}S = \frac{1}{3}\iint_S(3x + 2y + z)\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S[(2x + 2y + z) + x]\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{3}\iint_S(2 + x)\mathrm{d}S \text{（因为 } 2x + 2y + z = 2\text{）}.$$

而 D_{xy} 为 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x, \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=3$，故

$$I = \frac{1}{3}\iint_{D_{xy}}(2 + x)\cdot 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2 + x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (-x^2 - x + 2)\mathrm{d}x = \frac{7}{6}.$$

例 3 计算 $\oiint\limits_S \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，$S$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧.

解 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 为 S 上单位外法线向量，则 $\cos\alpha = x/r, \cos\beta = y/r, \cos r = z/r$，于是

$$I = \oiint\limits_S \left(\frac{x}{r^3}\cos\alpha + \frac{y}{r^3}\cos\beta + \frac{z}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$= \oiint\limits_S \frac{1}{r^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\mathrm{d}S = \oiint\limits_S \frac{1}{r^2}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{1}{a^2}\oiint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{1}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi.$$

例 4 计算 $\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的外侧.

解 由于曲面关于 z 轴对称，故

$$\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_S xy^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

又，曲面关于 yoz 平面对称，且 yx^3 是关于 x 的奇函数，所以

$$\iint\limits_S yx^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_S xy^3\mathrm{d}x\mathrm{d}x = 0.$$

$$I = 0 + \iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2 + y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{3}.$$

本例依据区域的对称性和函数的奇偶性简化了计算.

例 5 计算

$$I = \iint\limits_S [f(x,y,z) + x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z) + y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+ [f(x,y,z) + z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，S 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧.

解 设平面法向量为 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\cos\alpha=1/\sqrt{3}$，$\cos\beta=-1/\sqrt{3}$，$\cos r=1/\sqrt{3}$. 于是

$$\begin{aligned}
I=&\iint\limits_S\{[f(x,y,z)+x]\cos\alpha+[2f(x,y,z)+y]\cos\beta\\
&+[f(x,y,z)+z]\cos\gamma\}\mathrm{d}S\\
=&\iint\limits_S f(x,y,z)(\cos\alpha+2\cos\beta+\cos\gamma)\mathrm{d}S\\
&+\iint\limits_S(x\cos x+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S\\
=&\iint\limits_S f(x,y,z)\cdot 0+\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{\sqrt{3}}(x-y+1-x+y)\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^0\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

本例含抽象函数 $f(x,y,z)$，不能直接用二重积分、但可利用第一型曲面积分求出解.

例 6 计算 $\oiint\limits_S\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$，$z=2$ 所围立体的外侧.

解 记 S_1 为锥面部分，S_2，S_3 分别为 $z=1$，$z=2$ 部分，在 xoy 面上投影域分别为 D_1，D_2，D_3，则 S_1，S_2 取下侧，S_3 取上侧. 于是

$$\begin{aligned}
I=&-\iint\limits_{D_1}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&+\iint\limits_{D_3}\frac{e^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= -\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\frac{e^r}{r}rdr - \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{e}{r}rdr + \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{e^2}{r}rdr$$

$$= -2\pi\int_1^2\frac{e^r}{r}dr - 2\pi\int_0^1 edr + 2\pi\int_0^2 e^2dr = 2\pi e^2.$$

第五节　高斯公式与斯托克斯公式

主要内容

1. 高斯公式　设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 所围成，若函数 P,Q,R 在 V 上连续，且有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oint\!\!\!\oint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

其中 S 取外侧.

2. 斯托克斯(Stokes)公式　设光滑曲面 S 的边界 L 是分段光滑的连续曲线，函数 P,Q,R 在 S 及 L 上连续，且有一阶连续偏导数，则有斯托克斯公式

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz,$$

其中 S 的侧与 L 的方向依右手法则确定.

3. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为空间单连通域，若 P,Q,R 是 Ω 上连续函数，且有一阶连续偏导数，则以下四个条件等价：

(1) 对 Ω 内任一光滑封闭曲线，有

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0;$$

(2) 对 Ω 内任一分段光滑曲线，曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 与路径无关；

(3) Ω 内存在函数 $u(x,y,z)$，使得 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$；

(4) 在 Ω 内成立 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$.

疑难解析

1. 高斯公式有什么意义与用途？

答 高斯公式建立了沿空间闭曲面的曲面积分与三重积分之间的联系，使得对曲面积分的计算可以化为对曲面所围立体上的三重积分的计算. 与牛顿-莱布尼茨公式和格林公式一样，高斯公式体现了一个重要的数学思想——区域内部问题与边界问题的互相转化.

高斯公式是格林公式由平面域到空间域的推广，它不仅对封闭区域上的积分有效，对非封闭区域也可以用添加曲面的方法来使用. 当 V 是空间复连通域时，S 是 V 的外侧与内部小区域边界内侧之和.

2. 斯托克斯公式有什么意义与用途？

答 斯托克斯公式建立了沿空间曲面的曲面积分与沿其边界曲线的曲线积分之间的联系，它也是格林公式的推广.

对在 V 内有一阶连续偏导数的函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$，以下三个命题等价：

(1) $\forall\, S \subset V$，$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与曲面 S 的形状无关，仅与 S 的边界曲线有关；

(2) 对 V 内任一封闭曲面 S，$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$；

(3) 在 V 内恒有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$.

利用斯托克斯公式和上述命题可以大大简化积分计算并解决许多力学问题.

方法、技巧与典型例题分析

在用高斯公式和斯托克斯公式求解时,首先要验证问题是否满足定理条件,然后再考虑问题的具体条件,如能否利用轮换对称性、区域对称性、函数奇偶性,能否通过拼、凑、拆项来简化计算.

例 1 计算 $\oiint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,设:

(1)S 为 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$;

(2)S 为不包含原点的光滑闭曲面;

(3)S 为包含原点的光滑闭曲面.

解 (1)因为 $x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$,所以由高斯公式有

$$I=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{\varepsilon^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3=4\pi.$$

(2) S 不包含原点,而 $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}$,$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3y^2}{r^5}$,$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}$,即 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$,于是

$$I=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

(3)S 包含原点,需作半径充分小球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$,$S_1\subset S$. 则 S 与 S_1 之间区域 V_1,根据题(2),有

$$\iiint\limits_{V_1}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

而根据题(1)，有

$$-\iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\pi.$$

故
$$I = \iint_S = -\iint_{S_1} = -(-4\pi) = 4\pi.$$

这里 S_1 是取内侧.

例 2 计算下列曲面积分：

(1) $$\oiint_S \left[\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \left[-\frac{z}{y}f\left(\frac{x}{y}\right) + z^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(u)$ 有连续导数，S 为 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 内侧.

(2) $\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$S$ 为锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leqslant z \leqslant h)$ 外侧.

解 (1) $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$，依高斯公式，有

$$\begin{aligned}
I &= -3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r = -6\pi\int_0^{\pi/2}\frac{32}{5}R^5\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 6\cdot\frac{32}{5}\pi R^5\cdot\frac{1}{6} = \frac{32}{5}\pi R^5.
\end{aligned}$$

(2) 令 $S_1: z = h(x^2 + y^2 \leqslant h)$，取上侧，则 $S + S_1$ 构成封闭曲面，可用高斯公式. 于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{S+S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 2\iiint_V (x + y + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\int_0^h\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z^2} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= 2\int_0^h \pi z^4 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}h^4.$$

而
$$\iint_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leqslant h^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = h^2 \cdot \pi h^2 = \pi h^4,$$

故
$$I = \frac{\pi}{2}h^4 - \pi h^4 = -\frac{\pi}{2}h^4.$$

这里,在计算三重积分利用了区域的对称性和函数的奇偶性.

例 3 利用高斯公式计算下列曲面积分:

(1) $\oiint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$S$ 为立方体:$0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a$ 外侧;

(2) $\iint_S [x^3\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}) + y^2\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y}) + z^2\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})]\mathrm{d}S$,$S$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上半部分外侧.

解 (1) 因为$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)$,$S$ 为封闭曲面,故

$$I = 2\iiint_V (x+y+z)\mathrm{d}V = 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^a (x+y+z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^a \left(ax + ay + \frac{a^2}{2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a \left(a^2x + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2}\right)\mathrm{d}x = 3a^4.$$

(2) 补 $S_1: x^2+y^2 \leqslant R^2, z=0$,取下侧,则 $S+S_1$ 构成封闭曲面,依高斯公式,有

$$\oiint_{S+S_1} = 3\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V = 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 6\pi \cdot \frac{R^5}{5}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{6}{5}\pi R^5.$$

而
$$\iint_{S_1} = \iint_{S_1} [0 \cdot x^3 + 0 \cdot y^3 + (-1) \cdot 0] \mathrm{d}S = 0,$$

故
$$I = \oiint_{S+S_1} - \iint_{S_1} = \frac{6}{5}\pi R^5 - 0 = \frac{6}{5}\pi R^5.$$

例 4 计算曲面积分

$$\iint_S (x + y - z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2y + \sin(z + x)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$+ (3z + \mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧.

解 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2+3=6$，所以

$$I=6\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对 V：$|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|\leqslant 1$ 作旋转变换：$u=x-y+z, v=y-z+x, w=z-x+y$，$S$ 变成 $|u|+|v|+|w|=1$. V 是对称八面体，其第一封限部分由 $u+v+w=1$ 及 $u=0, v=0, w=0$ 所围成，则

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1\Big/\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \frac{1}{4},$$

故 $I = 6 \iiint\limits_{|u|+|v|+|w|\leqslant 1} \frac{1}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 2.$

例 5 设空间区域 V 由曲面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 所围成，$a>0$. 记 V 的表面外侧为 S，体积为 V，证明：

$$\oiint_S x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z(1 + xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V.$$

证 因为 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1+2xyz$，所以

$$I = \iiint_V (1 + 2xyz)\mathrm{d}V = V + 2\iiint_V xyz\mathrm{d}V.$$

因为区域关于 yoz 平面对称，而函数是关于 x 的奇函数，所以

$$\iiint_V xyz\mathrm{d}V = 0,$$

故
$$I = V + 0 = V.$$

例 6 用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，$L$ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, x/a + y/b = 1\ (a > 0, b > 0)$，从 x 轴正向看去，取逆时针方向；

(2) $\int_L (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (z^2 + x^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$，$L$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2x$ 的交线，从 z 轴正向看去，取逆时针方向$(z \geqslant 0)$.

解 (1)取以 L 为边界的部分平面 $S: x/a + y/b = 1$ 的上侧，则 S 平面法线的方向余弦为 $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = a/\sqrt{a^2+b^2}$，于是

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -2\iint_S \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{d}S$$

$$= -2\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S \mathrm{d}S = -\frac{2(a+b)}{a}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{2(a+b)}{a}\pi a^2 = -2\pi a(a+b).$$

(2) 球面法线方向的方向余弦为 $\cos\alpha = (x-2)/2, \cos\beta = y/2, \cos\gamma = z/2$，于是

$$I = 2\iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S \left[(y-z)\frac{x-2}{2} + (z-x)\frac{y}{2} + (x-y)\frac{z}{2}\right]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S (z - y)\mathrm{d}S.$$

由于曲面关于 xoy 平面对称，故 $\iint_S y\mathrm{d}S = 0$. 而

$$\iint_S z\mathrm{d}S = \iint_S 2\cos\gamma\mathrm{d}S = 2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

故　$I=4\pi$ (D_{xy}为$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，面积为 1).

例 7　利用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(1) $\int_L y^2\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}z$，$L$ 为曲线：$x^2+y^2+z^2=R^2, x^2+y^2=Rx$ $(R<0, z\geqslant 0)$，从 z 轴正向看去，取顺时针方向；

(2) $\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x + (y^2-xz)\mathrm{d}y + (z^2-xy)\mathrm{d}z$，$L$ 是从 $A(0,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ 的螺旋线：$x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, z=\dfrac{h}{2x}\theta$.

解　(1) $\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}=-2z, \dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}=-2x, \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y$ 均为连续函数，取曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧为 L 部分为 S，因为取顺时针方向，积分前加负号

$$I=-\iint_S [-2z\cos\alpha - 2x\cos\beta - 2y\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S [z\cos\alpha + x\cos\beta + y\cos\gamma]\mathrm{d}S,$$

由于 S 关于 xoz 平面对称，则 $\iint_S x\cos\beta\mathrm{d}S = 0$.

又 S 在 xoy 平面投影 D_{xy}：$-\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi/2, 0\leqslant r\leqslant R\cos\theta$，故

$$I=2\iint_S (z\cos\alpha + y\cos\gamma)\mathrm{d}S = 2\iint_S (x+y)\cos\gamma\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta} r(\cos\theta+\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} R^3\cos^4\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}R^3.$$

其中运用了关系式 $z\cos\alpha=z\cdot x/R=x\cdot z/R=x\cos\gamma$.

(2) 将 L 添上直线段 BA 构成封闭曲线. 因为 $\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$,所以积分与曲面无关,只与张它的曲线有关. 由斯托克斯公式,有

$$\int_{L+BA}=0\Rightarrow\int_{\Gamma}=-\int_{BA}=\int_{AB}.$$

直线段 AB 的方程为 $x=a,y=0,0\leqslant z\leqslant h$,所以

$$I=\int_{AB}z^2\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{h^3}{3}.$$

例 8 计算 $\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,点 (x_1,y_1,z_1) 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上,点 (x_2,y_2,z_2) 在球面 $x^2+y^2+z^2=b^2$ 上 $(a>0,b>a)$.

解 设 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r,\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$,故积分与路径无关,只与起点和终点有关,于是

$$I=\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big|_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$=b-a.$$

例 9 计算 $I=\int_A^B P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$,其中 $P=xz+ay^2+bz^2,Q=xy+az^2+bx^2,R=yz+ax^2+by^2,A(0,0,z_0),B(x_1,y_1,0)$. 确定 a,b 值,使积分与路径无关,并求出积分值.

解 由 $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 得 $a=\frac{1}{2},b=0$. 于是

$$I=\int_A^B(xz+\frac{1}{2}y^2)\mathrm{d}x+(xy+\frac{1}{2}z^2)\mathrm{d}y+(yz+\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}z,$$

取折线 $A(0,0,z_0)\rightarrow A_1(x_1,0,z_0)\rightarrow A_2(x_1,y_1,z_0)\rightarrow B(x_1,y_1,0)$ 为积分路径,有

$$I=\int_{A}^{A_1}+\int_{A_1}^{A_2}+\int_{A_2}^{B}$$

$$=\int_0^{x_1}P(x,0,z_0)\mathrm{d}x+\int_0^{y_1}Q(x_1,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{0}R(x_1,y_1,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{x_1}xz_0\mathrm{d}x+\int_0^{y_1}(x_1y+\frac{1}{2}z_0^2)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{0}(y_1z+\frac{1}{2}x_1^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}x_1^2z_0+\frac{1}{2}x_1y_1^2+\frac{1}{2}z_0^2y_1-\frac{1}{2}z_0^2y_1-\frac{1}{2}x_1^2z_0=\frac{1}{2}x_1y_1^2.$$

例 10 证明:若 S 为封闭的简单曲面,而 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线方向,$\boldsymbol{l}$ 为任一固定方向,则 $\oiint\limits_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0$.

证 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,$\boldsymbol{l}_0=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=(\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0)$,其中 $\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0$ 为常量. 由于

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}=\cos\alpha_0\cos\alpha+\cos\beta_0\cos\beta+\cos\gamma_0\cos\gamma,$$

故

$$\oiint\limits_S\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_S(\cos\alpha_0\cos\alpha+\cos\beta_0\cos\beta+\cos\gamma_0\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint\limits_S\cos\alpha_0\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta_0\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma_0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{由高斯公式}}\iiint\limits_V\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos\alpha_0+\frac{\partial}{\partial y}\cos\beta_0+\frac{\partial}{\partial z}\gamma_0\right)\mathrm{d}V=\iiint\limits_V0\mathrm{d}V=0.$$

例 11 设 $u(x,y,z)$ 在闭区域 V 上有二阶连续偏导数,记 $\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}$,证明:

$$\oiint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\iiint\limits_V u\Delta u\mathrm{d}V,$$

其中 S 是 V 的边界曲面,$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 $u(x,y,z)$ 沿 S 外法线方向的方向导数.

证 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\oiint_S u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_S u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}V$$

$$=\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}V+\iiint_V u\Delta u\mathrm{d}V.$$

例 12 利用斯托克斯公式化 $\iint_S \mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$ 为曲线积分，$\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+xz\boldsymbol{k}$，$S$ 为上半球面 $z=(1-x^2-y^2)^{1/2}$的上侧，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的单位法向量.

解 $\mathbf{rot}\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$，

S 的边界曲线为 $x^2+y^2=1,z=0$，则由斯托克斯公式，有

$$I=\iint_S\mathbf{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_S y^2\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}[\sin^2t(-\sin t)+\cos^2t\sin t]\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-2\cos^2t)\mathrm{d}\cos t=0.$$

例 13 设 S 为包围有界物体 V 的简单光滑曲面，$u(x,y,z)$ 在 $V+S$ 上连续，并有二阶连续偏导数，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的外法线向量，证明：

$$\oiint_S u\,\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V(\mathbf{grad}u)^2\mathrm{d}V+\iiint_V u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V.$$

证 令 $\boldsymbol{F}=u\,\mathbf{grad}u$，则因为

$$\mathbf{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\operatorname{div}[u\,\mathbf{grad}u]=\operatorname{div}\left[u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

$$=u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(\mathbf{grad}u)^2,$$

所以 $$\oiint\limits_S u\,\mathbf{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint\limits_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_V\operatorname{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

$$=\iiint\limits_V(\mathbf{grad}u)^2\mathrm{d}V+\iiint\limits_V u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}V.$$

例 14 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 均为连续函数，S 为光滑曲面，面积为 S，M 是 $\sqrt{P^2+Q^2+R^2}$ 在 S 上的最大值，证明：$\left|\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant MS.$

证 $$\left|\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|\iint\limits_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S\right|$$

$$\leqslant\iint\limits_S|P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma|\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_S|(P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)|\mathrm{d}S=\iint\limits_S|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_0|\mathrm{d}S$$

$$\leqslant\iint\limits_S|\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{n}_0|\mathrm{d}S=\iint\limits_S|\boldsymbol{F}|\mathrm{d}S=\iint\limits_S\sqrt{P^2+Q^2+R^2}\mathrm{d}S$$

$$\leqslant M\iint\limits_S\mathrm{d}S=MS.$$

例 15 有密度为 μ 的空间流体，流速 $\boldsymbol{v}=xz^2\boldsymbol{i}+yx^2\boldsymbol{j}+zy^2\boldsymbol{k}$，求在单位时间内流过曲面 S：$x^2+y^2+z^2=2z$ 的流量 Φ（流向外

侧)和沿曲线 $L: x^2+y^2+z^2=2z, z=1$ 的环流量 Γ(从 z 轴正向量看是逆时针方向).

解 球面 S 的球面坐标方程为 $r=2\cos\varphi$,故

$$\Phi = \oiint_S xz^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + yx^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + zy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ (由高斯公式)}$$

$$= \iiint_V (z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\cdot\frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi.$$

曲线 L 为平面 $z=1$ 上的圆周 $x^2+y^2=1$,故

$$\Gamma = \oint_L xz^2\mathrm{d}x + yx^2\mathrm{d}y + zy^2\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz^2 & yx^2 & zy^2 \end{vmatrix} \quad \text{(由斯托克斯公式)}$$

$$= 2\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \text{ (由区域对称性和函数奇偶性)}.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析　内容、方法与技巧　（下册）
作者＝孙清华　孙昊
页数＝４７７
ＳＳ号＝１１２１９８４３
出版日期＝２００３年１１月第１版

前言

目录